Complementi di Analisi Matematica (AMS) – A.A. 2006/2007

L'equazione delle onde – II (31 ottobre 2006)

1. Risolvere

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} & 0 < x < \infty\,,\ t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = 1\,,\ u_t(x,0) = 0 & 0 < x < \infty \\ u(0,t) = 0 & t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

utilizzando il metodo della riflessione. La soluzione corrispondente presenta delle singolarità: localizzarle.

2. Provare che se i dati iniziali ϕ e ψ sono funzioni pari, la soluzione $u(x,t)$ dell'equazione delle onde data dalla formula di d'Alembert è anch'essa una funzione (di x) pari, per ogni t.

3. Risolvere il problema di Neumman per l'equazione delle onde $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ sulla semiretta, cioè

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & 0 < x < \infty\,,\ t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = \phi(x)\,,\ u_t(x,0) = \psi(x) & 0 < x < \infty \\ u_x(0,t) = 0 & t \in \mathbb{R}\,. \end{cases}$$

Suggerimento: nell'introdurre le estensioni di ϕ e ψ su tutto $\mathbb{R}$ si tenga conto che in questo caso è conveniente fare in modo che la soluzione $\tilde{u}(x,t)$ del problema ausiliario (su tutta la retta) sia una funzione *pari* (in x) per ogni t. Si osservi infatti che in tal modo la derivata $\tilde{u}_x(x,t)$ risulterà una funzione dispari, e la condizione al bordo $\tilde{u}_x(0,t) = 0$ sarà soddisfatta automaticamente. Pertanto, in questo caso, le estensioni naturali dei dati iniziali non sono funzioni dispari, a differenza che nel caso di condizione al bordo di Dirichlet.

4. Risolvere il problema di Neumann per l'equazione della corda vibrante (finita)

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & 0 < x < L\,,\ t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x)\,,\ u_t(x,0) = \psi(x) & 0 < x < L \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0 & t \geq 0\,, \end{cases} \tag{1}$$

utilizzando il metodo di separazione delle variabili. La soluzione sarà unica?

Osservazioni: (i) Anche in questo caso—nella ricerca di una soluzione della forma $u(x,t) = X(x)T(t)$—risulta cruciale l'analisi di un problema agli autovalori, e precisamente del problema

$$-X'' = \lambda X\,, \quad X'(0) = X'(L) = 0\,.$$

Determinare gli autovalori λ_n (osservando attentamente che in questo caso $\lambda = 0$ è un autovalore, a differenza che nel caso del problema di Dirichlet) e le corrispondenti autofunzioni.
(ii) Dedurre l'espressione di $u(x,t)$, (candidata) soluzione del problema (1), determinando i coefficienti che vi appaiono (seguendo la notazione usata in classe, A_n e B_n) dall'aver imposto le condizioni iniziali.

5. Usare la regola del parallelogramma per risolvere il problema precedente con $L = \pi$, $\varphi(x) = x$, $\psi(x) = 0$. La soluzione risultante è unica? È continua? È C^1?