**Esercizi su Equazioni a Derivate Parziali (EDP) – 14 Dicembre 2005**

1. Si consideri l'equazione di diffusione $u_t(x,t) = u_{xx}(x,t)$ in $(0,1) \times (0,\infty)$, con $u(0,t) = u(1,t) = 0$, $t > 0$, e $u(x,0) = 4x(1-x)$, $x \in (0,1)$.

   (a) Provare che $0 \leq u(x,t) \leq 1$ per ogni $x \in (0,1)$ ed ogni $t > 0$ (in realtà, più precisamente si ha $0 < u(x,t) < 1$).

   (b) Provare che $u(x,t) = u(1-x,t)$ per ogni $x \in [0,1]$ ed ogni $t \geq 0$.

   (c) Utilizzare il metodo dell'energia per provare che $F(t) = \int_0^1 [u(x,t)]^2\, dx$ è una funzione decrescente.

2. Provare che la funzione (detta anche 'degli errori') $erf(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ è una funzione dispari e disegnarne il grafico (si ricorda che $\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}/2$).

3. Risolvere il seguente problema ai valori iniziali per l'equazione di diffusione: $u_t = k u_{xx}$ in $\mathbb{R} \times (0,\infty)$, $u(x,0) = \varphi(x)$, con
$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| < l \\ 0 & \text{se } |x| \geq l\,. \end{cases}$$
   Esprimere la soluzione in termini della funzione $erf(x)$ definita nell'esercizio precedente.

4. Risolvere l'equazione del calore $u_t = u_{xx}$, con dato iniziale $\varphi(x) = x^2$, utilizzando il metodo seguente. Provare preliminarmente che $u_{xxx}$ soddisfa l'equazione del calore con dato iniziale *nullo*. Pertanto, per l'unicità, $u_{xxx} \equiv 0$. Integrando tre volte rispetto a $x$, si ottiene
$$u(x,t) = A(t)x^2 + B(t)x + C(t)\,.$$
   Tornando al problema originale, determinare $A$, $B$ e $C$.

5. Risolvere il problema precedente utilizzando la formula (di convoluzione) discussa in classe. Introdurre la sostituzione $p = (x-y)/\sqrt{4t}$ nell'integrale: per l'unicità, l'espressione risultante della soluzione deve coincidere con quella ottenuta con il metodo precedente. Usare questo fatto per calcolare
$$\int_{\mathbb{R}} p^2 e^{-p^2}\, dp\,.$$

6. Risolvere il problema ai valori iniziali (per l'equazione di diffusione con un termine di smorzamento)
$$\begin{cases} u_t - k u_{xx} + bu = 0 & x \in \mathbb{R}\,,\ t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) & x \in \mathbb{R}\,, \end{cases}$$

con $b$ costante.
(*Suggerimento*: fare il cambio di variabile $u(x,t) = e^{-bt}v(x,t)$).