Complementi di Analisi Matematica (AMS) – A.A. 2006/2007

L'equazione delle onde - I (19 ottobre 2006)

1. (*Integrali dipendenti da un parametro*)

   (a) Calcolare il limite

   $$\lim_{y\to 0}\int_{-1}^{1}\frac{e^{x^2y}}{x^2+y^2+1}\,dx\,,$$

   motivando il risultato.

   (b) Stabilire se le funzioni $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $\Phi:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ definite da

   $$F(t)=\int_{\sin t}^{\cos t}(x^2+t^2)\,dx\,,\qquad \Phi(t)=\int_{1}^{\sqrt{t}}\frac{e^{-xt}}{x}\,dx$$

   sono derivabili, e in caso positivo calcolarne la derivata prima.

2. Provare che l'equazione delle onde ha le seguenti proprietà di invarianza. Sia $u(x,t)$ una soluzione di $u_{tt}-c^2u_{xx}=0$: allora

   (a) ogni traslata $u(x-y,t)$, con y fissato, è soluzione della stessa equazione;

   (b) le derivate u_x e u_t sono anch'esse soluzioni;

   (c) $u(ax,at)$, $a>0$, è soluzione.

3. Risolvere $u_{tt}=c^2u_{xx}$ per $x\in\mathbb{R}$ e $t>0$, con le condizioni iniziali $u(x,0)=x^3$ e $u_t(x,0)=\cos x$.

4. Provare che se i dati iniziali ϕ e ψ sono funzioni dispari, la soluzione $u(x,t)$ dell'equazione delle onde (data dalla formula di d'Alembert) è anch'essa una funzione (di x) dispari per ogni t.

5. Si consideri l'equazione delle onde *smorzate*

   $$u_{tt}-c^2u_{xx}+du_t=0\,,$$

   con $d>0$ costante. Provare che l'energia $E(t)$ è decrescente.
   (Usare lo stesso metodo utilizzato per dimostrare la conservazione dell'energia per l'equazione delle onde).

6. Si consideri l'equazione

$$u_{tt} + 2du_t - u_{xx} + d^2 u = 0\,, \quad x, t \in \mathbb{R}\,, \tag{1}$$

con condizioni iniziali

$$u(x,0) = f(x)\,, \quad u_t(x,0) = g(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{2}$$

   (a) Sia $v(x,t) = e^{dt} u(x,t)$. Verificare che se u è una soluzione classica di (1), allora v soddisfa $v_{tt} - v_{xx} = 0$. Dedurre da (2) le condizioni iniziali per v.

   (b) Risolvere l'equazione per v utilizzando la formula di d'Alembert, e calcolare $u(x,t) = e^{-dt}\, v(x,t)$, cioè la soluzione del problema (1)-(2).

   (c) Provare che se

$$\sup_{\mathbb{R}} |f|\,, \quad \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,\mathrm{d}x\,, \quad \int_{\mathbb{R}} |g(x)|\,\mathrm{d}x$$

   sono finiti, allora $|u(x,t)| \le C\, e^{-dt}$, dove C è una costante determinata dai dati iniziali f, g.

7. Risolvere l'equazione non omogenea $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 2t$ per $x \in \mathbb{R}$ con le condizioni ausiliarie $u(x,0) = x^2$ e $u_t(x,0) = 1$.

8. Provare per sostituzione diretta che

$$u(x,t) = \begin{cases} h(t - \frac{x}{c}) & \text{se } x < ct \\ 0 & \text{se } x \ge ct \end{cases}$$

   risolve l'equazione delle onde sulla semiretta $0 < x < \infty$ con condizioni iniziali omogenee e condizione al bordo (di tipo Dirichlet) $u(0,t) = h(t)$.