Complementi di Analisi Matematica (AMS) – A.A. 2006/2007

Successioni e serie di funzioni, serie di Fourier (30 Novembre 2006)

1. Calcolare il limite $f(x)$ della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{nx}{(1+nx)(x^2+1)}\,, \qquad x \geq 0\,,$$

e discutere la convergenza uniforme di f_n a f (in $\mathbb{R}_+$, o eventualmente in sottoinsiemi di $\mathbb{R}_+$).

2. Calcolare il limite $f(x)$ della successione di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & x < -\frac{1}{n} \\ \frac{n^3}{8}\left(x + \frac{1}{n}\right)^3 & -\frac{1}{n} \leq x < \frac{1}{n} \\ 1 & x \geq \frac{1}{n}\,, \end{cases}$$

e stabilire se f_n converge uniformemente a f in $\mathbb{R}$, o eventualmente in $[a, 2]$, $a > 0$.

3. Stabilire se l'applicazione $(x, y, z) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2} + |z|$ è una norma in $\mathbb{R}^3$, e in caso affermativo disegnare la palla unitaria.

4. Determinare l'insieme di convergenza E delle serie che seguono, e dire in quali sottoinsiemi di E c'è convergenza totale:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^x x^n\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^4 + x^2}\,.$$

5. Calcolare la somma della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n\,,$$

utlizzando lo sviluppo

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n\,, \qquad x \in (-1, 1)$$

(si derivi per serie due volte).

6. Determinare l'insieme di convergenza E delle serie (riconducibili a serie di potenze)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x+2}{x^2+1}\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^{2n+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+4}e^{nx}.$$

7. Scrivere le serie di Fourier delle funzioni che seguono e discuterne la convergenza (puntuale ed uniforme):

   (a) la funzione periodica (di periodo $2L$) che coincide con la funzione

   $$f(x) = \begin{cases} -1 & -L \le x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & 0 < x < L \end{cases}$$

   in $[-L, L)$;

   (b) la funzione periodica (di periodo 2π) che coincide con $f(x) = |x|$ in $[-\pi, \pi)$;

   (c) la funzione periodica (di periodo 2π) che coincide con x^2 in $[-\pi, \pi)$; in questo caso dedurre inoltre dallo sviluppo corrispondente la somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$;

   (d) la funzione periodica (di periodo 2π) che coincide con e^x in $[-\pi, \pi)$ (*Suggerimento*: in questo caso è conveniente calcolare i coefficienti di Fourier complessi).

8. Si ricorda che per la funzione f periodica (di periodo 2π) dispari che coincide con $x(\pi - x)$ in $[0, \pi)$ si è ottenuto (in classe) lo sviluppo in serie di Fourier

   $$f(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3}.$$

   Scrivere l'identità di Parseval e dedurre da questa la somma della serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}$.