

Esercizi su Equazioni a Derivate Parziali (EDP) – 30 novembre 2005

1. Risolvere il problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson  $u_{xx} + u_{yy} = 1$  sul disco  $\Omega = \{ (x, y) : x^2 + y^2 < b^2 \}$ ,  $b > 0$ , con  $u \equiv 0$  su  $\partial\Omega = \{ (x, y) : x^2 + y^2 = b^2 \}$  (cercare soluzioni *di tipo radiale*).
2. Risolvere il problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson  $u_{xx} + u_{yy} = 1$  sulla corona circolare  $\Omega = \{ (x, y) : 0 < a < \sqrt{x^2 + y^2} < b \}$ , con condizioni al bordo omogenee (cercare soluzioni *di tipo radiale*).  
*Soluzione:* Ponendo  $u(x, y) =: v(r)$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , si ottiene

$$v(r) = \frac{1}{4}(r^2 - a^2) - \frac{b^2 - a^2}{4(\log b - \log a)} \log \frac{r}{a}.$$

3. Provare l'unicità per il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

usando il metodo dell'energia.

*Suggerimento:* Come di consueto, si considerino due soluzioni  $u_1$  e  $u_2$ , si definisca  $w = u_1 - u_2$  e si verifichi che  $w$  soddisfa un problema omogeneo per l'equazione di Laplace. Il metodo dell'energia consiste nel moltiplicare tale equazione per  $w$  ed integrare per parti, utilizzando la formula

$$v\Delta u = \operatorname{div}(v\nabla u) - \nabla v \cdot \nabla u;$$

è poi necessario applicare il Teorema della divergenza.

4. Determinare la funzione  $u(x, y)$  armonica nel quadrato  $\Omega = (0, \pi) \times (0, \pi)$  che soddisfa  $u(0, y) = 0$ ,  $u_y(x, 0) = 0 = u_y(x, \pi)$ ,  $u(\pi, y) = \cos^2 y$ .  
*Suggerimento:* è utile ricordare che  $\cos^2 y = [1 + \cos(2y)]/2$ .  
*Soluzione:*

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \left[ \frac{x}{\pi} + \frac{\sinh(2x)}{\sinh(2\pi)} \cos(2y) \right].$$

5. Determinare la funzione  $u$  armonica nel quadrato  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$  che soddisfa  $u(x, 0) = x$ ,  $u(x, 1) = 0$ ,  $u_x(0, y) = 0$ ,  $u_x(1, y) = y^2$ .
6. Una piastra  $D$  a forma di corona circolare con raggio interno pari ad  $a$  e raggio esterno pari a  $b$  è tenuta a temperatura  $(u(x, y))$   $B$  su  $r = b$ , e soddisfa inoltre la condizione al bordo  $\frac{\partial u}{\partial r} = A$  su  $r = a$ , con  $A, B$  costanti. Determinare la temperatura sulla piastra, supponendo che essa abbia raggiunto uno stato

stazionario.

*Suggerimento:* La temperatura soddisfa l'equazione di Laplace in  $D$  e dipende solo da  $r$ .

7. Discutere il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace sulla regione *esterna* ad un disco. Più precisamente, determinare la funzione  $u(x, y)$  tale che

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{per } x^2 + y^2 > a^2 \\ u = f(\theta) & \text{per } x^2 + y^2 = a^2, \\ u \text{ limitata} & \text{per } x^2 + y^2 \rightarrow +\infty. \end{cases}$$