Università degli Studi di Firenze
Anno Accademico 2006/2007
Ingegneria per la Tutela dell'Ambiente e del Territorio (Laurea Specialistica)

Corso **Complementi di Analisi Matematica**

Docente del corso: Francesca Bucci

Orario delle lezioni: le lezioni, previste durante il I Periodo didattico (2 ottobre – 8 dicembre 2006), si terranno nella sede della Facoltà (Via S. Marta), secondo il seguente orario:
Lun.: 11:15-12:00, 12:15-13:00
Mar.: 14:00-14:45, 15:00-15:45
Mer.: 14:00-14:45, 15:00-15:45

Lezioni svolte

Settimana n. 1

Lun. 2/10/06 (2 ore)

PRESENTAZIONE DEL CORSO. Prerequisiti. Testo di riferimento ed altri testi consigliati. RICHIAMI: Equazioni Differenziali Ordinarie (EDO) lineari, del primo ordine, a coefficienti continui. EDO a variabili separabili.

INTRODUZIONE ALLE EQUAZIONI A DERIVATE PARZIALI (EDP). Derivazione di un primo modello di EDP: evoluzione della concentrazione di una sostanza inquinante in un corso d'acqua soggetto a corrente. Diffusione e trasporto. La semplice equazione del trasporto $u_t + cu_x = 0$.

Mar. 3/10/06 (2 ore)

Cos'è un'EDP. Ordine dell'equazione. EDP lineari, quasi-lineari, completamente non lineari. Vari esempi. Soluzioni classiche. Problemi al contorno e ai valori iniziali. Problemi ben posti: esistenza delle soluzioni, unicità, dipendenza continua dai dati.
EDP LINEARI DEL PRIMO ORDINE. Risoluzione di $au_x + bu_y = 0$, con a, b costanti. Il metodo delle *caratteristiche*. Esempi.

Mer. 4/10/06 (2 ore)

EDP lineari del primo ordine (*continuazione*). Il caso dei coefficienti variabili: l'equazione $a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = 0$ e l'Equazione Differenziale Ordinaria (EDO) $y' = b(x, y)/a(x, y)$. *Esercizio*: l'equazione $u_x+yu_y = 0$, con la condizione ausiliaria $u(0, y) = y^3$.
EDP QUASI-LINEARI DEL PRIMO ORDINE. Il problema di Cauchy per l'equazione $a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u)$. Interpretazione geometrica. Sistema caratteristico. Condizione di trasversalità.

Settimana n. 2

Lun. 9/10/06 (2 ore)
COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA: il problema dell'invertibilità di un'applicazione $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Il TEOREMA dell'inversa *locale* (s.d.).

Equazioni quasi-lineari del primo ordine (*continuazione*). Il caso semi-lineare. *Esercizio*: risoluzione dell'equazione quasi-lineare $uu_x + yu_y = x$, con la condizione ausiliaria $u(x, 1) = 2x$.

Mar. 10/10/06 (2 ore)
Discussione degli esercizi assegnati nella settimana precedente (*Generalità ed EDP del primo ordine*).
Il Principio di sovrapposizione.

Ad integrazione della discussione: illustrazione del 'metodo delle coordinate' per lo studio dell'equazione lineare $au_x + bu_y + cu = 0$, con $a^2 + b^2 > 0$ e $c \neq 0$. Introduzione del cambiamento di variabili $\xi = ax + by$, $\eta = bx - ay$.

Mer. 11/10/06 (2 ore)
COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA: integrali dipendenti da un parametro. Regolarità della funzione $G(t) = \int_a^b f(x, t)\, dx$. Condizioni sufficienti per la derivabilità della funzione

$$F(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x, t)\, dx$$

ed espressione di $F'(t)$.

Trasporto con sorgente distribuita. *Metodo di Duhamel* e soluzione dell'equazione lineare non omogenea $u_t + cu_x = f(x, t)$.

Settimana n. 3

Lun. 16/10/06 (2 ore)
Onde trasversali in una corda. Derivazione di un modello per le piccole vibrazioni di una corda. L'EQUAZIONE DELLA CORDA VIBRANTE: $u_{tt}(x, t) - c^2 u_{xx}(x, t) = 0$. Un primo metodo per la determinazione della soluzione generale, dipendente da due funzioni arbitrarie, mediante riduzione dell'EDP del secondo ordine ad un sistema di due EDP del primo ordine. Il problema *ai valori iniziali* per $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$, con $x \in \mathbb{R}$. FORMULA DI D'ALEMBERT.

Mar. 17/10/06 (2 ore)
L'equazione delle onde in una dimensione spaziale (*continuazione*). Osservazioni in relazione alla formula di D'Alembert:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\big[\varphi(x + ct) + \varphi(x - ct)\big] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y)\, dy\,.$$

Dominio di dipendenza di un punto (x,t), dominio di influenza di un punto ξ. Dipendenza continua dai dati.
Conservazione dell'energia. *Metodi dell'energia.*

Mer. 18/10/06 (2 ore)

L'equazione delle onde unidimensionale (*continuazione*). Illustrazione di un secondo metodo per determinare la soluzione generale $u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct)$, con F, G arbitrarie. Introduzione delle coordinate $\xi = x+ct$, $\eta = x-ct$, e riduzione all'equazione $v_{\xi\eta} = 0$ (di facile risoluzione).
L'equazione delle onde non omogenea $u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t)$. Soluzione del problema con $u(x,0) = u_t(x,0) = 0$ mediante il metodo di Duhamel. Soluzione del problema ai valori iniziali (completo) per l'equazione delle onde non omogenea. Esercizio.

Settimana n. 4

Lun. 23/10/06 (2 ore)

Precisazioni in merito alla lezione precedente. Il problema ai valori iniziali per l'equazione delle onde non omogenea $u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t)$. Applicazione del principio di Duhamel ed espressione della soluzione.

Un problema ai valori iniziali e al contorno per l'equazione delle onde $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$, con $x > 0$. Estensione dei dati a tutto $\mathbb{R}$ ed espressione esplicita della soluzione. Onde dirette e onde riflesse. Soluzioni classiche e condizioni di compatibilità tra dati iniziali e al bordo.
La corda di lunghezza finita: problemi ai valori iniziali e al contorno per l'equazione delle onde $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$, con $0 < x < L$, $t > 0$. Estensioni periodiche di periodo $2L$ dei dati iniziali ed espressione della soluzione.

Mar. 24/10/06 (2 ore)

Esercizio: soluzione di un problema ai valori iniziali e al contorno per l'equazione delle onde $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$, con $0 < x < L$, $t > 0$.

Rettangoli (parallelogrammi) caratteristici. Soluzioni *deboli* dell'equazione della corda vibrante. Illustrazione della *regola del parallelogramma* per risolvere problemi ai valori iniziali e al contorno per l'equazione $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$, con $0 < x < L$, $t > 0$.

Mer. 25/10/06 (2 ore)

Discussione degli esercizi assegnati nella settimana precedente (*L'equazione delle onde – I*).

Introduzione al METODO DI SEPARAZIONE DELLE VARIABILI.

Settimana n. 5

Lun. 30/10/06 (2 ore)

Illustrazione del METODO DI SEPARAZIONE DELLE VARIABILI per l'equazione delle onde (unidimensionale). Problemi agli autovalori. Autovalori ed autofunzioni. Soluzione 'candidata' come somma di una serie di funzioni. Sviluppi in serie di Fourier dei dati iniziali.

COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA: richiami sulle successioni numeriche. Definizione ed esempi. Successioni definite per ricorrenza. Successioni limitate. Limiti di successioni.

Mar. 31/10/06 (2 ore)

SUSSESSIONI NUMERICHE. Successioni a valori reali. Definizione di limite finito e infinito di una successione. Esempi. $x_n = \frac{1}{n} \to 0$, $n \to \infty$. Unicità del limite. Successioni di Cauchy. PROPOSIZIONE: *Se una successione è convergente, essa è di Cauchy* (dimostrato). Successioni che non hanno limite (esempio: $x_n = (-1)^n$). Dal limite alla successione: *limitatezza* e *permanenza del segno*. Successioni monotòne crescenti o decrescenti. Limiti di successioni monotòne (*molto importante*—si vedrà—ai fini dell'analisi del carattere di serie a termini non negativi). Calcolo dei limiti di successioni. Operazioni con i limiti. La progressione geometrica $x_n = q^n$. Limiti di successioni e limiti di funzioni: Il TEOREMA DI COLLEGAMENTO (s.d.). Il limite notevole $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e$, $n \to \infty$.

SERIE NUMERICHE. Successione delle somme parziali. Successioni convergenti, divergenti, indeterminate. Condizione necessaria per la convergenza di una serie (dimostrata).

Mer. 1/11/06 (festa, lezione saltata)

Settimana n. 6

Lun. 6/11/06 (2 ore)

SERIE NUMERICHE (*continuazione*). *Esempi*: la serie geometrica (molto importante). Serie telescopiche.

SERIE A TERMINI NON NEGATIVI. *Importante*: se $a_n \geq 0$, la successione delle somme parziali $s_n = \sum_{k=0}^{n}$ è crescente, dunque ammette limite per $n \to \infty$, e pertanto la serie $\sum_n a_n$ non può essere indeterminata (o è convergente, o diverge a $+\infty$).

Serie ed integrali impropri. La serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ è divergente. *Teorema* (Criterio dell'integrale). *Applicazione*: convergenza dela serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$.

Il CRITERIO DEL CONFRONTO (dimostrato).

Mar. 7/11/06 (2 ore)

Criteri per le serie a termini non negativi. COROLLARIO del criterio del confronto: il Criterio del confronto asintotico. *Esempi.* Applicazione del criterio dell'integrale: analisi della serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$. *Per esercizio*: studiare il carattere della serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p}$, al variare del parametro p. Il Criterio della radice ed il criterio del rapporto. *Esempio*: la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{\pi^n\, n!}$ è convergente. (Richiamare il limite notevole $(1 + \frac{1}{n})^n \to e$, $n \to \infty$).

Serie a termini di segno alterno. TEOREMA (della convergenza assoluta). *Esempi.* Serie a termini di segno alterno.

INTRODUZIONE ALLE SUCCESSIONI E SERIE DI FUNZIONI. Spazi metrici. Definizione e primi esempi. Lo spazio $C^0(A)$ delle funzioni continue in un compatto $A \subset \mathbb{R}$ con la *metrica lagrangiana.*

Mer. 8/11/06 (2 ore)

SPAZI METRICI (*continuazione*). Esempi di spazi metrici: lo spazio $C_b(A)$ delle funzioni continue e limitate in $A \subseteq \mathbb{R}$ con la metrica (lagrangiana) $d(f,g) = \sup_A |f(t) - g(t)|$; lo spazio $C^k(A)$, $k = 1, 2, \ldots$ Lo spazio $\tilde{C}(A)$ delle funzioni continue assolutamente integrabili (eventualmente in senso improprio) in A con la metrica integrale.
Se (X, d) è uno spazio metrico, la struttura metrica induce una struttura topologica in X: definizione di intorno di $x \in X$, di insieme aperto in X, ecc. Definizione di successione $\{x_n\}_n$ convergente. Il caso $X = C_b(A)$ con la metrica lagrangiana: convergenza puntuale e *convergenza uniforme. Esempio*: $f_n(t) = t^n$, $t \in [0, 1]$. *Esercizio*: analisi della convergenza di $f_n(t) = \frac{nt}{1+n^2t^2}$, $t \in \mathbb{R}$.

Importanti conseguenze della proprietà di convergenza uniforme. PROPOSIZIONE: *Se una successione $\{f_n\}_n$ di funzioni limitate converge uniformemente a f in A, f è limitata in A.*

Settimana n. 7

Lun. 13/11/06 (2 ore)

Successioni convergenti e successioni di Cauchy in uno spazio metrico. Spazi metrici *completi.* Completezza degli spazi metrici $\mathcal{B}(A)$ (spazio delle funzioni $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ limitate) e $X = C_b(A)$ con la metrica lagrangiana (s.d.).
Convergenza uniforme e scambio delle operazioni di limite con l'integrale e la derivata (enunciati due teoremi). Esempi. *Esercizio*: studio della convergenza (puntuale ed uniforme) della successione di funzioni $f_n(x) = n^p x e^{-nx}$, $x \in [0, 1]$, al variare del parametro p. Calcolo del $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx$.

Richiami: definizione di spazio vettoriale.
SPAZI NORMATI. Proprietà della norma. Esempi. Metrica indotta dalla norma. Esempi. *Uno spazio normato è uno spazio metrico.* Spazi normati completi: spazi di Banach. Serie a valori in spazi di Banach. Condizione necessaria e sufficiente per la convergenza di $\sum_k x_k$.

Mar. 14/11/06 (2 ore)

Serie a valori in spazi di Banach (*continuazione*). TEOREMA (DELLA CONVERGENZA TOTALE) (dimostrato). Il caso importante $X = C_b(A)$ o $X = \mathcal{B}(A)$ con la norma $||f||_\infty = \sup_A |f(t)|$. Anlisi della convergenza di $\sum_{k=0}^{\infty} k^2 \sin \frac{t}{2^k}$, $|t| \leq \pi/2$. Criterio di Weierstrass.
TEOREMA (INTEGRAZIONE PER SERIE). TEOREMA (DERIVAZIONE PER SERIE).
Classi rilevanti di serie di funzioni: (*i*) serie di potenze e (*ii*) serie di Fourier.

Serie di potenze. Definizione, esempi. Struttura dell'insieme di convergenza.

Mer. 15/11/06 (2 ore)

Serie di potenze (*continuazione*). Insieme di convergenza. Raggio di convergenza. Formula per il calcolo del raggio di convergenza. Esempi ed esercizi.
Regolarità della somma di una serie di potenze. Proposizione 1: *La somma $f(x)$ di una serie di potenze $\sum_n a_n x^n$ con raggio di convergenza $R > 0$ (o $R = +\infty$) è una funzione continua in $B(0, R) = (-R, R)$.*
Serie delle derivate e derivate della somma di una serie di potenze. Serie di Taylor, funzioni analitiche. Proposizione 2: *La somma $f(x)$ di una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ con raggio di convergenza $R > 0$ (o $R = +\infty$) appartiene a $C^\infty(B(0, R))$ e si ha $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Di conseguenza, la serie concide con la serie di Taylor di f con centro in $x_0 = 0$ e infine f è una funzione analitica in $B(0, R)$.*
Sviluppi in serie di Taylor delle funzioni e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\frac{1}{1-x}$, ... Sviluppo di $\arctan x$.

Settimana n. 8

Lun. 20/11/06 (2 ore)

Criteri di convergenza per serie numeriche (*continuazione*). Serie a termini di segno alterno. Il criterio di Leibniz.
Serie di potenze (*continuazione*). Raggio di convergenza ed insieme di convergenza di una serie di potenze. Esempi di serie con stesso raggio di convergenza e diverso insieme di convergenza.
Serie di potenze complesse. Convergenza delle serie di potenze complesse. Un esempio importante: la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ ha raggio di convergenza $R = +\infty$. La funzione esponenziale e^z, $z \in \mathbb{C}$. La *formula di Eulero*. L'identità $e^{2k\pi i} = 1$, $k \in \mathbb{N}$.

Serie di Fourier. Periodicità della funzione somma di una serie di Fourier. Condizione sufficiente per la convergenza. Relazione tra la funzione somma di una serie di Fourier ed i coefficienti a_n, b_n.

Mar. 21/11/06 (2 ore)

Criteri di convergenza per le serie di Fourier. Funzioni continue a tratti e funzioni regolari a tratti in un intervallo. Funzioni (continue a tratti) regolari a tratti su $\mathbb{R}$. Teorema (convergenza puntuale) (s.d.). Teorema (convergenza uniforme) (dimostrazione rimandata).
Esempi. 1) Estensione su tutto $\mathbb{R}$ (periodica di periodo 2π) della funzione $f(x) = x$, $x \in [-\pi, \pi)$, calcolo dei coefficienti di Fourier ed analisi della convergenza della serie di Fourier associata.
2) Estensione di $f(x) = x(\pi - x)$, $x \in [0, \pi]$ per antisimmetria su $[-\pi, \pi]$, e poi ad una funzione periodica di periodo 2π. Calcolo della serie di Fourier associata.

Mer. 22/11/06 (2 ore)

Conclusione dell'esercizio iniziato nella lezione precedente: sviluppo in serie di Fourier della funzione $f(x) = x(\pi - x)$, $x \in [0, \pi]$. Calcolo dei coefficienti di Fourier e verifica della convergenza uniforme della serie di Fourier associata.

Spazi vettoriali dotati di prodotto scalare (spazi *euclidei*). La disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Norma indotta dal prodotto scalare. Verifica della validità della disuguaglianza triangolare. *Uno spazio euclideo è uno spazio normato e quindi ha una struttura metrica.* Spazi di Hilbert. *Lo spazio $X = C^0([a,b])$ non è completo rispetto alla metrica integrale di ordine* 2. Sistemi di funzioni ortogonali. Il sistema trigonometrico. LA DISUGUAGLIANZA DI BESSEL (dimostrata).

Settimana n. 9

Lun. 27/11/06 (2 ore)
Dimostrazione del TEOREMA che garantisce la convergenza uniforme della serie di Fourier associata a funzioni periodiche, continue e regolari a tratti.
APPLICAZIONE: si ritorna al problema ai valori iniziali e al contorno per l'equazione della corda vibrante $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$, con $0 < x < L$. Il caso di condizioni al bordo omogenee di tipo Dirichlet. Separazione delle variabili, derivazione di un problema agli autovalori, e costruzione della soluzione 'candidata' nella forma $\sum_n X_n(x)T_n(t)$. Studio della convergenza delle serie di Fourier dei dati iniziali φ e ψ e della convergenza della serie $\sum_n u_n(x,t)$ alla soluzione $u(x,t)$ del problema.
La soluzione è classica se si assume ad esempio $\varphi \in C^3([0,L])$, $\psi \in C^2([0,L])$, assieme alle condizioni di compatibilità $\varphi(0) = \varphi(L) = 0$, $\psi(0) = \psi(L) = 0$, $\varphi''(0) = \varphi''(L) = 0$.

Lezione integrativa (2 ore): Discussione degli esercizi assegnati contenuti nel foglio *L'equazione delle onde – II.*

Mar. 28/11/06 (2 ore)
L'EQUAZIONE DI LAPLACE. Motivazioni fisiche: stati stazionari in problemi di diffusione, di conduzione elettrica, ecc.; potenziale gravitazionale. Funzioni armoniche. Funzioni armoniche a simmetria sferica. L'equazione di Poisson. Un problema *non ben posto*: esempio di Hadamard.

Mer. 29/11/06 (2 ore)
IL PRINCIPIO DEL MASSIMO (DEBOLE) per l'equazione di Laplace (enunciato, dimostrazione rimandata). Conseguenze: (i) unicità e (ii) dipendenza continua dai dati per le soluzioni del problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson.

IL PROBLEMA DI DIRICHLET PER L'EQUAZIONE DI LAPLACE IN UN RETTANGOLO: applicazione del metodo di separazione delle variabili per la determinazione della soluzione.

Settimana n. 10

Lun. 4/12/06 (2 ore)

Il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace in un rettangolo *continuazione*. Dimostrazione della convergenza della serie di funzioni (ricavata nella lezione precedente) alla soluzione *classica* del problema al contorno.

Il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace in un disco. Trasformazione in coordinate polari, operatore di Laplace in coordinate polari.

Mar. 5/12/06 (2 ore)

Il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace in un disco (*continuazione*): applicazione del metodo di separazione delle variabili, soluzione come somma di una serie. Formula di Poisson.

Mer. 6/12/06 (2 ore)

Importanti conseguenze della *formula di Poisson*: (*i*) Proprietà della media; (*ii*) Principio del massimo forte.
Complementi: Serie di Fourier in campo complesso.

L'equazione di diffusione $u_t = ku_{xx}$. *Proprietà di invarianza* dell'equazione di diffusione. *Soluzione fondamentale* dell'equazione del calore. Il problema ai valori iniziali globale (in dimensione $n = 1$). Espressione della soluzione (s.d.).

Lun. 4/12/06 (2 ore)

Discussione di alcuni problemi/esercizi relativi ai temi *Successioni e serie di funzioni, serie di Fourier* e *L'equazione di Laplace.*