Esercizi su Equazioni a Derivate Parziali (EDP) – 27 ottobre 2005

1. Quale dei seguenti operatori differenziali è lineare?
   (a) $Lu = u_x + xu_y$
   (b) $Lu = u_x + uu_y$
   (c) $Lu = u_x^2 + u_y$
   (d) $Lu = u_x + u_y + 1$
   (e) $Lu = \sqrt{1+x^2}\cos y\, u_x + u_{yy} - \arctan(x/y)u$

2. Per ciascuna delle seguenti EDP stabilire l'ordine e se è un'equazione nonlineare, lineare non omogenea o lineare omogenea (motivando le risposte).
   (a) $u_t + u_{xx} + 1 = 0$
   (b) $u_t - xu_x + (\sin x)u = 0$
   (c) $u_{xx} - uu_{yy} = 0$
   (d) $u_{tt} - u_{xx} + x^2 = 0$
   (e) $u_{tt} - u_{xxxx} + \sqrt{1+u^2} = 0$
   (f) $\nabla \cdot \mathbf{u} = y\cos x$ (ove $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ è una funzione a valori vettoriali)

3. Verificare che la funzione $u(x,y) = f(x)g(y)$, con f e g funzioni derivabili arbitrarie, è soluzione dell'equazione $uu_{xy} = u_x u_y$.

4. Risolvere l'equazione del prim'ordine $2u_t + 3u_x = 0$, con la condizione ausiliaria $u = \sin x$ per $t = 0$.

5. Risolvere l'equazione lineare $u_x + 2xy^2 u_y = 0$. Disegnare alcune curve caratteristiche.

6. Risolvere l'equazione $yu_x + xu_y = 0$ con la condizione iniziale $u(0,y) = e^{-y^2}$.

7. Risolvere l'equazione $au_x + bu_y + cu = 0$, supponendo che $a^2 + b^2 \neq 0$ e $c \neq 0$ (si può utilizzare sia il metodo delle caratteristiche, che il metodo delle coordinate).

8. Risolvere il problema ai valori iniziali $u_x + u^2 u_y = 1$, $u(x,0) = 1$.