



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
FIRENZE

## Registro dell'insegnamento

**Anno accademico** 2013/2014

**Prof.** FRANCESCA BUCCI

**Settore inquadramento** MAT/05 - ANALISI MATEMATICA

**Scuola** Ingegneria

**Dipartimento** INGEGNERIA CIVILE E AMBIENTALE (DICEA)

**Insegnamento** ANALISI MATEMATICA II /PROBABILITA' E STATISTICA C.I.

**Moduli** ANALISI MATEMATICA II

**Settore insegnamento**

**Corsi di studio** INGEGNERIA CIVILE, EDILE E AMBIENTALE

N.B.- Ai sensi dell' art.2 della Legge 1-5-1941. n. 615, i direttori degli istituti e dei laboratori nei quali si eseguono esperimenti sugli animali dovranno allegare al presente registro delle lezioni anche il registro contenente i dati relativi agli esperimenti di cui sopra.

**n.:** 1     lezione     esercitazione     laboratorio     seminario

**Data:** 24/09/2013    **Totale ore:** 2

**Argomento:** (2 ore) Presentazione del corso: programma sintetico, testo di riferimento e testi consigliati, prerequisiti; organizzazione delle lezioni, modalita' di verifica dell'apprendimento.

Lo spazio  $\mathbb{R}^n$ : vettori dello spazio, norma euclidea, proprieta' della norma. Per esercizio: dimostrare la disuguaglianza triangolare.

Richiami: (i) Il prodotto scalare tra due vettori: definizione, il caso  $n=2,3$ . Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz (sketch della dimostrazione). (ii) Il prodotto vettoriale tra due vettori.

Regole di calcolo per i prodotti scalare e vettoriale (per esercizio).

Funzioni di variabile reale a valori vettoriali,  $r: I \rightarrow \mathbb{R}^m$ , ove  $I$  e' un intervallo di  $\mathbb{R}$  e  $m > 1$ .

Definizione di limite di  $r(t)$ , per  $t$  che tende a  $t_0$ ; definizione di applicazione continua in  $t_0$ . Esempi.

Firma .....

**n.:** 2     lezione     esercitazione     laboratorio     seminario

**Data:** 25/09/2013    **Totale ore:** 3

**Argomento:** (3 ore) Curve in forma parametrica: definizione di arco di curva continua (o cammino), sostegno di una curva. Esempi. Curve distinte possono avere lo stesso sostegno. Curve semplici, curve chiuse.

Curve di classe  $C^1$ , curve regolari. Vettore derivato, interpretazione geometrica, vettore tangente.

Curve regolari: definizione, discussione di alcuni esempi.

Classi importanti di curve piane: curve cartesiane, curve polari.

Integrali in  $[a,b]$  di funzioni di variabile reale, a valori vettoriali: definizione, Teorema fondamentale del calcolo integrale.

Per esercizio: (i) Discutere la regolarita' della curva astroide.

(ii) Il Teorema di Lagrange non si estende al caso in cui  $r: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $m > 1$ .

Firma .....

**n.:** 3     lezione     esercitazione     laboratorio     seminario

**Data:** 01/10/2013    **Totale ore:** 2

**Argomento:** (2 ore) Curve in forma parametrica (continuazione). Curve regolari a tratti: definizione, esempio (astroide).

Curve rettificabili, lunghezza di un arco di curva: definizione, Teorema che fornisce la lunghezza di un arco di curva regolare (senza dimostrazione (s.d.)).

Esercizio: calcolare la lunghezza dell'arco di curva definito da  $r(t)=(t^2,t^3)$ , con  $t$  in  $[-1,1]$ .

Un esempio di arco di curva non rettificabile.

Il parametro ascissa curvilinea.

Firma .....

**n.:** 4     lezione     esercitazione     laboratorio     seminario

**Data:** 02/10/2013    **Totale ore:** 3

**Argomento:** (3 ore) Curve (continuazione e conclusione). Cambi di parametro, curve equivalenti; cambi di orientazione. Esempi. Il parametro ascissa curvilinea. Esercizi: rappresentazioni parametriche (i) del segmento di estremi  $P_1$  e  $P_2$ , (ii) della retta passante per  $P_0$ , di direzione assegnata  $v$ .

Integrali curvilinei di prima specie: il calcolo della massa totale di un filo pesante, non omogeneo, di cui sia nota la densità lineare.

Definizione di integrale di una funzione continua  $f$ , esteso ad un arco di curva regolare  $\gamma$ ; interpretazione geometrica dell'integrale nel caso in cui  $f > 0$ .

Proprietà di invarianza della lunghezza di una curva regolare e dell'integrale di linea esteso ad una curva regolare per cambi di parametrizzazioni (diffeomorfismi di classe  $C^1$ ), anche nel caso di cambio di orientazione sulla curva.

(1 ora) Funzioni (a valori reali) di più variabili reali.

Introduzione, con esempi: dominio, grafico, insiemi di livello.

Firma .....

**n.:** 5     lezione     esercitazione     laboratorio     seminario

**Data:** 08/10/2013    **Totale ore:** 2

**Argomento:** (2 ore) Funzioni di più variabili (continuazione). Topologia elementare in  $R^n$ : intorni sferici, esempi per  $n=1,2,3$ . Punti interni, punti esterni, punti di frontiera di un insieme  $D$  contenuto in  $R^n$ . Esempio. Punti di accumulazione. Data  $f:D \rightarrow R$  e  $x_0$  di accumulazione per  $D$ , definizione di limite finito di  $f$ , per  $x \rightarrow x_0$ . Discussione di un esempio. Regole di calcolo per i limiti: limite di una somma, di un prodotto, ecc. Criterio del confronto. Vale il Teorema della permanenza del segno.

Data  $f:D \rightarrow R$ , e  $x_0$  in  $D$ , si definisce la proprietà "f e' continua in  $x_0$ ". Classi di funzioni continue:

polinomi, funzioni razionali, ecc.

Firma .....

**n.:** 6     lezione     esercitazione     laboratorio     seminario

**Data:** 09/10/2013    **Totale ore:** 2

**Argomento:** (2 ore) N.B.: Il normale svolgimento della 3<sup>a</sup> ora di lezione e' stato impedito dall'improvviso e inatteso distacco della corrente nell'aula, e dalla conseguente assenza di luce e amplificazione.

(1<sup>a</sup> ora) Limiti e continuita' (continuazione). Dimostrazione del Teorema della permanenza del segno. Definizione di limite "+infinito" per funzioni di piu' variabili. Limite per  $||x||$  che tende a infinito; esempi. Funzioni a simmetria radiale.

Se  $f$  e' una funzione continua in  $R^n$ , l'insieme

$A=\{x: f(x)>0\}$  e' aperto; l'insieme  $C=\{x: f(x)=0\}$  e' chiuso.

Risultati di rilievo per le funzioni continue: il Teorema di Weierstrass, il Teorema degli zeri.

(2<sup>a</sup> ora) Discussione con gli studenti a partire dagli esercizi assegnati sul tema "Lo spazio  $R^n$ , curve, integrali curvilinei".

(Richiamare alla mente le funzioni iperboliche: definizione, identita' fondamentale, grafici, rispettivamente; le funzioni inverse settore seno iperbolico e settore coseno iperbolico.)

Firma .....

**n.:** 7     lezione     esercitazione     laboratorio     seminario

**Data:** 15/10/2013    **Totale ore:** 2

**Argomento:** (2 ore) Al termine della 1<sup>a</sup> ora viene a mancare l'amplificazione; probabile causa: interventi elettrici non annunciati.

Funzioni continue (continuazione).

Insiemi limitati in  $R^n$ : definizione, esempi.

Il Teorema di Weierstrass (senza dimostrazione (s.d.)).

Per esercizio: mostrare che le ipotesi del Teorema di Weierstrass sono ottimali.

Insiemi connessi (per archi) in  $R^n$ : definizione, esempi.

Il Teorema degli zeri (s.d.); si richiama pero' la dimostrazione del Teorema degli zeri nel caso di funzioni di una variabile, sottolineando che tale dimostrazione (basata sul metodo di bisezione) e' \*costruttiva\*.

Calcolo differenziale in piu' variabili.

Derivate direzionali in un punto  $x_0$ , lungo una direzione  $v$ . Derivate parziali. Esempio di funzione che ammette derivate parziali in un punto ma non e' ivi continua. Inadeguatezza delle derivate direzionali ai fini

dell'estensione (a dimensioni  $n > 1$ ) del concetto di derivata.

Firma .....

**n.:** 8     lezione     esercitazione     laboratorio     seminario

**Data:** 16/10/2013    **Totale ore:** 3

**Argomento:** (3 ore)

Calcolo differenziale per funzioni di piu' variabili (continuazione).

Esistenza e calcolo di derivate parziali di  $f$  in  $x_0$ : discussione/illustrazione con esempi. Il vettore gradiente.

Esempio di una funzione che ammette tutte le derivate direzionali in  $x_0$  ma non e' ivi continua (da discutere, per esercizio).

Si richiama il caso di funzioni di variabile reale ( $n=1$ ): derivata prima

e approssimazione lineare. Il concetto di differenziabilita': definizione, implicazioni, esempi. Una funzione differenziabile in  $x_0$  possiede derivate parziali prime in  $x_0$ . Una funzione differenziabile in  $x_0$  e' continua in  $x_0$  (dimostrato).

PROPOSIZIONE: Una funzione differenziabile in  $x_0$  possiede tutte le derivate direzionali in  $x_0$ , e vale la "formula del gradiente" (dimostrato).

Funzioni di classe  $C^1(A)$ .

Firma .....

**n.:** 9     lezione     esercitazione     laboratorio     seminario

**Data:** 22/10/2013    **Totale ore:** 2

**Argomento:** (2 ore) Calcolo differenziale (continuazione).

Il Teorema del differenziale totale (sketch della dimostrazione). Funzioni di classe  $C^1$  in un aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^n$ . Corollario del Teorema del differenziale totale: "f appartenente a  $C^1(A)$  implica f differenziabile in A"; non vale il viceversa (controesempio).

Esercizio: illustrazione sull'utilizzo del Corollario ai fini del calcolo di una derivata direzionale.

Direzioni di massima/minima pendenza.

Derivazione di funzioni composte: analisi di due situazioni significative. Il Teorema di derivazione delle funzioni composte, la regola della catena.

Firma .....

**n.:** 10     lezione     esercitazione     laboratorio     seminario**Data:** 23/10/2013        **Totale ore:** 3

**Argomento:** (2 ore) Funzioni differenziabili (continuazione). Teorema di derivazione di funzioni composte, regola della catena (enunciato in due casi particolarmente significativi). Illustrazione: Se  $f$  appartiene a  $C^1(\mathbb{R})$ , e  $c$  e' una costante diversa da zero, la funzione  $u(x,t) = f(x-ct)$  appartiene a  $C^1(\mathbb{R}^2)$ , con  $u_t(x,t)+cu_x(x,t)=0$  in  $\mathbb{R}^2$  (equazione del trasporto).

-- Equazione del piano tangente al grafico di  $f$  in  $(x_0, f(x_0))$ , con

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabile in  $x_0$ ; vettore normale.

-- Il differenziale di  $f$  in  $x_0$ .

-- Derivate direzionali, direzioni di massima e minima crescita.

Derivate di ordine superiore: definizione, simboli; derivate parziali seconde pure e miste. Matrice hessiana.

Un'illustrazione: calcolo delle derivate parziali seconde della funzione  $f(x,y) = \log [(x^2+y^2)^{1/2}]$ ; si osserva che le derivate seconde miste sono uguali.

(1 ora) Discussione su un paio di esercizi assegnati sul tema "Funzioni di piu' variabili, I."

Firma .....

**n.:** 11     lezione     esercitazione     laboratorio     seminario**Data:** 29/10/2013        **Totale ore:** 2

**Argomento:** (2 ore) Derivate successive (continuazione). Funzioni di classe  $C^2(A)$ .

Il TEOREMA di Schwarz (s.d.). Matrice hessiana, differenziale secondo.

Formula di Taylor con resto di Lagrange (dimostrata).

Formula di Taylor con resto di Peano.

Punti di massimo o minimo relativo per funzioni di piu' variabili.

Firma .....

**n.:** 12     lezione     esercitazione     laboratorio     seminario**Data:** 30/10/2013        **Totale ore:** 3

**Argomento:** (3 ore)

Ottimizzazione: estremi liberi. Condizioni del prim'ordine: TEOREMA di Fermat (dim.). Punti critici (o stazionari); un esercizio.

Il Teorema di Fermat fornisce una condizione necessaria affinché un punto  $x_0$  interno a  $D$  sia di estremo relativo per  $f$ ; essa non è sufficiente: un esempio classico se  $n=1$ , due esempi nel caso  $n=2$ .

Condizioni del second'ordine. Forme quadratiche: definizione, esempi, classificazione (forme definite positive o negative, indefinite, ecc.); caratterizzazione (dimostrata nel caso  $n=2$ ).

Forme quadratiche ed autovalori della matrice (simmetrica) ad esse associata. (Richiami sulle proprietà di autovalori ed autovettori di una matrice simmetrica.) TEOREMA sulla natura dei punti critici.

Firma .....

**n.:** 13     lezione     esercitazione     laboratorio     seminario

**Data:** 05/11/2013    **Totale ore:** 2

**Argomento:** (2 ore) Funzioni definite implicitamente: introduzione al tema, esempi; curve del piano che sono localmente il grafico di una funzione di una variabile.

Il TEOREMA delle funzioni implicite (o di Dini) (s.d.). Regolarità della funzione implicita, espressione delle derivate di ordine  $k$ .

Un esercizio.

Problemi di ottimizzazione vincolata. Introduzione al TEOREMA dei moltiplicatori di Lagrange.

Firma .....

**n.:** 14     lezione     esercitazione     laboratorio     seminario

**Data:** 06/11/2013    **Totale ore:** 3

**Argomento:** (3 ore) Problemi di ottimizzazione vincolata. Ricerca di punti di minimo/massimo per  $f=f(x,y)$ , soggetta al vincolo  $g(x,y)=0$ . Il caso in cui il livello zero di  $g$  è il sostegno di una curva regolare, di cui è nota una rappresentazione parametrica. Il caso generale, nell'ipotesi " $f, g$  appartenenti a  $C^1$  di  $R^2$ "; insiemi di livello regolari.

Il Teorema dei moltiplicatori di Lagrange (dimostrato). Interpretazione geometrica. Punti critici vincolati.

Discussione di un problema di minimo (vincolato) assegnato in precedenza; la soluzione segue da osservazioni di carattere geometrico.

Illustrazione dei metodi discussi i fini della risoluzione del problema.

Firma .....

**n.:** 15     lezione     esercitazione     laboratorio     seminario**Data:** 12/11/2013        **Totale ore:** 2

**Argomento:** (2 ore) Applicazioni a valori vettoriali ( $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , con  $n, m > 1$ ). Generalita', esempi paradigmatici. Cambi di coordinate: le coordinate polari, le coordinate sferiche, la colatitudine e la longitudine. Il concetto di limite, funzione continue. Calcolo differenziale: funzioni differenziabili in un punto  $x_0$ , approssimazione lineare, matrice jacobiana. Computo della matrice jacobiana della trasformazione in coordinate polari.

Firma .....

**n.:** 16     lezione     esercitazione     laboratorio     seminario**Data:** 13/11/2013        **Totale ore:** 3

**Argomento:** (3 ore) Calcolo differenziale per funzioni a valori in  $\mathbb{R}^m$ ,  $m > 1$  (continuazione). Il TEOREMA di derivazione delle funzioni composte (s.d.). Un'applicazione: si chiede di determinare l'espressione dell'operatore di Laplace in coordinate polari. (L'operatore di Laplace o laplaciano e' l'operatore differenziale che associa ad una funzione  $u$  di classe  $C^2$  la somma delle derivate parziali seconde pure di  $u$ ). Cenni ad un contesto in cui scaturisce l'equazione di Laplace " $\Delta u = 0$  in  $\Omega$ ".

Invertibilita' (globale) di applicazioni a valori in  $\mathbb{R}^m$ : condizione necessaria e' che sia  $n=m$  (s.d.). La trasformazione in coordinate polari non e' iniettiva, a meno di escludere  $\rho=0$  e  $\theta = 0, 2\pi$ .

Invertibilita' locale in  $x_0$ . Il concetto di diffeomorfismo globale e locale. Matrice jacobiana dell'applicazione inversa. Il TEOREMA dell'inversa locale (s.d.; e' una conseguenza del Teorema delle funzioni implicite).

Introduzione al calcolo integrale per funzioni di piu' variabili. [Richiami: l'integrale di funzioni di una variabile come limite di somme di Cauchy-Riemann]. Integrale di una funzione limitata in un rettangolo  $[a,b] \times [c,d]$  come limite di somme di Cauchy-Riemann: suddivisioni di  $[a,b]$  e  $[c,d]$ , costruzione della somma di Riemann.

Firma .....

**n.:** 17     lezione     esercitazione     laboratorio     seminario**Data:** 19/11/2013        **Totale ore:** 2



**Argomento:** (2 ore) Introduzione al calcolo integrale (continuazione).

Costruzione di somme di Riemann, data  $f$  limitata in un rettangolo  $R$  del piano. Definizione dell'integrale come limite di somme di Riemann. Interpretazione geometrica. Esempio di funzione non integrabile in un quadrato. (Incidentalmente, si richiama il fatto che l'insieme dei numeri razionali è denso nell'insieme dei numeri reali. La proprietà di densità è una conseguenza della proprietà di Archimede.)

TEOREMA: Se  $f$  è continua in  $R$ , allora  $f$  è integrabile in  $R$  (s.d.).

Il calcolo degli integrali doppi: introduzione al metodo di riduzione, integrali iterati. TEOREMA di riduzione (nel caso di un rettangolo), con alcuni passi cruciali della dimostrazione.

Firma .....

**n.:** 18     lezione     esercitazione     laboratorio     seminario

**Data:** 20/11/2013    **Totale ore:** 3

**Argomento:** (1 ora) Calcolo integrale per funzioni di più variabili (continuazione).

Esercizi: illustrazione della formula di riduzione. (Incidentalmente, si richiama il fatto seguente: Vi sono funzioni di una variabile, continue in un intervallo  $[a,b]$  e che quindi ammettono primitive in  $[a,b]$ , per le quali tali primitive non sono esprimibili in termini di funzioni elementari ovvero polinomi, funzioni razionali, funzioni log o arctan.

Una di queste funzioni è  $f(t)=\exp(-t^2)$ .)

(2 ore) Definizione di integrale per funzioni limitate su un dominio limitato  $\Omega$ . Una funzione (non banale) continua sulla chiusura di un dominio non rettangolare  $\Omega$  ha punti di discontinuità su ogni rettangolo che contiene  $\Omega$ . La necessità di introdurre un concetto di insieme misurabile e quindi di misura (o area). Misura di Peano-Jordan: definizione, esempio di insieme del piano non misurabile, insiemi di misura nulla. Caratterizzazione degli insiemi del piano di misura nulla (s.d.). Esempi di insiemi di misura nulla in  $R^2$ : insiemi costituiti da un numero finito di punti; i segmenti, i grafici di funzioni  $f:[a,b] \rightarrow R$  continue in  $[a,b]$ . Caratterizzazione degli insiemi del piano misurabili secondo P-J (s.d.). TEOREMA: "Una funzione limitata in un rettangolo e ivi continua, tranne che in punti di un insieme  $E$  di misura nulla, è integrabile" (s.d.). Insiemi semplici rispetto all'asse  $y$  oppure rispetto all'asse  $x$ : definizione, ed illustrazione mediante esempi. La formula di riduzione nel caso di insiemi semplici. Domini regolari del piano.

Firma .....

**n.:** 19     lezione     esercitazione     laboratorio     seminario

**Data:** 26/11/2013    **Totale ore:** 2

**Argomento:** (2 ore) Calcolo integrale per funzioni di due variabili (continuazione). Proprietà dell'integrale: linearità, positività e monotonia, additività (s.d.). Esercizio: integrale della funzione  $f(x,y) = x \log(y)$  su un dominio  $\Omega$  semplice rispetto ad entrambi gli assi, applicazione del Teorema di Fubini. Per esercizio: effettuare il calcolo introducendo la descrizione analitica di  $\Omega$  come insieme semplice rispetto all'asse  $x$ .

Cambiamento di variabili negli integrali multipli: si richiama il caso di  $f$  funzione di una variabile, integrazione per sostituzione. TEOREMA (s.d.) di cambiamento di variabili negli integrali doppi. Esercizio.

Firma .....

**n.:** 20     lezione     esercitazione     laboratorio     seminario

**Data:** 27/11/2013    **Totale ore:** 3

**Argomento:** (3 ore) Calcolo integrale per funzioni di più variabili (continuazione).

Applicazione della formula di cambiamento di variabili negli integrali multipli: due esercizi. La trasformazione in coordinate polari nei casi di integrale di funzioni a simmetria radiale e/o su domini piani a simmetria radiale. Applicazioni fisiche/meccaniche/geometriche dell'integrale: baricentro, centroide. Momento d'inerzia rispetto ad un asse o ad un punto.

Generalizzazione a dimensioni maggiori di 2. Integrale di funzioni (limitate) definite in sottoinsiemi (limitati) di  $\mathbb{R}^3$ . Il calcolo degli integrali tripli, situazioni paradigmatiche: integrazione "per fili", integrazione "per strati".

Firma .....

**n.:** 21     lezione     esercitazione     laboratorio     seminario

**Data:** 03/12/2013    **Totale ore:** 2

**Argomento:** (2 ore) Campi vettoriali. Lavoro di un campo di forze continuo in un aperto connesso  $D$  di  $\mathbb{R}^n$ , lungo un arco di curva (orientata) regolare, o regolare a tratti con sostegno contenuto in  $D$ . Integrali curvilinei di seconda specie: indipendenza da cambi di parametri equivalenti, esempi. Campi vettoriali conservativi in una regione  $D$ . Il lavoro di un campo conservativo (continuo in  $D$ ) lungo un arco di curva regolare con sostegno in  $D$ , congiungente  $P_1$  a  $P_2$ , dipende solo dagli estremi e non dal cammino (dimostrato). Il lavoro di un campo conservativo (continuo in  $D$ ) lungo un arco di curva chiusa, semplice e regolare con sostegno in  $D$  è nullo. Le suddette affermazioni si estendono al caso di curve regolari a tratti.

Firma .....

**n.:** 22     lezione     esercitazione     laboratorio     seminario**Data:** 04/12/2013        **Totale ore:** 1**Argomento:** (1 ora e mezza) Campi vettoriali conservativi (continuazione).

Caratterizzazione dei campi vettoriali conservativi (condizioni necessarie e sufficienti): si pone l'attenzione su -- e si dimostra -- la delicata implicazione "Se per ogni curva chiusa, semplice e regolare (o regolare a tratti) con sostegno contenuto in una regione  $D$  la circuitazione del campo (continuo)  $F$  e' nulla, allora  $F$  e' conservativo in  $D$ ". Si sottolinea che la dimostrazione di questa asserzione e' costruttiva, ovvero fornisce un metodo esplicito per la determinazione di un potenziale  $U=U(x,y,z)$  in  $D$ . La condizione suddetta e' in particolare utile a provare che un campo non e' conservativo: un classico esempio di campo non conservativo nel suo dominio naturale (Es. 1). Campi di classe  $C^1$ : "Condizione necessaria affinche' un campo  $F$  appartenente a  $C^1$  sia conservativo in una regione  $D$  di  $R^n$  e'  $\text{rot } F=0$  in  $D$ " (dimostrata). La condizione di irrotazionalita' e' necessaria ma non sufficiente affinche'  $F$  (appartenente a  $C^1$ ) sia conservativo in  $D$ ; cfr. Es. 1. La condizione di irrotazionalita' diventa sufficiente quando  $D$  ha opportune proprieta' topologiche.

Firma .....

**n.:** 23     lezione     esercitazione     laboratorio     seminario**Data:** 04/12/2013        **Totale ore:** 1**Argomento:** Ore 10:25-11:10: Seminario del Prof. Luca Solari dal titolo "On the morphodynamic instability of water-ice interface in a brackish lake". sostituito da: Luca Solari (Prof., Dip. Ing. Civile e Ambientale)

Firma .....

**n.:** 24     lezione     esercitazione     laboratorio     seminario**Data:** 10/12/2013        **Totale ore:** 2

**Argomento:** (2 ore) Campi conservativi (continuazione). Un campo di classe  $C^1$ , conservativo in una regione  $D$ , e' ivi irrotazionale. Non vale il viceversa, in generale (cfr. Es. 1 lezione precedente). Vale il viceversa se  $D$  e' semplicemente connesso: definizione di insieme semplicemente connesso, esempi in  $R^2$  e  $R^3$ . Illustrazione del risultato tramite esempi, metodi per la determinazione di un potenziale. Campi localmente conservativi. Integrali doppi ed integrali curvilinei di seconda specie: formule di Green nel piano, Teorema di Gauss-Green (dim. rimandata). Orientazione positiva della frontiera di un dominio semplice. Applicazione: formule per il calcolo di aree di insiemi limitati misurabili.

Firma .....

**n.:** 25     lezione     esercitazione     laboratorio     seminario**Data:** 11/12/2013        **Totale ore:** 3

**Argomento:** (3 ore) Campi vettoriali (continuazione e conclusione). Il Teorema di Gauss-Green (dimostrato nel caso in cui  $D$  e' un dominio semplice rispetto ad entrambi gli assi; sketch della dimostrazione nel caso di domini  $s$ -decomponibili). Applicazione al calcolo di aree di figure piane. Esercizio: si calcola l'area della regione racchiusa dalla curva astroide.

Il linguaggio delle forme differenziali. Forme differenziali, integrali curvilinei di seconda specie, forme differenziali esatte in una regione  $D$ , forme chiuse. Condizioni necessarie e/o sufficienti affinché una forma differenziale sia esatta in  $D$ .

Introduzione alle superfici in forma parametrica: definizione, esempi. Superfici cartesiane. Punti regolari, punti singolari; interpretazione della condizione di regolarità'. Superfici regolari. Esempi.

Firma .....

**n.:** 26     lezione     esercitazione     laboratorio     seminario**Data:** 17/12/2013        **Totale ore:** 2

**Argomento:** (2 ore) Superfici in forma parametrica (continuazione).

Esercizio: rappresentazione della superficie sferica di centro  $(0,0,0)$  e raggio  $R$  mediante i parametri colatitudine e longitudine, verifica della condizione di regolarità'. Linee coordinate su una superficie, interpretazione geometrica della condizione di regolarità', equazione del piano tangente alla superficie, direzione normale.

Introduzione al concetto di area di una superficie: l'utilizzo (per la definizione di area) dell'area (elementare) di superfici poliedrali 'appoggiate' sulla superficie si rivela un procedimento inadeguato, poiché in generale non convergente (cfr. l'esempio di Schwartz, relativo al caso di una porzione di superficie cilindrica). Definizione di elemento di area su una superficie (semplice e regolare) e quindi di area. Integrale di superficie di una funzione continua.

Firma .....

**n.:** 27     lezione     esercitazione     laboratorio     seminario**Data:** 18/12/2013        **Totale ore:** 2

**Argomento:** (1 ora e mezza) Area di una superficie regolare. Approssimazione dell'area di un parallelogramma curvilineo, giustificazione intuitiva dell'espressione dell'elemento di area. Area di una superficie cartesiana.

Superfici orientabili: definizione, esempi. Le superfici cartesiane regolari sono orientabili. Il nastro di Moebius non e' orientabile (costruzione di nastri di Moebius in classe).

Alcune applicazioni degli integrali di superficie: flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie. Esercizio.

L'operatore differenziale "divergenza". Teorema della divergenza (solo enunciato). Alcuni commenti sulla geometria dei domini (3D) ammissibili per il Teorema della divergenza: il caso di domini regolari semplici rispetto ad un asse. (FINE)

Firma .....

---

## RIEPILOGO

<i>lezione</i>	..... n. ore	61
<i>esercitazione</i>	..... n. ore	0
<i>laboratorio</i>	..... n. ore	0
<i>seminario</i>	..... n. ore	1
<hr/>		
<b>TOTALE</b>		<b>62</b>

Firma del docente

.....

copia per la Scuola

Visto: Il Presidente della Scuola

.....

copia per il Dipartimento

Visto: Il Direttore del Dipartimento

.....