

Esercizi su Equazioni a Derivate Parziali (EDP) – 24 novembre 2005

1. Risolvere

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} & 0 < x < \infty, t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = 1, u_t(x, 0) = 0 & 0 < x < \infty \\ u(0, t) = 0 & t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

utilizzando il metodo della riflessione. La soluzione corrispondente presenta delle singolarità: localizzarle.

2. Provare che se i dati iniziali ϕ e ψ sono funzioni pari, la soluzione $u(x, t)$ dell'equazione delle onde data dalla formula di d'Alembert è anch'essa una funzione (di x) pari, per ogni t .
3. Risolvere il problema di Neumann per l'equazione delle onde $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ sulla semiretta, cioè

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & 0 < x < \infty, t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = \phi(x), u_t(x, 0) = \psi(x) & 0 < x < \infty \\ u_x(0, t) = 0 & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Suggerimento: nell'introdurre le estensioni di ϕ e ψ su tutto \mathbb{R} si tenga conto che in questo caso è conveniente fare in modo che la soluzione $\tilde{u}(x, t)$ del problema ausiliario (su tutta la retta) sia una funzione *pari* (in x) per ogni t . Si osservi infatti che in tal modo la derivata $\tilde{u}_x(x, t)$ risulterà una funzione *dispari*, e la condizione al bordo $\tilde{u}_x(0, t) = 0$ sarà soddisfatta automaticamente. Pertanto, in questo caso, le estensioni naturali dei dati iniziali non sono funzioni *dispari*, a differenza che nel caso di condizione al bordo di Dirichlet.

4. Risolvere il problema di Neumann per l'equazione della corda vibrante (finita)

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & 0 < x < L, t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = \phi(x), u_t(x, 0) = \psi(x) & 0 < x < L \\ u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0 & t \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1)$$

utilizzando il metodo di separazione delle variabili.

Osservazioni: (i) Anche in questo caso—nella ricerca di una soluzione della forma $u(x, t) = X(x)T(t)$ —risulta cruciale l'analisi di un problema agli autovalori, e precisamente del problema

$$-X'' = \lambda X, \quad X'(0) = X'(L) = 0.$$

Determinare gli autovalori λ_n (osservando attentamente che in questo caso $\lambda = 0$ è un autovalore, a differenza che nel caso del problema di Dirichlet) e le corrispondenti autofunzioni.

(ii) Dedurre l'espressione di $u(x, t)$, (candidata) soluzione del problema (1), determinando i coefficienti che vi appaiono (seguendo la notazione usata in classe, A_n e B_n) dall'aver imposto le condizioni iniziali.