**Esercizi su Equazioni a Derivate Parziali (EDP) – 3 novembre 2005**

1. Verificare che se $h$ è una funzione di classe $C^1$ su $\mathbb{R}$ la funzione
$$u(x,y) = h(bx - ay)\, e^{-\frac{c}{a^2+b^2}\,(ax+by)}$$
risolve in senso classico l'equazione del primo ordine
$$au_x + bu_y + cu = 0\,, \qquad a^2 + b^2 > 0\,,\ c \neq 0\,.$$

2. Risolvere $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ per $x \in \mathbb{R}$ e $t > 0$ con le condizioni iniziali $u(x,0) = e^x$ e $u_t(x,0) = \sin x$.

3. Provare che se i dati iniziali $\phi$ e $\psi$ sono funzioni dispari, la soluzione $u(x,t)$ dell'equazione delle onde (data dalla formula di d'Alembert) è anch'essa una funzione (di $x$) dispari per ogni $t$.

4. Provare che l'equazione delle onde ha le seguenti proprietà di invarianza. Sia $u(x,t)$ una soluzione di $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$: allora
   (a) ogni traslata $u(x - y, t)$, con $y$ fissato, è soluzione della stessa equazione;
   (b) le derivate $u_x$ e $u_t$ sono anch'esse soluzioni;
   (c) $u(ax, at)$, $a > 0$, è soluzione.

5. Si consideri l'equazione delle onde *smorzate*
$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + du_t = 0\,,$$
con $d > 0$ costante. Provare che l'energia $E(t)$ è decrescente.
(Usare lo stesso metodo utilizzato per dimostrare la conservazione dell'energia per l'equazione delle onde).

6. Risolvere l'equazione non-omogenea $u_{tt} = c^2 u_{xx} + \cos x$ per $x \in \mathbb{R}$ con le condizioni ausiliarie $u(x,0) = \sin x$ e $u_t(x,0) = 1 + x$.

7. Provare per sostituzione diretta che
$$u(x,t) = \begin{cases} h(t - \frac{x}{c}) & \text{se } x < ct \\ 0 & \text{se } x \geq ct \end{cases}$$
risolve l'equazione delle onde sulla semiretta $0 < x < \infty$ con condizioni iniziali omogeneee e condizione al bordo (di tipo Dirichlet) $u(0,t) = h(t)$.