Complementi di Analisi Matematica (AMS) – A.A. 2006/2007

Generalità ed Equazioni del primo ordine (4 ottobre 2006)

1. Quale dei seguenti operatori differenziali è lineare?

   (a) $Lu = u_x + xu_y$

   (b) $Lu = u_x + uu_y$

   (c) $Lu = u_x^2 + u_y$

   (d) $Lu = u_x + u_y + 1$

   (e) $Lu = \sqrt{1+x^2}\cos y\, u_x + u_{yy} - \arctan(x/y)u$

2. Per ciascuna delle seguenti EDP stabilire l'ordine e se è un'equazione lineare omogenea, lineare non omogenea, semi-lineare, quasi-lineare o completamente non lineare (motivando le risposte).

   (a) $u_t + uu_x = 0$

   (b) $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$

   (c) $u_t - xu_x + (\sin x)u = 0$

   (d) $u_{tt} - u_{xxxx} + \sqrt{1+u^2} = 0$

   (e) $u_t + u_{xx} + 1 = 0$

   (f) $u_t + \mathrm{d}iv\,\mathbf{F}(u) = 0\,.$

3. Verificare che se f e g sono funzioni di classe C^1 la funzione $u(x,y) = f(x)g(y)$ risolve l'equazione $uu_{xy} = u_x u_y$.

4. Si consideri la funzione $u(x,t) = t^\alpha v(z)$, con $z = t^{-\beta}x$, $t > 0$, ove α e β sono parametri. Supponendo che la funzione v sia di classe C^2, esprimere le derivate parziali u_x, u_t e u_{xx} in termini (di t, z e) delle derivate di v. Provare dunque che l'equazione di diffusione

$$u_t = u_{xx}\,, \qquad (x,t) \in \mathbb{R}\times(0,\infty)$$

   è equivalente ad un'equazione che non dipende da t se e solo se $\beta = 1/2$.

5. Risolvere l'equazione $2u_t + 3u_x = 0$ con la condizione ausiliaria $u = \sin x$ per $t = 0$.

6. Risolvere l'equazione lineare $u_x + 2xy^2 u_y = 0$. Disegnare alcune curve caratteristiche.

7. Determinare la soluzione del problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} xu_x(x,y) + u_y(x,y) = y\,, \\ u(x,0) = x^2\,, \end{cases} \tag{1}$$

   precisandone il dominio di esistenza.
   Osservazioni utili. Si noti che l'equazione a derivate parziali (EDP) in (1) è un'equazione *lineare* non omogenea. Si suggerisce di utilizzare il principio di sovrapposizione. Alternativamente, il problema può essere risolto come nel caso semi-lineare, risolvendo il sistema caratteristico. In particolare, la condizione iniziale richiede che la superficie integrale dell'EDP contenga la curva Γ di rappresentazione parametrica $(s, 0, s^2)$.

8. Determinare la soluzione del problema

$$\begin{cases} u_x(x,y) + 2u_y(x,y) = u^2\,, \\ u(x,0) = h(x)\,. \end{cases}$$