Complementi di Analisi Matematica (AMS) – A.A. 2006/2007

L'equazione di Laplace (1 Dicembre 2006)

1. Risolvere il problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson $u_{xx}+u_{yy} = 1$ sul disco $\Omega = \{ (x,y) : \ x^2 + y^2 < b^2 \}$, $b > 0$, con $u \equiv 0$ su $\partial\Omega = \{ (x,y) : \ x^2 + y^2 = b^2 \}$ (cercare soluzioni *di tipo radiale*).

2. Risolvere il problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson $u_{xx}+u_{yy} = 1$ sulla corona circolare $\Omega = \{ (x,y) : \ 0 < a < \sqrt{x^2+y^2} < b \}$, con condizioni al bordo omogeee (cercare soluzioni *di tipo radiale*).
Soluzione: Ponendo $u(x,y) =: v(r)$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$, si ottiene
$$v(r) = \frac{1}{4}(r^2 - a^2) - \frac{b^2 - a^2}{4(\log b - \log a)} \log \frac{r}{a} \, .$$

3. Provare l'unicità per il problema di Dirichlet
$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$
usando *il metodo dell'energia*.
Suggerimento: Come di consueto, si considerino due soluzioni u_1 e u_2, si definisca $w = u_1 - u_2$ e si verifichi che w soddisfa un problema omogeneo per l'equazione di Laplace. Il metodo dell'energia consiste nel moltiplicare tale equazione per w ed integrare per parti, utilizzando la formula
$$v\Delta u = div(v\nabla u) - \nabla v \cdot \nabla u \, ;$$
è poi necessario applicare il Teorema della divergenza.

4. Determinare la funzione $u(x,y)$ armonica nel quadrato $\Omega = (0,\pi) \times (0,\pi)$ che soddisfa $u(0,y) = 0$, $u_y(x,0) = 0 = u_y(x,\pi)$, $u(\pi,y) = \cos^2 y$.
Suggerimento: è utile ricordare che $\cos^2 y = [1 + \cos(2y)]/2$.
Soluzione:
$$u(x,y) = \frac{1}{2}\Big[\, \frac{x}{\pi} + \frac{\sinh(2x)}{\sinh(2\pi)} \cos(2y) \Big] \, .$$

5. Determinare la funzione u armonica nel quadrato $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ che soddisfa $u(x,0) = x$, $u(x,1) = 0$, $u_x(0,y) = 0$, $u_x(1,y) = y^2$.

6. Una piastra D a forma di corona circolare con raggio interno pari ad a e raggio esterno pari a b è tenuta a temperatura $(u(x,y))$ B su $r = b$, e soddisfa inoltre la condizione al bordo $\frac{\partial u}{\partial r} = A$ su $r = a$, con A, B costanti. Determinare la temperatura sulla piastra, supponendo che essa abbia raggiunto uno stato stazionario.
   Suggerimento: La temperatura soddisfa l'equazione di Laplace in D e dipende solo da r.

7. Discutere il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace sulla regione *esterna* ad un disco. Più precisamente, determinare la funzione $u(x,y)$ tale che

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{per } x^2 + y^2 > a^2 \\ u = f(\theta) & \text{per } x^2 + y^2 = a^2\,, \\ u \text{ limitata} & \text{per } x^2 + y^2 \to +\infty. \end{cases}$$