Università degli Studi di Firenze
Anno Accademico 2005/2006
Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio

Corso di Analisi Matematica 2 (IAT)

Docente: Francesca Bucci
Periodo: II periodo (16 gennaio 2006 – 17 marzo 2006)
Orario: Mar.: 8:30-9:15, 9:30-10:15 – Gio.: 11:30-12:15, 12:30-13:15.

Lezioni svolte

A conclusione degli argomenti affrontati in ciascuna lezione, sono indicati (dentro una parentesi quadra) i paragrafi corrispondenti del testo di riferimento: R.A. ADAMS, *Calcolo Differenziale 2* (Terza edizione), Casa Editrice Ambrosiana, Milano, 2003.

1. Mar. 17/1/06 – 2 ore
Presentazione del corso. Libro di testo e altri testi consigliati. Alcune informazioni pratiche.
INTRODUZIONE ALLE FUNZIONI DI DUE O PIÙ VARIABILI. **Lo spazio $\mathbb{R}^n$ come spazio metrico**. Definizioni di norma e di distanza euclidea. Proprietà della norma. Definizione di intorno (sferico), insiemi limitati. Punti interni, esterni, di frontiera; insiemi aperti, chiusi. Esempi.

[C; 1.1, 1.2; 3.1]

2. Gio. 19/1/06 – 2 ore
Lo spazio $\mathbb{R}^n$ come spazio metrico (*continuazione*). Il prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$. Disuaguaglianza di Cauchy-Schwarz. Punti aderenti (o punti limite) ad un sottoinsieme dato di $\mathbb{R}$. Successioni $\{x_k\}_k$ a valori in $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Definizione di successione convergente. *Importante*: $x_k = (x_k^1, x_k^2, \ldots, x_k^n)$ converge a $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ in $\mathbb{R}^n$ se e solo se le successioni (a valori in $\mathbb{R}$) delle coordinate convergono: $\{x_k^i\}_k \to x^i$ per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$.

Curve in forma parametrica. Funzioni di variabile reale a valori vettoriali, rappresentazione parametrica di una curva. Orientazione. Curve semplici, curve chiuse. Sostegno (o traiettoria) della curva. Esempi. Curve cartesiane e curve polari. Curve C^1 e curve *regolari.*

[2.1, 2.3]

3. Mar. 24/1/06 – 2 ore

Curve in forma parametrica (*continuazione*). Cambi di parametro ammissibili, parametrizzazioni equivalenti. Curve rettificabili: lunghezza di una curva. Teorema di rappresentazione per la lunghezza di un arco di curva regolare (s.d.). Esempi. Curve regolari a tratti.

[2.3]

4. Gio. 26/1/06 – 2 ore

Parentesi (Complementi di Analisi Matematica 1): sostituzioni per integrali della forma $\int \mathcal{R}(\sqrt{a^2+t^2})\,dt$.

Curve in forma parametrica (*continuazione*). La lunghezza non dipende dalla parametrizzazione scelta (s.d.). Non tutte le curve sono rettificabili; esempi.
Il parametro lunghezza d'arco (o *ascissa curvilinea*): rappresentazione standard. Esempi.
Integrali di linea sul sostegno di un arco di curva regolare, o regolare a tratti. Motivazioni, definizione ed interpretazione geometrica. Vale la seguente
Proposizione. *Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ un arco di curva regolare, di sostegno Γ, e sia f una funzione a valori reali definita in un insieme aperto contenente Γ ($f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $A \supset \Gamma$). Se $f(\gamma(t))||\gamma'(t)||$ è integrabile in $[a,b]$, allora f è integrabile su Γ e si ha*

$$\int_\Gamma f\,ds = \int_a^b f(\gamma(t))||\gamma'(t)||\,dt\,.$$

Importante: (i) L'assunto della Proposizione vale anche se γ è regolare a tratti. (ii) L'integrale di linea (di prima specie) di f lungo Γ è invariante per parametrizzazioni equivalenti, ed anche per cambiamento di orientazione su Γ.

[2.3, 6.3]

5. Mar. 31/1/06 – 2 ore

Applicazioni fisiche e geometriche dell'integrale di linea (di prima specie). Calcolo della massa totale di un filo materiale non omogeneo. Baricentro di un filo. Vari esempi ed esercizi.

Funzioni di più variabili, a valori reali ($f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$). Dominio, immagine. *Alcuni esempi*: $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$, $g(x,y) = x^2+y^2$, ...
Grafici, curve di livello.

[6.3, 3.1]

6. Gio. 2/2/06 – 2 ore

Limiti e continuità. Definizione di punto di accumulazione per un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$. Sia $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, e sia a una punto di accumulazione per D: definizione di limite finito di $f(x)$ per $x \to a$ (in termini di intorni). Il caso $n = 2$, significato geometrico. Esempi e verifiche di limiti. Validità delle principali proprietà dei limiti note dal caso $n = 1$ (unicità, permanenza del segno, regole di calcolo, etc.).

Definizione di funzione continua in un punto. Alcune funzioni continue elementari: polinomi, funzioni razionali, potenze, ecc. Continuità delle funzioni composte.

[3.2, 3.3]

7. Mar. 7/2/06 – 2 ore

Funzioni estendibili con continuità in un punto. Esempio.
Definizione di estremi (massimo o minimo) assoluti per $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, e dei corrispondenti punti di estremo. Un risultato fondamentale per le funzioni continue: enunciato del TEOREMA DI WEIERSTRASS (s.d.). Esercizio.

Derivate parziali. Il problema di estendere al caso multidimensionale il concetto di funzione derivabile in un punto. Sia $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, e sia (a, b) un punto interno a D: definizione di derivata parziale di f rispetto a x in (a, b) (simboli $f_x(a, b)$, $D_x(a, b)$, $D_1(a, b)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$). Analogamente per $f_y(a, b)$.
Il calcolo delle derivate parziali. Un primo esempio di derivazione di funzioni composte: il caso $f(x, y) = F(g(x, y))$, con F funzione di variabile reale.

[3.3]

8. Gio. 9/2/06 – 2 ore

Importante: la sola esistenza delle derivate parziali prime di una funzione f non implica in generale ulteriori proprietà per f. *Esempio* di una funzione f che ammette entrambe le derivate parziali $f_x(a, b)$ e $f_y(a, b)$ ma non è continua in (a, b). Il problema di estendere il concetto di derivabilità a funzioni di più variabili. Il caso di $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: esistenza della derivata prima ed approssimazione lineare.
Definizione di funzione differenziabile in un punto interno al dominio. Due conseguenze fondamentali: *Sia f una funzione differenziabile in un punto (a, b): allora (i) f è ivi continua; (ii) il grafico di f ammette piano tangente in $(a, b, f(a, b))$.* Equazione del piano tangente, direzione di un vettore normale al grafico di f in $(a, b, f(a, b))$, equazione della retta normale.

[3.3]

9. Mar. 14/2/06 – 2 ore
Riepilogo della lezione precedente: definizione di funzione differenziabile in un punto interno al dominio (con $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n > 2$). Approssimazione lineare. Vettore gradiente, differenziale. Una condizione sufficiente per la differenziabilità: Il Teorema del differenziale totale (s.d.). Funzioni di classe C^1. COROLLARIO: *Se $f \in C^1(A)$, f è differenziabile in A.* Esempi di applicazione del criterio.
Esercizi: piano tangente al grafico di una funzione, determinazione dei punti di una superficie in cui il piano tangente è orizzontale; calcolo della distanza di un punto da una superficie.

[3.3, 3.6]

10. Gio. 16/2/06 – 2 ore
(Conclusione e commenti sull'esercizio relativo al calcolo della distanza di un punto da una superficie).

Derivazione delle funzioni composte. Analisi dei casi $g(t) := f(u(t), v(t))$ e $g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$. Ipotesi sulla regolarità delle funzioni e "regola della catena" (*chain rule*). Un esempio di non validità della *chain rule*: il caso della funzione composta $g(t) := f(u(t), v(t))$, con

$$f(x,y) = \begin{cases} x & x = y \\ 0 & x \neq y \end{cases},$$

e $u(t) = v(t) = t$. Si effettua il calcolo di $g'(0)$ in due modi (di cui uno è errato).
Esercizio: la trasformazione in coordinate polari e il calcolo delle derivate della funzione composta $g(\rho, \theta) = f(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta)$.
Matrice jacobiana di una trasformazione. Coordinate sferiche (per esercizio: calcolo della matrice jacobiana).

[3.5, 3.6]

11. Mar. 21/2/06 – 2 ore
Applicazioni della derivazione di funzione composte. *Esempio*: si verifica che se $f \in C^1(\mathbb{R})$, la funzione $u(x, t) = f(x - ct)$ soddisfa *l'equazione del trasporto* $u_t + cu_x = 0$.

Direzioni in $\mathbb{R}^n$. **Definizione di derivata direzionale** di una funzione in un punto.

TEOREMA: *Sia f una funzione differenziabile in un punto p interno al dominio D di f. Allora f ammette derivate direzionali in p lungo ogni direzione v e si ha $\frac{\partial f}{\partial v}(p) = \nabla f(p) \cdot v$ per ogni v.*
Direzioni di massima e minima pendenza del grafico di f.

Curve in forma *implicita*. L'assunto del
TEOREMA DELLE FUNZIONI IMPLICITE (o del Dini) per l'insieme Z descritto dall'equazione $F(x, y) = k$, con $F \in C^1$: *Se $(x_0, y_0) \in Z$, e $\nabla F(x_0, y_0) \neq 0$, allora Z è localmente (in un intorno di (x_0, y_0)) il grafico di una funzione di una variabile $x \mapsto y(x)$ o $y \mapsto x(y)$.*
Conseguenza **importante**: *se $\nabla F(x_0, y_0) \neq 0$, $\nabla F(x_0, y_0)$ è un vettore* ortogonale*, in (x_0, y_0), all'insieme descritto da $F(x, y) = k$.*

12. Gio. 23/2/06 – 2 ore
Riepilogo dei concetti e risultati principali introdotti nella lezione precedente. Esercizi sul calcolo di derivate direzionali.
Valori estremi. Definizione di punto di massimo (o minimo) relativo. Punti di estremo (relativo ed assoluto). Esempi.
TEOREMA (di Fermat): *Sia $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, e sia p un punto di estremo relativo per f interno a D. Se f è differenziabile in p, allora $\nabla f(p) = 0$ (p è detto punto critico di f).*
Importante: il Teorema fornisce una condizione *necessaria*, ma non sufficiente a stabilire che un punto p—interno a D, su cui f è differenziabile—sia effettivamente di estremo; esempio: $f(x, y) = x^2 - y^2$ ($(0, 0)$ non è di estremo per f).
Punti *singolari* (punti interni a D in cui f non è differenziabile). Punti critici, punti singolari, punti di frontiera.
Risoluzione di alcuni problemi di massimo e/o minimo.

13. Lun. 27/2/06 – 3 ore (con la lezione del 2 Marzo *anticipata*)
Esercitazione relativa ai temi svolti fino alla data attuale (calcolo differenziale per funzioni di più variabili, problemi di ottimizzazione).

Derivate di ordine superiore. Derivate seconde pure, miste. Il Teorema di Schwarz (s.d.). Funzioni di classe C^2. *Esempio*: L'operatore di Laplace $\Delta : u \to \Delta u$, con $\Delta u(x) = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}(x)$. L'operatore di Laplace in coordinate polari.

14. Mar. 28/2/06 – 2 ore

Sia $f \in C^2(D)$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, e sia (a,b) un punto interno a D. Si introduce la **Formula di Taylor** di f, di ordine 2, centrata in (a,b), con *resto di Lagrange.* Si ricava da quella la Formula di Taylor di f, di ordine 2, centrata in (a,b), con resto *di Peano.* La *matrice hessiana* di f. Usando una notazione vettoriale, con p il punto fissato, h l'incremento:

$$f(p+h) = f(p) + \nabla f(p) \cdot h + \frac{1}{2} h^T H_f(p)\, h + o(||h||^2)\,, \quad h \to 0\,.$$

Forme quadratiche: definizione ed esempi. Forme quadratiche definite positive, negative, semi-definite, indefinite. Criteri relativi: (i) test sugli autovalori; (ii) criterio di Jacobi (tramite i determinanti dei minori principali). Esempi.
TEOREMA: condizioni "del secondo ordine" per la ricerca di punti di estremo relativo per funzioni $f \in C^2(D)$. Analisi della 'definitezza' della matrice hessiana.

15. Mar. 7/3/06 – 2 ore
Commenti sugli elaborati dell'esercitazione del 27 febbraio.

Integrazione multipla. Introduzione agli integrali doppi. Funzioni limitate su un rettangolo: partizioni e somme di Riemann. Definizione di funzione (limitata) integrabile (secondo Riemann) su un rettangolo. Proprietà degli integrali: linearità, monotonia, etc.

16. Gio. 9/3/06 – 2 ore
Integrazione multipla (continuazione). Insiemi *trascurabili.* Teorema di integrabilità (s.d.). Teorema di Fubini (s.d.). Integrazione su *domini semplici* rispetto ad un asse.
Cenni alla misura di Peano-Jordan. **Applicazioni geometriche e fisiche** degli integrali doppi: baricentro di figura, centro di massa di una lamina non omogenea.

17. Ven. 10/3/06 – 2 ore (Lezione del 14 Marzo *anticipata*)
Esercizi sul calcolo di integrali doppi e in particolare di baricentri. Momento statico rispetto ad un asse.
Trasformazioni regolari e *cambiamento di variabili* negli integrali doppi.

18. Gio. 16/3/06 – 2 ore
Illustrazione di integrali in cui è necessario e/o naturale introdurre un cambio di coordinate.

Funzioni a valori vettoriali: $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $m > 1$. Estensione al caso $m > 1$ di concetti fondamentali quali quelli di limite, continuità, e differenziabilità. Matrice *jacobiana*. Derivazione di trasformazioni composte. La regola della catena. Trasformazioni $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *invertibili*; matrice jacobiana della trasformazione inversa.

Integrali tripli (*cenni*). Domini *semplici* rispetto ad un asse. Formule di riduzione per il calcolo di integrali tripli su domini semplici. Esempi.