Anno Accademico 2002–2003
Università degli Studi di Firenze
Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio

Corso di Analisi Matematica II

Periodo: 25 novembre 2002 – 25 gennaio 2003.
Docente: Francesca Bucci.

Programma sintetico

1. Formula di Taylor, sviluppi asintotici.
2. Teoremi di de l'Hôpital per il calcolo di limiti.
3. L'integrale di Riemann.
4. Il calcolo degli integrali. Aree di figure piane.
5. Integrali generalizzati.
6. Introduzione alle Equazioni Differenziali Ordinarie (EDO). EDO a variabili separabili.
7. EDO lineari del I ordine a coefficienti continui. EDO lineari del II ordine a coefficienti costanti.

Testo di riferimento ed altri testi consigliati

- R.A. Adams, *Calcolo differenziale 1* (Seconda edizione), Casa Editrice Ambrosiana, Milano, 1999 (testo di riferimento).
- M. Giaquinta e G. Modica, *ANALISI MATEMATICA (1. Funzioni di una variabile)*, Ristampa 1999, Pitagora Editrice, Bologna.
- F. Conti, P. Acquistapace e A. Savojni, *Analisi Matematica (Teoria e Applicazioni)*, Mc Graw Hill, 2001.
- M. Bramanti, C.D. Pagani e S. Salsa, *Matematica (Calcolo infinitesimale e algebra lineare)*, Zanichelli, 2000.
- B.P. Demidovic, *Esercizi e problemi di Analisi Matematica*, Editori Riuniti (solo per esercizi/problemi).

Programma dettagliato[1]

[1]s.d. significa senza dimostrazione.

Formula di Taylor. *Il tema iniziale del corso si riallaccia al programma del corso Analisi Matematica I. In particolare, si prosegue sul tema 'Applicazioni del Teorema del valor medio'.* Il teorema del valor medio generalizzato (s.d.). Approssimazione di funzioni: approssimazioni lineari, quadratiche. Formula di Taylor con resto di Lagrange (dimostrata la formula di ordine 1 utilizzando il teorema del valor medio generalizzato). Polinomi di Taylor. Funzioni con derivate di ordine arbitrario. Calcolo dei polinomi di Taylor di ordine n delle funzioni e^x, $\sin x$.

Applicazione della formula di Taylor con resto di Lagrange al calcolo approssimato di numeri. Calcolo di un valore approssimato di $\sqrt{e}$ con due cifre decimali corrette.

Polinomio di Taylor della funzione $\cos x$, di ordine n, con centro in 0. Sviluppi delle funzioni: $\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{1+x}$, $\frac{1}{1+x^2}$.

Formula di Taylor con resto di Peano. Il simbolo di Landau *o piccolo*: significato della notazione $f(x) = o(g(x))$, $x \to a$. Applicazione al calcolo di limiti. Esercizio: calcolo del limite $\lim_{x\to 0}(x - \sin x)/x^3$.

Definizione: l'espressione $f(x)^{g(x)}$, con $f(x) > 0$, ha il significato di $e^{g(x)\log f(x)}$.

Le funzioni coseno e seno iperbolico ($\cosh x$ e $\sinh x$, rispettivamente).

Forme indeterminate e regole di de l'Hôpital: primo e secondo teorema di de l'Hôpital. Confronto tra diversi metodi per il calcolo dei limiti. Richiamo dei limiti notevoli $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$, $\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t^2} = \frac{1}{2}$. I limiti notevoli $\lim_{t\to 0} \frac{e^t-1}{t} = 1$, $\lim_{t\to 0} \frac{a^t-1}{t} = \log a$, $a > 0$, come conseguenza del fatto $De^t = e^t$.

L'integrale di Riemann. *Alcuni preliminari:* Somme e simbolo di sommatoria. Esempi di somme con la notazione di sommatoria. Calcolo di alcune somme:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}\,, \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,, \quad \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}\,, x \neq 1\,.$$

Aree come limiti di somme. Partizioni e somme di Riemann. Somme superiori e inferiori per funzioni continue in un intervallo $[a, b]$: definizione di integrale definito.

Somme di Riemann generali. L'integrale come limite di somme di Riemann. Proprietà dell'integrale definito.

PROPOSIZIONE: *Le funzioni continue su un intervallo chiuso e limitato* $[a, b]$ *sono integrabili* (s.d.). Estensione della definizione di integrale (definito) ed altre classi di funzioni integrabili in $[a, b]$ (s.d.): funzioni monotòne e limitate in $[a, b]$; funzioni continue a tratti (o a pezzi).

Primitive e integrali indefiniti. Esempi. Teorema della media integrale. Funzioni integrali. TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE (con dim.).

Applicazione del Teorema fondamentale del calcolo integrale. Derivazione di funzioni composte da funzioni integrali; esempi.

Il calcolo degli integrali. Una tabella di integrali indefiniti. Funzioni elementari le cui primitive *non* sono esprimibili mediante funzioni elementari (e.g., $\int e^{-t^2} \mathrm{d}t$).

Integrazione di funzioni razionali $\frac{P(x)}{Q(x)}$, con $P(x)$ e $Q(x)$ polinomi: richiami sulla divisione di polinomi, riduzione al caso in cui il grado del numeratore $P(x)$ è inferiore al grado del denominatore $Q(x)$. Analisi del caso in cui $Q(x)$ è un trinomio di secondo grado. Decomposizione delle funzioni razionali in frazioni semplici. Analisi del caso in cui il denominatore $Q(x)$ ha grado due: $Q(x)$ con due radici reali, $Q(x)$ con una radice di molteplicità due, $Q(x)$ irriducibile; esempi. Il caso in cui il denominatore $Q(x)$ ha grado tre; esempi.

Tecniche di integrazione. Integrazione per parti; esempi. Gli integrali $\int \cos^2 x\, dx$, $\int \sin^2 x\, dx$. Uso dell'integrazione per parti per ottenere formule di riduzione (e dunque successioni definite per ricorrenza). Calcolo di $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx$ (introduzione del fattoriale doppio $n!!$).

Integrazione per sostituzione. Sostituzioni ammissibili, formula di integrazione per sostituzione. Integrali $\int \phi(\sqrt{a^2 - x^2})\, dx$, $\int \phi(\sqrt{a^2 + x^2})\, dx$, $\int \phi(\sqrt{x^2 - a^2})\, dx$: le sostituzioni trigonometriche $x = a \sin t$, $x = a \tan t$ (oppure $x = a \sinh t$), $x = a \sec t$ (oppure $x = a \cosh t$). Esempi. La sostituzione $x = \tan(\theta/2)$.

Applicazioni dell'integrale al calcolo di aree di regioni piane.

Integrali generalizzati (o impropri). Integrali generalizzati di primo tipo (l'insieme di integrazione non è limitato). Definizione di funzione f integrabile in senso generalizzato in $[a, +\infty)$ (o in $(-\infty, b]$). Integrali convergenti, integrali divergenti. Esempi. Analisi della convergenza dell'integrale $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\, dx$, al variare del parametro p (converge se e solo se $p > 1$).

Integrali impropri di secondo tipo (la funzione integranda non è limitata in un intorno di un punto). Definizione di integrabilità in senso improprio in (a, b) per una funzione f illimitata vicino ad a (o vicino a b). Integrali convergenti, divergenti. Esempi. Analisi della convergenza dell'integrale $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\, dx$ al variare del parametro p (converge se e solo se $p < 1$).

Determinazione della convergenza o divergenza di un integrale improprio: *Teorema: Il criterio del confronto* (s.d.). Esempi. Convergenza dell'integrale $\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt$ mediante il criterio del confronto. (Importante (s.d.): $\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

Introduzione alle Equazioni Differenziali Ordinarie (EDO). Primi esempi di EDO del primo ordine: equazione della crescita e del decadimento. Equazione logistica. Equazioni a variabili separabili. Definizione di soluzione. Risoluzione di EDO a variabili separabili. L'equazione logistica come equazione a variabili separabili. Altri esempi; soluzioni di $y' = y^2$. Definizione di soluzione di un problema ai valori iniziali.

EDO lineari del primo ordine (a coefficienti continui). Integrale generale dell'equazione, soluzione dei corrispondenti problemi ai valori iniziali.

Numeri complessi e funzioni esponenziali complesse (*Tema condiviso con il corso di Fisica I*). Richiami preliminari (dal corso di Geometria): forma algebrica dei numeri complessi, aritmetica complessa. Rappresentazione geometrica dei numeri complessi (diagramma di Argand), il piano di Gauss. Forma trigonometrica (o polare) di un numero complesso: modulo, argomento, argomento principale.

Operazioni di prodotto, divisione ed elevamento a potenza: Teorema di de Moivre. Definizione dell'esponenziale $e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ (formula di Eulero). Esempi sul calcolo di potenze di numeri complessi. Radici di un numero complesso (cenni); esempi.

Funzioni di variabile complessa (a valori complessi). Definizione della funzione esponenziale e^z, $z \in \mathbb{C}$. Continuità e derivabilità per funzioni complesse. Un caso importante: funzioni di variabile reale a valori complessi. Derivata della funzione $t \to e^{i\omega t}$.

EDO (*continua*). L'equazione del primo ordine $x' = f(t, x)$: definizione di soluzione. EDO a variabili separabili; esempi. Il caso *lineare*: l'equazione $x' = a(t)x + b(t)$, con a, $b \in C(I)$, $I \subseteq \mathbb{R}$. Determinazione dell'integrale generale, problema di Cauchy (o ai valori iniziali) associato e unicità della soluzione corrispondente.

EDO nonlineari. Soluzioni locali e soluzioni globali. Esempio di *blow up* (scoppiamento in tempo finito): soluzione del problema $x' = x^2$, $x(0) = 1$.

EDO lineari del secondo ordine a coefficienti costanti. Analisi dell'equazione omogenea $ax'' + bx' + cx = 0$: l'equazione (algebrica) *ausiliaria* $az^2 + bz + c = 0$. Radici e soluzioni linearmente indipendenti (sistema fondamentale di soluzioni). Determinazione dell'integrale generale come combinazione lineare di soluzioni linearmente indipendenti.

EDO lineari del secondo ordine: l'equazione non omogenea $ax'' + bx' + cx = f(t)$, a, b, c costanti, $f \in C(I)$, $I \subseteq \mathbb{R}$. Integrale generale dell'equazione come somma dell'integrale generale dell'equazione omogenea associata e di una soluzione particolare dell'equazione non omogenea. Il problema della ricerca di una soluzione particolare. Analisi del caso in cui $f(t) = P_m(t)e^{\mu t}$, $P_m(t)$ polinomio di grado m, $\mu \in \mathbb{C}$: il metodo dei coefficienti indeterminati.