Università degli Studi di Firenze – Scuola di Ingegneria

CdS in Ingegneria Civile, Edile, Ambientale

***Analisi Matematica I* (A.A. 2013/14) – Prof.ssa Francesca Bucci**

NOTA INTEGRATIVA IN RELAZIONE ALLA LEZIONE DEL 9 DICEMBRE 2013

Si riporta per esteso lo svolgimento di uno dei problemi discussi nella lezione di Lunedì 9 Dicembre 2013, poiché istruttivo ai fini dell'analisi della convergenza di successioni definite per ricorrenza.

1. (*Problema*) Data la successione definita (*per ricorrenza*) da

$$a_1 = \frac{1}{2}\,, \quad a_{n+1} = a_n^2(1-a_n)\,, \qquad n = 1, 2, \dots, \tag{1}$$

discutere il carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

1. (Svolgimento) Mentre è chiaro che non è possibile (o è molto difficile) dedurre da (1) un'espressione esplicita di a_n in funzione di n, si vedrà che il criterio del rapporto consente di concludere che la serie $\sum_n a_n$è convergente.

Preliminarmente, si osserva che tutti i termini della successione sono compresi tra 0 e 1. Questo fatto si prova introducendo, al variare di $n \geq 1$, la successione di proposizioni

$$\mathcal{P}_n : \quad 0 < a_n < 1\,,$$

la cui validità per ogni $n \geq 1$ segue facilmente *per induzione*. Infatti, naturalmente $a_1 = 1/2 \in (0,1)$ e $\mathcal{P}_1$ è vera. Sia ora vera $\mathcal{P}_k$, ovvero sia $a_k \in (0,1)$: da $a_{k+1} = a_k^2(1-a_k)$ e dall'*ipotesi induttiva* segue immediatamente che $a_{k+1} > 0$, poiché $a_k^2 > 0$ e $(1-a_k) > 0$. D'altra parte, $a_{k+1} = a_k[a_k(1-a_k)]$, ove $a_k(1-a_k) \leq 1/4$ (la stima ottimale $x(1-x) \leq 1/4$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ è elementare). Utilizzando di nuovo $a_k > 0$ si ottiene $a_k[a_k(1-a_k)] \leq a_k/4$; poiché si ha anche $a_k < 1$, si trova $a_{k+1} = a_k[a_k(1-a_k)] \leq a_k/4 < 1/4 < 1$.
In conclusione, si è provato $0 < a_{k+1} < 1$ e $\mathcal{P}_{k+1}$ è vera. Dunque $\mathcal{P}_n$ è vera per ogni n.

A questo punto, è immediato osservare che il rapporto a_{n+1}/a_n è tale che

$$0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} = a_n(1-a_n) \leq \frac{1}{4} < 1 \tag{2}$$

(ove si è tenuto conto nuovamente di $x(1-x) \leq 1/4$), ed il criterio del rapporto consente di concludere che la serie $\sum_n a_n$ è convergente.

La convergenza della serie $\sum_n a_n$ implica, in particolare, che $a_n \to 0$, $n \to \infty$. È importante sottolineare che la convergenza di a_n a zero è un fatto che poteva essere mostrato utilizzando argomentazioni che vengono qui messe in evidenza perché di più ampio utilizzo.

La disuguaglianza in (2) mostra che la successione $\{a_n\}_n$ è monotona (strettamente) decrescente; inoltre $a_n > 0$ cioè a_n è inferiormente limitata, e di conseguenza a_n risulta convergente. Sia L il valore del limite: poiché $a_n > 0$ e $a_n < a_1 = 1/2$, a priori si ha $L \in [0, 1/2)$. Passando a limite per $n \to \infty$ nella *relazione ricorsiva* in (1) si ottiene che L deve soddisfare $L = L^2(1-L)$: pertanto, o $L = 0$ oppure $1 = L(1-L)$, che è impossibile (l'equazione non ha soluzioni reali). Si conclude che $L = 0$.