Anno Accademico 2006–2007
Università degli Studi di Firenze
Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio

Corso di Analisi Matematica I

Periodo: 19 Settembre – 15 Dicembre 2006 (13 settimane)
Docente: Francesca Bucci.

Lezioni svolte

I capitoli, le sezioni o le pagine indicate al termine delle lezioni si riferiscono al testo di riferimento: M. Giaquinta e G. Modica, Note di Analisi Matematica (*Funzioni di una variabile*), Pitagora Editrice Bologna, 2005.

Settimana n. 1

Gio. 21/9/06 – 2 ore
Presentazione del corso. Libro di testo e altri testi consigliati. Alcune informazioni pratiche.

Preliminari. Numeri reali e retta reale. Proprietà algebriche e d'ordine dei numeri reali. Gli insiemi $\mathbb{N}$ (numeri naturali), $\mathbb{Z}$ (numeri interi relativi) e $\mathbb{Q}$ (numeri razionali).
Proposizione: Non esiste alcun numero razionale c tale che $c^2 = 2$ (dimostrata, procedendo *per assurdo*).
$\mathbb{Q}$ non possiede la 'proprietà di completezza'. Estremo superiore, estremo inferiore e assioma di continuità.
[Cap. 1]

Settimana n. 2

Mar. 26/9/02 – 3 ore
Estremo superiore, estremo inferiore e assioma di continuità (*continuazione*). Esempi. Il Principio di Archimede. L'alfabeto greco.

Il valore assoluto di un numero x: definizione e proprietà fondamentali. Esempi. La disuguaglianza triangolare (con dim.). Distanza tra due numeri. Importante: $\sqrt{x^2} = |x| \; \forall x$.
Intervalli chiusi, aperti, semi-aperti. Intorni. Semirette. Definizione di insieme *limitato* in $\mathbb{R}$.
Equazioni e disequazioni con valori assoluti.

Richiami: equazioni di secondo grado. Metodo di completamento del quadrato.

[Cap. 1]

Gio. 28/9/06 – 2 ore

Richiami: terminologia degli insiemi, diagrammi di Venn. Insieme vuoto. Unione e intersezione insiemistica. Prodotto cartesiano.
Logica elementare. Proposizioni e predicati. Negazione e quantificatori. Il calcolo delle proposizioni. Tabelle di verità. L'implicazione. Assiomi, definizioni, teoremi e dimostrazioni. Esempi.

Funzioni. Dominio, codominio, immagine. Esempi. Funzioni di variabile reale, a valori reali: $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Grafico di una funzione. Funzioni iniettive, surgettive.
[Cap. 3; Cap. 4]

Settimana n. 3

Mar. 3/10/06 – 3 ore

Funzioni iniettive, surgettive (*continuazione*). Esempi ed esercizi.
Grafici di alcune funzioni elementari ($f(x) = mx + q$, x^2, $\sqrt{x}$, $\frac{1}{x}$). Grafici ottenuti da grafici di funzioni elementari tramite traslazioni e/o riflessioni. Funzioni razionali (rapporto di polinomi). La funzione parte intera di x ($f(x) = [x]$) ed il suo grafico. Operazioni tra funzioni. Composizione di funzioni. Esempi. Funzioni inverse e loro grafici.

[Cap. 4]

(dott. Alessandro Bocconi)
Esercizi: domini e immagini di funzioni, grafici. Funzioni iniettive, suriettive, funzioni inverse.

Gio. 5/10/06 – 2 ore

Funzioni continue di variabile reale. Definizione, esempi: $f(x) = mx + q$, $f(x) = x^2$ sono funzioni continue in x_0 per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$. Continuità ed operazioni. Classi di funzioni continue: polinomi, funzioni razionali.
Proprietà delle funzioni continue. Il Teorema degli zeri (cenno ai due tipi di dimostrazione). Una importante conseguenza del teoremma suddetto: l'esistenza della radice n-esima di un numero positivo a. Potenze ad esponente reale: a^x, $x \in \mathbb{R}$.
[Cap. 7]

Settimana n. 4

Mar. 10/10/06 – 3 ore

La nozione di limite. Definizione di punto di accumulazione per un insieme. Limite finito. Definizione ed esempi. Proprietà del passaggio al limite (unicità del limite, località, ecc.). Limiti destro e sinistro. Esempi.

Dal limite alla funzione: proprietà locali delle funzioni che ammettono limite finito: Limitatezza, Permanenza del segno.

(prof. Alessandro Bocconi)
Discussione della continuità di una funzione dipendente da un parametro.
Esercizi sui limiti.
[Cap. 7, Cap. 8]

Gio. 12/10/06 – 2 ore

Continuità delle funzioni trigonometriche $\sin x$ e $\cos x$ (si mostra che $\cos x \to \cos x_0$, $x \to x_0$; analogamente per $\sin x$).

Limiti infiniti e all'infinito. La retta reale estesa. Definizione (unificante) di limite in termini di intorni. Esempi. Polinomi. Regole per il calcolo dei limiti. Forme 'indeterminate'. Criterio del confronto (*Teorema dei carabinieri*).

[Cap. 8]

Settimana n. 5

Mar. 17/10/06 – 3 ore

Continuità e limiti (*continuazione*). Applicazione del criterio del confronto: $x \sin \frac{1}{x} \to 0$, $x \to 0$. Importante: non esiste $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$. Funzioni pari, dispari; funzioni periodiche, periodo minimo.
Proposizione: *La composizione di funzioni continue è una funzione continua* (s.d.)
Estremo superiore ed estremo inferiore di una funzione in $A \subseteq \mathbb{R}$. Esempi. Punti di massimo e minimo (punti di *estremo*), valori estremi.
Proprietà fondamentali delle funzioni continue (*continuazione*). Il Teorema dei valori intermedi: *Una funzione continua in un intervallo I assume tutti i valori (strettamente) compresi tra $\inf_I f$ e $\sup_I f$.*
Introduzione al Teorema di Wierstrass: *Una funzione continua in un intervallo $[a, b]$ (chiuso e limitato) assume in $[a, b]$ valori massimo e minimo* (s.d.).

Formulazione matematica di problemi di massimo/minimo. Esercizio: trovare due numeri non negativi la cui somma sia 8 e il cui prodotto sia massimo.

(prof. ALESSANDRO BOCCONI)
I limiti notevoli $(\sin x)/x \to 1$ per $x \to 0$ e $(1 - \cos x)/x^2 \to \frac{1}{2}$ per $x \to 0$. Limiti all'infinito di funzioni razionali: analisi di $P(x)/Q(x)$ per $x \to +\infty$, al variare dei gradi m, n di P e Q. Altri esercizi.

[Cap. 7, Cap. 8]

Gio. 19/10/06 – 2 ore

ELEMENTI DI TOPOLOGIA DELLA RETTA REALE. Punti *interni* ad un insieme $D \subset \mathbb{R}$. Insiemi aperti. Esempi. Insiemi chiusi. Punti di frontiera. PROPOSIZIONE: *Un insieme C è chiuso se e solo se contiene i suoi punti di frontiera.*
IL TEOREMA DI WIERSTRASS: *Una funzione continua in un insieme C chiuso e limitato assume in C massimo e minimo assoluti* (s.d.).

Continuità della funzione inversa. Funzioni monotòne crescenti o decrescenti. Proprietà di stretta monotonia. Limiti di funzioni monotòne.

[Cap. 7, Cap. 8]

Settimana n. 6

Mar. 24/10/06 – 3 ore

Limiti di funzioni monotòne (*continuazione*).

Introduzione al concetto di DERIVATA. Rapporto incrementale e definizione di funzione derivabile in un punto x_0. Interpretazione geometrica e retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$. Derivate di alcune funzioni elementari: $f(x) = mx + q$, $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$. Funzioni derivabili in un intervallo: la funzione derivata (prima) $x \mapsto f'(x)$.

Definizione di 'o piccolo'. Funzioni derivabili e approssimazioni lineari. TEOREMA: *Se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ è derivabile in $x_0 \in (a, b)$, allora f è continua in x_0* (con dimostrazione). Funzioni continue, ma non derivabili. $f(x) = |x|$ non è derivabile in $x_0 = 0$. Punti angolosi. Derivata destra e sinistra ($f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$). La funzione $f(x) = \sqrt{x}$ non è derivabile in $x_0 = 0$.

(prof. ALESSANDRO BOCCONI)
Una tabella di derivate. Regole di derivazione. Derivate di funzioni ottenute tramite somma, moltiplicazione per una costante, prodotto, reciproco,

quoziente. Derivazione di funzioni composte: la "regola della catena" (*chain rule*) (s.d.). Esempi ed esercizi.

[Cap. 8, Capp. 9-10]

Gio. 26/10/06 – 2 ore
FUNZIONI DERIVABILI (*continuazione*). Derivata della funzione $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $x > 0$. Derivazione di funzioni composte e regola della catena: esempi. Funzioni trigonometriche inverse e loro derivate (s.d.).

APPLICAZIONI DELLE DERIVATE. Punti di massimo o minimo relativo.
TEOREMA DI FERMAT: *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di massimo o minimo relativo interno ad I. Se f è derivabile in x_0, allora $f'(x_0) = 0$* (dimostrato).
Interpretazione geometrica del Teorema di Fermat. *Importante*: la condizione $f'(x_0) = 0$ non è sufficiente affinché un punto x_0 interno ad I sia di estremo relativo per f (esempio: $f(x) = x^3$, $x_0 = 0$). Localizzazione dei punti di estremo.

[Cap. 10, Cap. 11]

Settimana n. 7

Lun. 30/10/06 – 2 ore (*parziale recupero della lezione del 19/9/2006)*
ESERCIZIO: provare che tra i triangoli isosceli inscritti in un cerchio quello di area massima è il triangolo equilatero.
Il TEOREMA DI ROLLE, il TEOREMA DEL VALOR MEDIO (O DI LAGRANGE) (dimostrati entrambi); interpretazione geometrica.
Una conseguenza fondamentale del Teorema di Lagrange: PROPOSIZIONE: *Sia f una funzione derivabile in un intervallo I. Allora (i) f è crescente (decrescente) in I se e solo se $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) per ogni $x \in I$; (ii) se $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) per ogni $x \in I$, allora f è strettamente crescente (decrescente) in I.*
(*Attenzione*: in relazione all'asserzione (ii), è importante sottolineare che viceversa una funzione f derivabile in (a, b), strettamente monotòna in (a, b), può avere derivata nulla in qualche punto. Esempio: $f(x) = x^3$).

[Cap. 11, Cap. 12]

Mar. 31/10/06 – 3 ore
Discussione degli esercizi assegnati la settimana precedente (dai temi introduttivi al Teorema di Lagrange).

Applicazioni del Teorema di Lagrange: uso delle derivate e della monotonia delle funzioni per i) la ricerca delle radici reali di un polinomio, o di zeri di una funzione continua, ii) la verifica di disuguaglianze, iii) la risoluzione di problemi di ottimizzazione.
Esercizi: determinazione del numero di radici reali di $P(x) = x^3 - 12x + 1$; dimostrazione della validità delle disuguaglianze

$$1 - \cos x \leq \frac{x^2}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}\,, \qquad \sin x \geq x - \frac{x^3}{6} \quad \forall x \geq 0\,.$$

(prof. Alessandro Bocconi)
Funzioni inverse derivabili. Teorema sulla derivata della funzione inversa (dimostrato). Funzioni trigonometriche inverse: la funzione arcoseno ($\arcsin x$) e la funzione arcotangente ($\arctan x$). Proprietà principali, grafici. Calcolo delle rispettive derivate. La funzione arcocoseno (per esercizio).
Esercizio: data $f(x) = 2x + \log x$, $x > 0$, e detta g la funzione inversa, calcolare $g'(2)$.

[Cap. 10, Cap. 12]

Gio. 2/11/06 – 2 ore
Continua la discussione degli esercizi assegnati la settimana precedente. Problemi di ottimizzazione. Un Corollario del Teorema di Weierstrass: *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Se $f(x) \to +\infty$ per $x \to \pm\infty$, allora f ha minimo (assoluto) in $\mathbb{R}$.*
Problema: Trovare le dimensioni di un contenitore di forma cilindrica di capacità fissata che rendono minima la superficie. *Per esercizio*: fissare la superficie e rendere massima la capacità.

Un'ulteriore importante conseguenza del Teorema del valore medio: funzioni con derivata nulla in un intervallo. Corollario: *Siano f e g due funzioni derivabili in un intervallo I, con $f'(x) = g'(x)$ per ogni $x \in I$. Allora esiste una costante C tale che $f(x) = g(x) + C$ per ogni $x \in I$.*

[Cap. 11, Cap. 12]

Settimana n. 8

Mar. 7/11/06 – 3 ore
Esercitazione sui temi trattati fino alla data attuale.

(prof. ALESSANDRO BOCCONI)
Insiemi convessi del piano. Funzioni convesse: definizione ed interpretazione geometrica. Esempi. L'epigrafico E_f. *Una funzione convessa in un intervallo I è continua nei punti interni ad I.* Caratterizzazione delle funzioni convesse derivabili in $[a, b]$: TEOREMA: *Sia f una funzione derivabile in $[a, b]$. Le proprietà seguenti sono equivalenti: (i) f è convessa in $[a, b]$; (ii) $f'(x)$ è una funzione crescente in $[a, b]$; (iii) per ogni x, x_0 in $[a, b]$ si ha $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ (cioè il grafico di f 'sta sopra' le sue rette tangenti). Se inoltre esiste $f''(x)$, $x \in [a, b]$, f è convessa in $[a, b]$ se e solo se $f''(x) \geq 0$ in $[a, b]$.*

Studio del segno della derivata seconda per la determinazione degli intervalli in cui f è convessa (o concava). Esercizio.

[Cap. 19]

Gio. 9/11/06 – 2 ore
Commenti sugli esiti dell'esercitazione, svolgimento di alcuni esercizi e restituzione/visione degli elaborati.

L'INTEGRALE. Il problema del calcolo dell'area di una regione piana. Somma degli effetti totali di un processo. Funzioni costanti a tratti in un intervallo limitato. Suddivisioni (partizioni) di un intervallo $[a, b]$, ampiezza della suddivisione. Funzioni $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitate: somma inferiore e somma superiore di f associate ad una partizione σ, integrale inferiore e integrale superiore di f in $[a, b]$. Definizione di funzione integrabile (secondo Riemann) in $[a, b]$.

[Cap. 13]

Settimana n. 9

Mar. 14/11/06 – 3 ore
L'INTEGRALE (*continuazione*). Caratterizzazione delle funzioni integrabili in un intervallo $[a, b]$: *Una funzione f limitata è integrabile in un intervallo $[a, b]$ se e solo se per ogni $\epsilon > 0$ esiste una suddivisione σ di $[a, b]$ tale che $S(f, \sigma) - s(\sigma) < \epsilon$.*
Somme, prodotti e quozienti di funzioni integrabili. Proprietà dell'integrale (linearità, monotonia, ...). Integrale orientato.
Classi di funzioni integrabili: *(i)* le funzioni limitate e monotòne in (a, b) (con dimostrazione); *(ii)* le funzioni limitate e continue in (a, b) ad eccezione al più di un numero finito di punti. In particolare: *Se $f \in C([a, b])$, f è*

integrabile in $[a,b]$.
Sia f una funzione integrabile (secondo Riemann) in $[a,b]$: è definita la *funzione integrale* $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, $x \in [a,b]$. Funzioni lipschitziane, costante di Lipschitz. La funzione integrale F è lipschitziana in $[a,b]$.

(prof. Alessandro Bocconi)
Asintoti orizzontali, verticali, obliqui. Esempi. Svolgimento dell'esercizio n. 2 dell'esercitazione (limiti di funzioni dipendenti da un parametro).

[Cap. 14]

Gio. 16/11/06 – 2 ore
Il Teorema della media integrale (dimostrato). Interpretazione geometrica. Il Teorema fondamentale del calcolo integrale (dimostrato). Primitive. Esempi. Integrale indefinito. Calcolo della funzione integrale di una funzioni discontinua: la funzione di Heaviside.

[Cap. 14]

Settimana n. 10

Mar. 21/11/06 – 3 ore
Funzioni logaritmo ed esponenziale. Definizione della funzione $\log x$ come funzione integrale. Proprietà principali. Limiti asintotici, derivate prima e seconda, grafico. Il numero di Nepero e. La funzione inversa di $\log x$: l'esponenziale $\exp(x)$. Proprietà principali, derivate, grafico.
Ampliamento della tabella di primitive.

(prof. Alessandro Bocconi)
Studio della funzione (integrale) $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$: proprietà di simmetria, regolarità, intervalli di monotonia, convessità/concavità, limiti asintotici.
Metodi di integrazione. Il metodo di integrazione per parti. Vari esempi: in particolare, $\int \sin^2 x\,dx$.

[Cap. 15, Cap. 17]

Gio. 23/11/06 – 2 ore
Metodi di integrazione (*continuazione*). Il metodo di integrazione per sostituzione. Esempi. Sostituzioni speciali: per l'integrale $\int \mathcal{R}(x, \sqrt{a^2 - x^2})\,dx$ si utilizza il cambiamento di variabile $x = a\cos t$ oppure $x = a\sin t$. Esempio.
Integrazione di funzioni razionali $\mathcal{R}(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ (P, Q polinomi). Formule di

Hermite. Divisione tra polinomi e riduzione al caso in cui il grado del numeratore è minore del grado del denominatore. Il caso $Q(x) = ax^2 + bx + c$. Decomposizione in *frazioni semplici*.

[Cap. 17]

Settimana n. 11

Mar. 28/11/06 – 3 ore

Integrazione di funzioni razionali $\mathcal{R}(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ (*continuazione*). Il caso in cui $Q(x) = ax^2 + bx + c$ ha una radice reale (di molteplicità due); il caso in cui $Q(x) = ax^2 + bx + c$ è un polinomio irriducibile (in $\mathbb{R}$). *Esempi ed esercizi.* Sostituzioni *razionalizzanti.* La sostituzione $x = 2\arctan t$ per il calcolo di integrali indefiniti della forma $\int \mathcal{R}(\cos x, \sin x)\, dx$ ($\mathcal{R}(z, w)$ funzione razionale).

(prof. Alessandro Bocconi)

Le funzioni iperboliche $\cosh x$ e $\sinh x$: definizione, identità fondamentale $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$. Studio qualitativo delle due funzioni e loro grafici. Le funzioni iperboliche inverse.

Applicazione: le sostituzioni $x = a \sinh t$ e $x = a \cosh t$ per il calcolo degli integrali indefiniti $\int \mathcal{R}(x, \sqrt{a^2 + x^2})\, dx$ e $\int \mathcal{R}(x, \sqrt{x^2 - a^2})\, dx$, rispettivamente. Esempi.

[Cap. 15, Cap. 17]

Gio. 30/11/06 – 2 ore

Applicazione dei Teoremi di de l'Hôpital: ordini di infinito delle funzioni $\log^\alpha x$, x^β, $e^{\gamma x}$, per $x \to +\infty$.

Esercizi: problemi geometrici di massimo.

[Cap. 12]

Settimana n. 12

Mar. 5/12/06 – 3 ore

Integrali generalizzati. Estensione della nozione di integrale a funzioni non necessariamente limitate e/o definite su intervalli illimitati. Integrali *in senso improprio.* Un esempio importante: integrabilità della funzione $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ negli intervalli (i) $(0, 1]$ e (ii) $[1, +\infty)$, al variare del parametro $\alpha > 0$.

Criterio del confronto. Esempi. La funzione $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ è integrabile in senso improprio in $[1, +\infty)$, ma $|f(x)|$ non lo è.

(prof. ALESSANDRO BOCCONI)
Applicazioni dell'integrale al calcolo dell'area di regioni piane comprese tra i grafici di due funzioni (con dimostrazione). Esempi.
Enunciati dei due Teoremi di de l'Hôpital.

[Cap. 18, Cap. 12]

Gio. 7/12/06 – 2 ore
LA FORMULA DI TAYLOR. Formula di Taylor *con resto integrale* (provata la formula per $f \in C^2(I)$). Polinomi di Taylor. Formula di Taylor *con resto di Lagrange* (dimostrata). Polinomi di Taylor (centrati in $x_0 = 0$) delle funzioni e^x, $\cos x$, $\sin x$. Applicazione della formula di Taylor con resto di Lagrange all'*approssimazione di numeri.*

[Cap. 20]

Settimana n. 13

Mar. 12/12/06 – 3 ore
SVILUPPI ASINTOTICI. Formula di Taylor con resto di Peano. La notazione (di Landau) *o piccolo*. Una tabella di sviluppi di funzioni elementari: oltre a quelli di e^x, $\cos x$, $\sin x$, si deriva lo sviluppo di $\frac{1}{1-x}$, $x \in (-1, 1)$, e da esso si ricavano quelli di $\frac{1}{1+x}$, $\frac{1}{1+x^2}$, $\arctan x$, ecc. Applicazione al calcolo di limiti.

(**da completare**)

[Cap. 21]

Gio. 14/12/06 – 2 ore
Prime EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE (EDO). Crescita e decadimento: l'equazione *lineare* $y' = k\,y$ (con k costante assegnata). Ordine dell'equazione. Definizione di soluzione. *Le soluzioni dell'equazione* $y' = k\,y$ *sono* tutte e sole *della forma* $y(t) = ce^{kt}$, $c \in \mathbb{R}$.
EDO lineari del primo ordine (a coefficienti continui): $y' = a(t)y + b(t)$, con $a, b \in C(I)$. *Integrale generale* dell'equazione. Esempio. Condizioni ausiliarie e problema di Cauchy.
EDO a variabili separabili: $y' = f(t)g(y)$. Ricerca delle (eventuali) soluzioni costanti, e delle altre soluzioni. Esempio.

[Cap. 15, Cap. 22]