UNIVERSITÀ DEGLI STUDI

Registro dell'insegnamento

Anno Accademico 2012/2013

Facoltà Ingegneria

Insegnamento *Analisi Matematica I* (9 CFU)

Settore MAT/05

Corsi di Studio CdS in Ingegneria Civile, Edile e Ambientale (Laurea triennale)

Prof. Francesca Bucci e Marco Spadini

Settore Inquadramento MAT/05 (Analisi Matematica)

N.B.- Ai sensi dell'art.2 della Legge 1-5-1941. n.615, i direttori degli istituti e dei laboratori nei quali si eseguono esperimenti sugli animali dovranno allegare al presente registro delle lezioni anche il registro contenente i dati relativi agli esperimenti di cui sopra.

☒ Lezione ☐ Esercitazione ☐ Laboratorio ☐ Seminario

Data Lun. 17/9/2012 Totale ore 1 ....

Argomento

La prima ora è stata occupata da: presentazione del Referente del CdS, Prof. Gianni Bartoli; spostamento degli studenti in un'altra aula per capienza insufficiente di quella assegnata; censimento in relazione al numero di studenti presenti su richiesta del Referente.

Presentazione del corso: motivazioni, breve descrizione dei temi principali, prerequisiti. Organizzazione ed informazioni pratiche. Testi consigliati.

Nozioni di base. Insiemi, operazioni sugli insiemi.

(Docente: Francesca Bucci)

☐ sostituito da altro docente ☐ in collaborazione con altri docenti

---

☒ Lezione ☐ Esercitazione ☐ Laboratorio ☐ Seminario

Data Gio. 20/9/2012 Totale ore 2 ....

Argomento

Elementi di logica matematica. Connettivi logici, quantificatori; frasi, predicati, proposizioni. L'implicazione. Tabelle di verità.

(Docente: Francesca Bucci)

☐ sostituito da altro docente ☐ in collaborazione con altri docenti

---

☒ Lezione ☐ Esercitazione ☐ Laboratorio ☐ Seminario

Data Ven. 21/9/2012 Totale ore 2 ....

Argomento

Alcuni esempi ed esercizi inerenti ad insiemi e linguaggio delle proposizioni.

Insiemi numerici: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$. *Non esiste alcun numero razionale x tale che $x^2 = 2$* (dimostrato).

(Docente: Francesca Bucci)

☐ sostituito da altro docente ☐ in collaborazione con altri docenti

---

Firma ....

☒ Lezione ☐ Esercitazione ☐ Laboratorio ☐ Seminario

Data Lun. 24/9/2012 Totale ore 2 ....

Argomento

L'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$: operazioni di somma e prodotto e loro proprietà. Ordinamento totale. Intervalli di $\mathbb{R}$, semirette.
Insiemi superioremente (inferiormente) limitati. Maggioranti, estremo superiore, massimo (minoranti, estremo inferiore, minimo, rispettivamente) per un insieme $A \neq \emptyset$. PROPRIETÀ DI COMPLETEZZA. Caratterizzazione dell'estremo superiore (inferiore). *Esempi*.

Radice quadrata di un numero $a > 0$. *Richiami*. Risoluzione dell'equazione $x^2 = a$. L'equazione $ax^2 + bx + c = 0$; completamento del quadrato.

(Docente: Francesca Bucci)

☐ sostituito da altro docente ☐ in collaborazione con altri docenti

---

☒ Lezione ☐ Esercitazione ☐ Laboratorio ☐ Seminario

Data Gio. 27/9/2012 Totale ore 2 ....

Argomento

Definizione di valore assoluto, proprietà del valore assoluto. Disuguaglianza triangolare (dimostrata in due modi diversi). *Esercizi*: disequazioni con il valore assoluto. DISCUSSIONE DI ESERCIZI assegnati, con studenti alla lavagna.

COMPITO PER GLI STUDENTI: studiare: radice n-esima di un numero $a > 0$, definizione di potenza con esponente reale x^α, funzione $\log_a x$.

(Docente: Francesca Bucci)

☐ sostituito da altro docente ☐ in collaborazione con altri docenti

---

☒ Lezione ☐ Esercitazione ☐ Laboratorio ☐ Seminario

Data Ven. 28/9/2012 Totale ore 2 ....

Argomento

Somme finite, simbolo di sommatoria. *Lavoro individuale e in gruppo*: due dimostrazioni *elementari* del fatto che $\sum_{k=1}^n k = n(n+1)/2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. IL PRINCIPIO DI INDUZIONE. Applicazioni: somma dei primi n interi positivi; la *disuguaglianza di Bernoulli*.

(Docente: Francesca Bucci)

☐ sostituito da altro docente ☐ in collaborazione con altri docenti

---

Firma ....

☒ Lezione ☐ Esercitazione ☐ Laboratorio ☐ Seminario

Data Lun. 1/10/2012 Totale ore 2 ....

Argomento

Fattoriali. Il binomio di Newton (dimostrazione della formula tramite il *Principio di induzione*). Coefficienti binomiali: definizione, triangolo di Tartaglia, formula di Pascal.

(*Da completare*)

(Docente: Francesca Bucci)

☐ sostituito da altro docente ☐ in collaborazione con altri docenti

☒ Lezione ☐ Esercitazione ☐ Laboratorio ☐ Seminario

Data Gio. 4/10/2012 Totale ore 2 ....

Argomento

DISCUSSIONE DI ESERCIZI assegnati, con studenti alla lavagna: Determinare $\sup A$ e $\inf A$ se $A = \{z \in \mathbb{R} : z = \frac{xy}{x^2+y^2},\ x, y \in (0,1)\}$.

Introduzione a **Il concetto di funzione**. Esempi tratti da vari contesti. Funzioni iniettive, funzioni suriettive. ESEMPI di funzioni elementari: funzioni lineari, polinomi quadratici, funzione valore assoluto.

(Docente: Francesca Bucci)

☐ sostituito da altro docente ☐ in collaborazione con altri docenti

☒ Lezione ☐ Esercitazione ☐ Laboratorio ☐ Seminario

Data Ven. 5/10/2012 Totale ore 2 ....

Argomento

Funzioni (*continuazione*). Funzioni iniettive, funzioni suriettive. Grafico di una funzione. Esempi di funzioni di variabile reale, a valori reali ($f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$). Operazioni sulle funzioni: composizione di funzioni; *esempi*. Funzioni invertibili, la funzione inversa; grafico della funzione inversa.

Funzioni $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. DEFINIZIONI: funzioni limitate superiormente, funzioni limitate inferiormente, funzioni limitate; funzioni monotòne crescenti (non decrescenti) e decrescenti (non crecenti) in un intervallo. Funzioni *strettamente* monotòne.
Funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: funzioni periodiche, periodo minimo; funzioni pari o dispari. Proprietà di simmetria dei grafici.

COMPITO PER GLI STUDENTI: studiare i grafici delle funzioni elementari e delle eventuali funzioni inverse.

(Docente: Francesca Bucci)

☐ sostituito da altro docente ☐ in collaborazione con altri docenti

☒ Lezione ☐ Esercitazione ☐ Laboratorio ☐ Seminario

Data Lun. 8/10/2012 Totale ore 2 ....

Argomento

Successioni in $\mathbb{R}$: Definizione come restrizione di una funzione a $\mathbb{N}$; successioni come sottoinsiemi di $\mathbb{R}$; notazione; esempi: successioni definite da una formula e definite per ricorrenza (Fibonacci); successioni limitate superiormente e inferiormente; successioni costanti.
Limite di una successione (finito, $+\infty$ e $-\infty$). Esempio: Verifica del limite $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+n} = 0$; verifica del limite $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, per $a_n = 4$ (succ. costante). Rappresentazione grafica. Successioni convergenti, divergenti e indeterminate. Esempio di successione indeterminata. Teorema di unicità del limite (dim.). PROPOSIZIONE: *Se $\{a_n\}$ è convergente allora è limitata* (dim.). Successioni monotòne. Relazione tra monotonia e convergenza.

(Docente: Marco Spadini)

☐ sostituito da altro docente ☐ in collaborazione con altri docenti

☒ Lezione ☐ Esercitazione ☐ Laboratorio ☐ Seminario

Data Gio. 11/10/2012 Totale ore 2 ....

Argomento

Successioni numeriche (*continuazione*). Teorema fondamentale sulle successioni monotòne (con dimostrazione nel caso di successione crescente e limite finito). Somme, prodotti e quozienti di limiti (dimostrazione per il caso della somma). Algebra degli infiniti. Intorni, intorni di $+\infty$ e $-\infty$. La nozione di limite con gli intorni. Teorema del confronto. Nozione di sottosuccessione. *Ogni sottosuccessione di una successione convergente è convergente*. Esempio di un limite che non esiste. Successioni limitate e sottosuccessioni (da proseguire nella lezione successiva).

(Docente: Marco Spadini)

☐ sostituito da altro docente ☐ in collaborazione con altri docenti

☒ Lezione ☐ Esercitazione ☐ Laboratorio ☐ Seminario

Data Ven. 12/10/2012 Totale ore 3 ....

Argomento

Successioni numeriche (*continuazione*). Criterio di Cauchy (dimostrazione dell'implicazione: *"Se a_n è una successione convergente allora essa è di Cauchy"*). Sottosuccessioni convergenti di una successione limitata. Esempi di calcolo di limiti. Successioni del tipo $a_n^{b_n}$. Ancora sull'algebra degli infiniti, forme di indecisione legate alle potenze. Il limite che definisce e. Teorema della permanenza del segno (dim.). Confronti asintotici tra successioni.

(Docente: Marco Spadini)

☐ sostituito da altro docente ☐ in collaborazione con altri docenti

☒ Lezione ☐ Esercitazione ☐ Laboratorio ☐ Seminario

Data Lun. 15/10/2012 Totale ore 2 ....

Argomento

Funzioni continue di variabile reale. Nozione di punto di accumulazione di un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Limiti dei tipi $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$, $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \ell$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$. Limiti destri e sinistri. Intorni di $+\infty$ e $-\infty$, la definizione "unificata" di limite in termini di intorni. Funzioni continue. Limiti e funzioni continue.

Applicazione dei limiti: asintoti orizzontali e verticali.

(Docente: Marco Spadini)

☐ sostituito da altro docente ☐ in collaborazione con altri docenti

☒ Lezione ☐ Esercitazione ☐ Laboratorio ☐ Seminario

Data Gio. 18/10/2012 Totale ore 2 ....

Argomento

Ancora sugli asintoti obliqui. Teorema ponte. Teorema della permanenza del segno (limiti e continuità). Intorni destri e sinistri di un punto, punto di accumulazione (destra e sinistra). Continuità a destra e a sinistra. Punti di discontinuità (eliminabile, salto e II specie). Limiti di funzioni monotone. Teorema del confronto per i limiti di funzioni.

(Docente: Marco Spadini)

☐ sostituito da altro docente ☐ in collaborazione con altri docenti

☒ Lezione ☐ Esercitazione ☐ Laboratorio ☐ Seminario

Data Ven. 19/10/2012 Totale ore 3 ....

Argomento

Confronti asintotici tra funzioni infinitesime e infinite, o piccoli e loro "algebra". Qualche esempio. Una osservazione su punti isolati e continuità. TEOREMA DEGLI ZERI (con dimostrazione), *Corollari*, in particolare: il TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI.

(Docente: Marco Spadini)

☐ sostituito da altro docente ☐ in collaborazione con altri docenti

☒ Lezione ☐ Esercitazione ☐ Laboratorio ☐ Seminario

Data Lun. 22/10/2012 Totale ore 2 ....

Argomento

Alcuni limiti notevoli elementari (dimostrazione solo nel caso del limite $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0$, $\forall\alpha \in \mathbb{R}$, $a > 1$). Derivazione di alcuni limiti da quelli notevoli, in particolare $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ e $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ dedotti da $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
Teorema della funzione composta per i limiti. Applicazione al calcolo di $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x}$. Interpretazione con la notazione di Landau di alcuni di questi limiti; un esempio di applicazione al calcolo di un limite non banale. Ancora sul teorema dei valori intermedi; applicazione: invertibilità e monotonia per funzioni continue su un intervallo. Continuità della funzione inversa. Insiemi compatti. Immagine continua di un compatto (senza dimostrazione). Deduzione (a parole, senza dimostrazione formale) del teorema di Weierstraß.

(Docente: Marco Spadini)

☐ sostituito da altro docente ☐ in collaborazione con altri docenti

☒ Lezione ☐ Esercitazione ☐ Laboratorio ☐ Seminario

Data Gio. 25/10/2012 Totale ore 2 ....

Argomento

La definizione di derivata. Funzione $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile in $x_0 \in (a,b)$. Interpretazione geometrica, equazione della retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$. Funzioni derivabili in un intervallo. Derivate di funzioni elementari: determinazione esplicita della derivata nel caso di funzioni costanti, potenze x^n, $n \geq 1$, funzioni trigonometriche $\sin x$ e $\cos x$, $x \in \mathbb{R}$.
PROPOSIZIONE: *Se $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ è derivabile in $x_0 \in (a,b)$, essa è continua in x_0.*
Per esercizio: provare che la funzione $f(x) = \sqrt{x}$ è derivabile se $x > 0$, con $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

(Docente: Francesca Bucci)

☐ sostituito da altro docente ☐ in collaborazione con altri docenti

☒ Lezione ☐ Esercitazione ☐ Laboratorio ☐ Seminario

Data Ven. 26/10/2012 Totale ore 3 ....

Argomento

Derivate (*continuazione*). Discussione della derivabilità in $x_0 = 0$ delle funzioni $f(x) = \sqrt{|x|}$, $g(x) = |x|$, $h(x) = \sqrt[3]{x}$, $x \in \mathbb{R}$. Cuspidi, punti angolosi, punti a tangente verticale. Illustrazione della cosiddetta *procedura di scoppiamento*.
Il calcolo delle derivate: somma, prodotto, quoziente di funzioni (dimostrata la formula per la derivata del prodotto; quella del quoziente come Corollario della precedente). I polinomi e le funzioni razionali sono funzioni derivabili.

APPLICAZIONE delle derivate: il problema della distanza minima tra una retta ed una curva piana date (costruzione di un canale rettilineo di lunghezza minima).

Derivazione di funzioni composte, la regola della catena (solo enunciato). *Alcuni Esempi*: calcolo delle derivate delle funzioni (i) $F(x) = \sqrt{2x+c}$, c costante, (ii) $H(x) = \sin\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$, ove queste esistono.
Derivata delle funzione inversa (solo enunciato).

(Docente: Francesca Bucci)

☐ sostituito da altro docente ☐ in collaborazione con altri docenti

☒ Lezione ☐ Esercitazione ☐ Laboratorio ☐ Seminario

Data Lun. 29/10/2012 Totale ore 2 ....

Argomento

Derivate (*continuazione*). Derivazione di funzioni composte: regola della catena, notazione di Landau. *Esercizio*: esempio di applicazione della derivazione di funzioni composte.
Derivata della funzione inversa: derivabilità delle funzioni $f(x) = \arcsin x$, $x \in (-1,1)$, $h(x) = \arctan x$, $x \in \mathbb{R}$, con calcolo esplicito delle derivate. Tabella con derivate delle funzioni elementari.

Derivate successive. Funzioni appartenenti a $C^n(I)$, $n = 0, 1, 2, \dots$; funzioni appartenenti a $C^\infty(I)$.

(Docente: Francesca Bucci)

☐ sostituito da altro docente ☐ in collaborazione con altri docenti

☐ Lezione ☐ Esercitazione ☐ Laboratorio ☐ Seminario

Data Gio. 1/11/2012 Totale ore ....

Argomento

Festa Nazionale (Ognissanti)

☐ sostituito da altro docente ☐ in collaborazione con altri docenti

☐ Lezione ☐ Esercitazione ☐ Laboratorio ☐ Seminario

Data Ven. 2/11/2012 Totale ore ....

Argomento

Sospensione attività didattiche, stabilita dall'Ateneo

☐ sostituito da altro docente ☐ in collaborazione con altri docenti

---

☒ Lezione ☐ Esercitazione ☐ Laboratorio ☐ Seminario

Data Lun. 5/11/2012 Totale ore 2 ....

Argomento

Derivate (*continuazione*). Nozione di punto di estremo locale (o relativo). Teorema di Fermat (con dimostrazione), sue applicazioni alla ricerca degli estremi assoluti di una funzione; esempio: immagine dell'intervallo $[-1, 2]$ mediante la funzione $x \mapsto x^2 - x$.
Teorema di Lagrange (con dimostrazione) e suo significato geometrico. Esempi: $f(x) = x^2$ e $f(x) = 1/x$ (divagazione: media aritmetica e geometrica e loro relazione). Teorema di Rolle (dedotto da Lagrange). Funzioni monotone e derivate. Test di monotonia (con dimostrazione). Avvertenze riguardanti la monotonia stretta (esempio $f(x) = x^3$). Funzioni costanti e derivate. Avvertenze riguardanti il caso in cui il dominio non sia un intervallo, esempi grafici elementari e $f(x) = \arctan(x) + \arctan(1/x)$. Test di monotonia e ricerca degli estremi locali (primi cenni).

(Docente: Marco Spadini)

☐ sostituito da altro docente ☐ in collaborazione con altri docenti

---

Firma ....

☒ Lezione ☐ Esercitazione ☐ Laboratorio ☐ Seminario

Data Gio. 8/11/2012 Totale ore 2 ....

Argomento

Alcune conseguenze del teorema di Lagrange, stime sulla funzione (divagazione: definizione di derivata e approssimazione di Taylor al primo ordine), Teorema di Cauchy (con dimostrazione). Implicazione circolare tra i teoremi di Cauchy, Lagrange e Rolle. Ancora una osservazione su monotonia stretta e derivate.

Ricerca di massimi e minimi (locali, forti) mediante lo studio del segno della derivata. Avvertenza sugli estremi in senso debole, l'esempio $f(x) = 2x^2(\sin(1/x))^2$, per $x \neq 0$, e $f(0) = 0$. Teorema di De l'Hôpital (dimostrazione solo nel caso f, g infinitesime e limite per x tendente ad a^+ finito). Discussione ed esempi sul teorema di De l'Hôpital: i limiti $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}$, $\lim_{x\to0} \frac{\cos(3x)-1}{(\sin(4x))^2}$, $\lim_{x\to0} x \ln x$, $\lim_{x\to0^+} x^{\sqrt{x}}$. Osservazione: "La non esistenza di del limite di $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ non implica la non esistenza del limite di $\frac{f(x)}{g(x)}$", esempio $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{x}$. Osservazione: "$f$ e g nel teorema di De l'Hôpital devono essere entrabe infinitesime o entrambe infinite", esempio: $\lim_{x\to1} \frac{2+x}{1+x^2}$. Discussione sulla ricerca del coefficiente angolare di un eventuale asintoto obliquo: $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} f'(x)$ se il teorema di De l'Hôpital è applicabile. Esempio su cosa può andare storto: $f(x) = x + \frac{\sin(x^2)}{x}$ per $x > 0$.

(Docente: Marco Spadini)

☐ sostituito da altro docente ☐ in collaborazione con altri docenti

☒ Lezione ☐ Esercitazione ☐ Laboratorio ☐ Seminario

Data Ven. 9/11/2012 Totale ore 3 ....

Argomento

Esercizi su massimi e minimi. Studio in dettaglio della funzione $f(x) = \arctan\left(\frac{x*1}{x-1}\right)$. Derivate destra e sinistra e la proposizione: "Se $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua e derivabile su (a, b) e inoltre esiste $\lim_{x\to a^+} f'(x) \in \mathbb{R}^*$ (risp. $\lim_{x\to b^-} f'(x) \in \mathbb{R}^*$), allora $f'_+(a) = \lim_{x\to a^+} f'(x)$ (risp. $f'_-(b) = \lim_{x\to b^-} f'(x)$)". Esempio (contrario), la funzione $f(x) = x^2 \sin(1/x)$. Funzioni convesse e concave. Stretta concavità e convessità. Proprietà delle funzioni convesse in relazione a continuità e derivate destre e sinistre. Il grafico della funzione f (se f convessa e derivabile) sta sopra alla retta tangente. Relazione con la derivata seconda. Applicazione alla determinazione della natura locale dei punti critici. Definizione di punto di flesso. Cenno a come si fanno gli studi di funzione.

(Docente: Marco Spadini)

☐ sostituito da altro docente ☐ in collaborazione con altri docenti

Firma ....

☒ Lezione ☐ Esercitazione ☐ Laboratorio ☐ Seminario

Data Lun. 12/11/2012 Totale ore 2 ....

Argomento

Esercizi: un *Problema di massimo*.
Le funzioni iperboliche $\cosh x$, $\sinh x$, $\tanh x$.

(Docente: Francesca Bucci)

☐ sostituito da altro docente ☐ in collaborazione con altri docenti

☒ Lezione ☐ Esercitazione ☐ Laboratorio ☐ Seminario

Data Gio. 15/11/2012 Totale ore 2 ....

Argomento

Esercizi: studi di funzione. Studio della *funzione di Langevin*.

(Docente: Francesca Bucci)

☐ sostituito da altro docente ☐ in collaborazione con altri docenti

☐ Lezione ☒ Esercitazione ☐ Laboratorio ☐ Seminario

Data Ven. 16/11/2012 Totale ore 3 ....

Argomento

dalle ore 10:18 alle ore 12:48: *Prova intercorso* (riservata a studenti con OFA assolti), sul programma relativo alle prime otto settimane del corso.

☐ sostituito da altro docente ☒ in collaborazione con altri docenti

☒ Lezione ☐ Esercitazione ☐ Laboratorio ☐ Seminario

Data Lun. 19/11/2012 Totale ore 2 ....

Argomento

Calcolo differenziale ed approssimazioni. Derivabilità di una funzione f in un punto x_0 ed approssimazione lineare. Limiti notevoli e sviluppi. Polinomi di Taylor. Formula di Taylor (Mc Laurin) con resto di Peano (*dimostrata*, per induzione). Polinomi di Mc Laurin delle funzioni e^x, $\sin x$, $\cos x$.

(Docente: Francesca Bucci)

☐ sostituito da altro docente ☐ in collaborazione con altri docenti

Firma ....

☒ Lezione ☐ Esercitazione ☐ Laboratorio ☐ Seminario

Data Gio. 22/11/2012 Totale ore 2 ....

Argomento

APPLICAZIONE della proprietà di convessità (concavità) di una funzione al fine di provare *stime*. *Esercizio*: si prova che $\cos x \geq 1 - x^2/2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
Per casa: provare che

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \qquad \forall x \geq 0\,.$$

Formula di Taylor (*continuazione*). APPLICAZIONE della formula di Taylor con resto di Peano nel calcolo di limiti.
Esercizio: si calcola l'ordine di infinitesimo della funzione $\sin^2 x - x^2$, per $x \to 0$, rispetto all'infinitesimo campione x.
Formula di Taylor con resto di Lagrange (*senza dim.*). APPLICAZIONE della formula di Taylor con resto di Lagrange per il calcolo di valori approssimati di numeri irrazionali.
Esercizio: calcolo di un'approssimazione del numero di Nepero e con un errore inferiore a 10^{-2}.

(Docente: Francesca Bucci)

☐ sostituito da altro docente ☐ in collaborazione con altri docenti

☐ Lezione ☒ Esercitazione ☐ Laboratorio ☐ Seminario

Data Ven. 23/11/2012 Totale ore 1,5 ....

Argomento

Attività relativa alla Prova intercorso del 16 Novembre 2012:
Restituzione degli elaborati, chiarimenti e commenti individuali e collettivi sullo svolgimento, discussione dei principali errori (o lacune).

(Docente: Francesca Bucci)

☐ sostituito da altro docente ☐ in collaborazione con altri docenti

Firma ....

☒ Lezione ☐ Esercitazione ☐ Laboratorio ☐ Seminario

Data Ven. 23/11/2012 Totale ore 2 ....

Argomento

Introduzione all'integrale (secondo Riemann). *Motivazioni storiche*: calcolo dell'area di figure piane, della lunghezza di curve piane. Il *metodo di esaustione* di Eudosso per il calcolo dell'area del cerchio. Area del segmento di parabola. Funzioni $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *limitate*: somme di Cauchy-Riemann, definizione di funzione integrabile in $[a, b]$, valore dell'integrale. L'origine del simbolo $\int_a^b f(x)\,dx$.

Classi di funzioni integrabili (*senza dim.*) (i) f continua in $[a, b]$; (ii) f (limitata e) monotòna in $[a, b]$; (iii) f continua in $[a, b]$ ad eccezione che in un numero *finito* di punti x_i, ove le discontinuità sono di prima specie.
Un ESEMPIO di funzione non integrabile: la funzione di Dirichlet.

(Docente: Francesca Bucci)

☐ sostituito da altro docente ☐ in collaborazione con altri docenti

☒ Lezione ☐ Esercitazione ☐ Laboratorio ☐ Seminario

Data Lun. 26/11/2012 Totale ore 2 ....

Argomento

Funzioni integrabili secondo Riemann (*continuazione*). Proprietà dell'integrale: *linearità*, positività, *monotonia*, additività (rispetto all'insieme di integrazione). Integrale di una funzione costante in un intervallo. Il TEOREMA DELLA MEDIA (con *dimostrazione*).

Definizione di *primitiva* di una funzione $f : I \to \mathbb{R}$.

(Docente: Francesca Bucci)

☐ sostituito da altro docente ☐ in collaborazione con altri docenti

☒ Lezione ☐ Esercitazione ☐ Laboratorio ☐ Seminario

Data Gio. 29/11/2012 Totale ore 2 ....

Argomento

Proprietà dell'integrale (*continuazione*). Definizione di *parte positiva* f_+ e *parte negativa* f_- di una funzione: *Se f è integrabile (secondo Riemann) in (a, b), allora f_+, f_- e $|f|$ sono integrabili in (a, b) e si ha* $|\int_a^b f(x)\,dx| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$.

La *funzioni integrale* $F(x) = \int_a^b f(t)\,dt$, $x \in [a, b]$. Il TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE (con *dimostrazione*).

(Docente: Francesca Bucci)

☐ sostituito da altro docente ☐ in collaborazione con altri docenti

☒ Lezione ☐ Esercitazione ☐ Laboratorio ☐ Seminario

Data Ven. 30/11/2012 Totale ore 3 ....

Argomento

Primitive. Osservazioni a margine del Teorema fondamentale del calcolo integrale. (i) Una funzione f continua in $[a,b]\setminus\{x_0\}$ che presenta una discontinuità di prima specie in $x_0 \in (a,b)$ non può ammettere una primitiva in un intorno di x_0.
(ii) Calcolo della funzione integrale $F(x) := \int_0^x f(t)\,dt$, con $f(x) = sgn(x)$, $x \in \mathbb{R}$; $F(x) = |x|$ non è derivabile in $x_0 = 0$. *Non si identifichino primitive e funzioni integrali*: nel caso precedente, la funzione (integrale) $x \mapsto F(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, pur non essendo una primitiva di f in un intorno di 0.

Struttura delle primitive, integrali *indefiniti*. Integrali indefiniti delle funzioni elementari. *Metodi di integrazione*: integrazione per parti. Numerosi ESEMPI.

ESERCIZI: discussione con uno studente alla lavagna: sviluppi di Taylor e calcolo di limiti.

(Docente: Francesca Bucci)

☐ sostituito da altro docente ☐ in collaborazione con altri docenti

---

☒ Lezione ☐ Esercitazione ☐ Laboratorio ☐ Seminario

Data Lun. 3/12/2012 Totale ore 2 ....

Argomento

Metodi di integrazione (*continuazione*). Integrazione per sostituzione. ESEMPI ed ESERCIZI. Sostituzioni *ad hoc* per il calcolo di $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})\,dx$, $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})\,dx$, $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2})\,dx$.

(Docente: Marco Spadini)

☐ sostituito da altro docente ☐ in collaborazione con altri docenti

---

☒ Lezione ☐ Esercitazione ☐ Laboratorio ☐ Seminario

Data Gio. 6/12/2012 Totale ore 2 ....

Argomento

Integrali di funzioni con proprietà di simmetria (pari o dispari) su intervalli simmetrici rispetto all'origine.
Metodi di integrazione (*continuazione*). Integrazione di funzioni razionali $\int \frac{A(x)}{B(x)}\,dx$. La divisione tra polinomi consente di ricondursi al caso in cui il grado di $A(x)$ è inferiore a quello di $B(x)$. $B(x)$ è un polinomio di secondo grado: discussione dettagliata dei casi: (i) $B(x)$ ha due radici reali e distinte; (ii) $B(x)$ ha una radice reale, di molteplicità due; $B(x)$ è irriducibile.
Esempi.

(Docente: Francesca Bucci)

☐ sostituito da altro docente ☐ in collaborazione con altri docenti

☒ Lezione ☐ Esercitazione ☐ Laboratorio ☐ Seminario

Data Ven. 7/12/2012 Totale ore 3 ....

Argomento

Metodi di integrazione, applicazioni degli integrali (*continuazione*).
Calcolo di $\int \cos^2 x\, dx$ (esplicito); $\int \sin^2 x\, dx$ (lasciato *per esercizio*). Si ricava la formula ricorsiva per $I_n(x) := \int (\cos x)^n\, dx$, $n \geq 2$; quella per $\int (\sin x)^n\, dx$ è lasciata per esercizio. Successioni *definite per ricorrenza*.

APPLICAZIONE degli integrali al calcolo di aree. *Esercizio*: determinare l'area della regione piana racchiusa dall'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Integrazione di $R(\cos x, \sin x)$, ove $R(z, w)$ è una funzione razionale in z, w. *Esercizio*: determinare $\int \frac{1}{2+\cos x}\, dx$. Si utilizza la sostituzione speciale $x = 2 \arctan t$ ($t = \tan \frac{x}{2}$).

Le funzioni inverse delle funzioni iperboliche. La funzione *settore seno iperbolico* $\sinh^{-1}(x)$: si deriva esplicitamente la sua espressione; quella di $\cosh^{-1} x$ è lasciata per esercizio.

L'integrale in senso generalizzato. Il caso di funzione $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ *non limitata* in un intorno (destro) di a. DEFINIZIONE: Sia f una funzione definita in $(a, b]$ a valori in $\mathbb{R}$ tale che, per ogni $c \in (a, b)$, esista l'integrale $\Phi(c) = \int_c^b f(x)\, dx$ ed esista finito il limite

$$\lim_{c \to a^+} \Phi(c)\,.$$

Allora si dice che f è integrabile in senso generalizzato nell'intervallo (a, b) e si pone

$$\int_a^b f(t)\, dt := \lim_{c \to a^+} \Phi(c)\,.$$

Un ESEMPIO (di interesse intrinseco e anche *cruciale in seguito*): si prova che $f(x) = x^{-\alpha}$, con $\alpha > 0$, è integrabile in senso generalizzato in $(0, 1)$ *se e solo se* $0 < \alpha < 1$.

DISCUSSIONE alla lavagna, intorno alla questione: *La funzione $f(x) = \sin(x^2)$ è periodica?*
Si mostra che la funzione $h(x) = (\sin x)^2$ è periodica di periodo $T = \pi$.

(Docente: Francesca Bucci)

☐ sostituito da altro docente ☐ in collaborazione con altri docenti

Firma ....

☒ Lezione ☐ Esercitazione ☐ Laboratorio ☐ Seminario

Data Lun. 10/12/2012 Totale ore 2 ....

Argomento

L'integrale in senso generalizzato (*continuazione*). Il caso in cui l'insieme di integrazione *non è limitato*: si considera $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$.

DEFINIZIONE: Sia f una funzione definita in $[a, +\infty)$ a valori in $\mathbb{R}$ tale che, per ogni $c > a$, esista l'integrale $F(c) = \int_a^c f(x)\,dx$ ed esista finito il limite

$$\lim_{c\to+\infty} F(c)\,.$$

Allora si dice che f è integrabile in senso generalizzato in $[a, +\infty)$ e si pone

$$\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{c\to+\infty} F(c)\,.$$

Esempio: si prova che $f(x) = x^{-\alpha}$ è integrabile in senso generalizzato in $[1, +\infty)$ *se e solo se* $\alpha > 1$.

Criteri di integrabilità (in senso generalizzato):

CRITERIO DEL CONFRONTO per funzioni non negative. Il caso di funzioni di segno variabile: funzioni *assolutamente integrabili*. Integrabilità della funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\frac{1}{x}$ in $(0, +\infty)$.

Confronto asintotico: integrabilità della funzione $f(t) = e^{-t^2}$ in $[0, \infty)$.

Esercizi:

1. Si discuta l'integrabilità della funzione $(x^2 - 5x + 6)^{-1}$ in un intorno di $x_0 = 2$.
2. Disegnare il grafico della funzione $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$, $x \in \mathbb{R}$.
3. Si provi la convergenza dell'integrale $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$. (Si osservi che $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ è limitata in un intorno di 0; è comunque conveniente analizzare separatamente $\int_0^1 f(x)\,dx$ e $\int_1^\infty f(x)\,dx$).
4. Si consideri *l'integrale di Fresnel* $\int_0^\infty \sin(x^2)\,dx$: se ne provi la convergenza utilizzando, per $x \geq 1$, la sostituzione $x^2 = t$.

(Docente: Francesca Bucci)

☐ sostituito da altro docente ☐ in collaborazione con altri docenti

☒ Lezione ☐ Esercitazione ☐ Laboratorio ☐ Seminario

Data Gio. 13/12/2012 Totale ore 2 ....

Argomento

Serie numeriche. Nozioni di serie convergente, divergente e indeterminata. Definizione di somma di una serie convergente. Somme parziali di serie telescopiche. La serie $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ per $|q| < 1$, per $q = 1$ e $q = -1$. La serie di Mengoli $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$. TEOREMA: *Se* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *converge, allora* $a_k \to 0$ *per* $k \to \infty$. Conseguenze. *Osservazione*: il carattere di una serie dipende solo dalla sua 'coda'. Le serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ e $\sum_{k=0}^{\infty} ca_k$, per $c \neq 0$, hanno lo stesso carattere. Serie a termini di segno costante, monotonia della successione delle somme parziali e sue conseguenze: le serie a segno costante non possono essere indeterminate. *Teorema del confronto*. *Applicazione*: la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge (si confronta $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2}$ con la serie di Mengoli).
Teorema del confronto asintotico (senza dimostrazione), applicazione alla serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

(Docente: Marco Spadini)

☐ sostituito da altro docente ☐ in collaborazione con altri docenti

☒ Lezione ☐ Esercitazione ☐ Laboratorio ☐ Seminario

Data Ven. 14/12/2012 Totale ore 3 ....

Argomento

Serie numeriche (*continuazione*). *Criteri della radice e del rapporto* per la convergenza di serie numeriche (senza dimostrazione). Relazione tra i due criteri ed esempi semplici. Confronto tra serie ed integrali impropri, stima sulla somma della serie (interpretazione grafica). Applicazione alle serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ e $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$.

Esercizi per casa: $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^2}$, $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2\ln(n)}$ e $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\ln(n^2)}$.

Serie a termini di segno qualunque.
TEOREMA (senza dimostrazione): *Se* $\sum^{+\infty} |a_n|$ *è convergente, allora* $\sum^{+\infty} a_n$ *lo è*. Semplici esempi e controesempi relativi. *Esercizo* in classe: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(3/2\pi n)}{n^2}$.
Criterio di Leibniz per le serie a termini di segno alterno (senza dimostrazione) e alcuni esempi relativi. *Esercizo* in classe: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n}$.
Somma di serie convergenti e non, casistica; esempi di applicazioni: la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1+(-1)^n n^2}{n^3}$ converge, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{n}\right)$ diverge. Osservazione sull'espressione "somma infinita": brevissimi cenni al riordinamento delle serie non assolutamente convergenti. Le serie della forma $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ con x parametro reale; convergenza (assoluta) per $|x| < \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

(Docente: Marco Spadini)

☐ sostituito da altro docente ☐ in collaborazione con altri docenti

☒ Lezione ☐ Esercitazione ☐ Laboratorio ☐ Seminario

Data Lun. 17/12/2012 Totale ore 2 ....

Argomento

Introduzione alle **Equazioni Differenziali Ordinarie**. *Primi esempi*: caduta di un grave, derivazione dell'equazione che descrive il moto. *Generalità*: che cos'è un'Equazione Differenziale Ordinaria (EDO), *ordine* dell'equazione. Definizione di *soluzione* di un'EDO. Equazioni in forma *normale*. EDO *lineari*, EDO non lineari.
EDO LINEARI DEL PRIMO ORDINE a coefficienti continui: l'equazione $x' = a(t)x + f(t)$, con a e f funzioni continue in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$. Derivazione della formula (esplicita) che fornisce l'*integrale generale* dell'equazione (*da memorizzare*). ESEMPIO: risoluzione dell'equazione $x' = tx + t$.
Il Problema di Cauchy: esistenza di un'unica soluzione, sua espressione esplicita.

(Docente: Francesca Bucci)

☐ sostituito da altro docente ☐ in collaborazione con altri docenti

☒ Lezione ☐ Esercitazione ☐ Laboratorio ☐ Seminario

Data Gio. 20/12/2012 Totale ore 2 ....

Argomento

Equazioni Differenziali Ordinarie (*continuazione*). *Richiami* dalla lezione precedente su equazioni lineari del primo ordine. EDO lineari *vs* EDO non lineari: alcuni ESEMPI. *Esercizio*: risoluzione di $tx' = x - 1$, e *verifica* del fatto che le funzioni ottenute $x = x(t)$, nel caso $t > 0$, siano effettivamente soluzioni dell'EDO.
Derivazione dell'equazione dell'oscillatore armonico. EDO *lineari* di ordine $n \geq 2$: generalità (definizione di soluzione, equazioni in forma normale, ecc.), equazione *omogenea* associata, equazione *completa*. TEOREMA sulla *struttura dell'integrale generale* dell'equazione completa (con dimostrazione); principio di sovrapposizione.

(Docente: Francesca Bucci)

☐ sostituito da altro docente ☐ in collaborazione con altri docenti

☒ Lezione ☐ Esercitazione ☐ Laboratorio ☐ Seminario

Data Gio. 20/12/2012 Totale ore 2 ....

Argomento

ESERCITAZIONE su serie numeriche. *Problema in classe*: Determinare per quale valore del parametro λ la seguente serie converge: $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)^n$.
Problema in classe: Determinare per quale valore del parametro x la seguente serie converge: $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\ln(x)\right)^n$ (svolto in due modi).
Esercizio per casa: Determinare per quale valore del parametro x la seguente serie converge: $\sum_{n=0}^{\infty} e^{nx}$. Interpretazione di questi esercizi in termini del dominio della funzione definita dalla serie.

Esercitazione su funzioni integrali: le funzioni $x \mapsto \int_0^{\cos(x)} \arcsin(t)dt$ e $x \mapsto \int_{x(4-x)}^{1} \arcsin(t)dt$ (dominio e derivata). Qualche osservazione sulla funzione $x \mapsto \int_1^x \frac{1}{t}dt$ a confronto con $\int \frac{1}{t}dt$.

(Docente: Marco Spadini)

☐ sostituito da altro docente ☐ in collaborazione con altri docenti

☒ Lezione ☐ Esercitazione ☐ Laboratorio ☐ Seminario

Data Ven. 21/12/2012 Totale ore 2 ....

Argomento

Equazioni Differenziali Ordinarie (*continuazione*). EDO lineari omogenee di ordine n, con coefficienti continui. *Lo spazio delle soluzioni è uno spazio vettoriale di dimensione n* (*senza dim.*).
Metodo per la risoluzione di EDO lineari omogenee *a coefficienti costanti*. Analisi del caso di ordine 2: decomposizione dell'operatore differenziale, *equazione caratteristica*. Disamina dei casi in cui il polinomio caratteristico ha (i) due radici *reali* semplici, (ii) una radice reale di molteplicità due, due radici *complesse* (coniugate); soluzioni *linearmente indipendenti* corrispondenti. La formula di Eulero: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, $x \in \mathbb{R}$. *Esempi.*

SUGGERIMENTI su come completare la preparazione sulle EDO:

- **EDO lineari di ordine n: l'equazione completa**. Metodi per la ricerca di una soluzione dell'equazione completa: il metodo di variazione delle costanti, il metodo di somiglianza, il principio di Duhamel.
- **EDO del primo ordine non lineari**. *Un esempio paradigmatico*: il modello di Verhulst (o equazione logistica) per la descrizione della crescita di una popolazione. EDO a variabili separabili: $y' = h(x)g(y)$. Metodo per la determinazione dell'integrale generale: soluzioni stazionarie, altre soluzioni (descritte eventualmente *in forma implicita*).

(Docente: Francesca Bucci)

☐ sostituito da altro docente ☐ in collaborazione con altri docenti

RIEPILOGO