Anno Accademico 2002–2003
Università degli Studi di Firenze
Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio

Corso di Analisi Matematica I

Periodo: 23 settembre – 9 novembre 2002.
Docente: Francesca Bucci.

Programma sintetico

1. Numeri, applicazioni tra insiemi, funzioni elementari.
2. Limiti e continuità.
3. Il concetto di variazione o derivata.
4. Alcune applicazioni delle derivate. Ricerca di valori estremi.
5. Le funzioni trascendenti (funzioni logaritmiche ed esponenziali).

Testo di riferimento ed altri testi consigliati

- R.A. Adams, *Calcolo differenziale 1* (Seconda edizione), Casa Editrice Ambrosiana, Milano, 1999 (testo di riferimento).
- M. Giaquinta e G. Modica, *ANALISI MATEMATICA (1. Funzioni di una variabile)*, Ristampa 1999, Pitagora Editrice, Bologna.
- F. Conti, P. Acquistapace e A. Savojni, *Analisi Matematica (Teoria e Applicazioni)*, Mc Graw Hill, 2001.
- M. Bramanti, C.D. Pagani e S. Salsa, *Matematica (Calcolo infinitesimale e algebra lineare)*, Zanichelli, 2000.
- B.P. Demidovic, *Esercizi e problemi di Analisi Matematica*, Editori Riuniti (solo per esercizi/problemi).

Programma dettagliato

Preliminari. Numeri reali e retta reale. Proprietà algebriche, d'ordine e di completezza dei numeri reali. Numeri interi e numeri razionali. Intervalli. L'unione e l'intersezione insiemistica. Insiemi limitati in $\mathbb{R}$.

L'alfabeto greco.

Il valore assoluto: definizione e proprietà. La disuguaglianza triangolare (con dim.). Esempi. Equazioni e disequazioni con valori assoluti. La radice quadrata di un numero positivo. $\sqrt{2}$ non è un numero razionale (dimostrato, procedendo *per assurdo*). Importante: $\sqrt{x^2} = |x|$.

Coordinate cartesiane nel piano. Incrementi e distanze. Linee rette. Equazioni delle rette. Equazioni quadratiche. Circonferenze, parabole, ellissi, iperboli. Completamento del quadrato.

Applicazioni tra insiemi, funzioni di variabile reale. Dominio, codominio, immagine. Funzioni di variabile reale. Grafico di una funzione. Grafici di alcune funzioni elementari ($f(x) = x^2$, x^3, $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$, $|x|$, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$). Funzioni pari, dispari e proprietà di simmetria dei relativi grafici. La funzione parte intera: $[x]$. Grafici ottenuti da grafici di funzioni elementari tramite traslazioni e/o riflessioni. Funzioni razionali (rapporto di polinomi). *Richiamo*: l'operazione di divisione tra polinomi. Operazioni tra funzioni. Composizione di funzioni. Esempi.

Funzioni iniettive, funzioni suriettive, funzioni biunivoche. Esempi. Funzione inversa. Identità di cancellazione.

Funzioni trigonometriche. Lunghezza d'arco, misura degli angoli in radianti. Seno e coseno. Identità fondamentale ($\cos^2 t + \sin^2 t = 1\ \forall t$). Periodicità delle funzioni circolari. Funzioni periodiche, periodo minimo; esempi. Coseno e seno di angoli particolari (ad es., $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$, etc.). Grafici delle funzioni $\sin x$ e $\cos x$. Formule di addizione. Altre funzioni trigonometriche (in particolare, la tangente).

Il concetto di limite. L'area di un cerchio come "limite" dell'area di poligoni regolari inscritti. Limiti delle funzioni. Definizione informale, esempi. Definizione formale di limite. Alcuni limiti elementari. Limiti destro e sinistro. La funzione $sgn(x)$. Regole per il calcolo dei limiti. Esempi. Teorema dei carabinieri.

Limiti all'infinito: esempi e definizione formale. Limiti all'infinito per funzioni razionali: discussione di $\lim_{x\to+\infty} P(x)/Q(x)$ al variare dei gradi m, n di P e Q, rispettivamente. Definizione di $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Asintoti orizzontali e verticali.

Funzioni continue di variabile reale. Punti interni al dominio di una funzione, punti di frontiera. Esempi. Definizione di continuità in un punto. Continuità in un intervallo. Classi di funzioni continue: polinomi, funzioni razionali, potenze razionali ($x^{p/q}$), funzioni trigonometriche (seno, coseno, tangente, secante, etc.), la funzione valore assoluto.

Combinazione di funzioni continue (somma, prodotto, ...). TEOREMA: La composizione di funzioni continue è una funzione continua (s.d.). Discontiuità rimovibili ed estensioni continue. Esempi.

Proprietà delle funzioni continue. IL TEOREMA DI WIERSTRASS: *Una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato ammette valori massimo e minimo assoluti.* Formulazione matematica di problemi di massimo/minimo.

Il Teorema dei valori intermedi: applicazione alla ricerca della radici di equazioni. Il metodo di bisezione (cenni). Permanenza del segno.

Il concetto di derivata. La retta tangente al grafico di una funzione $y = f(x)$ in un punto P come "limite" di rette secanti. Esempi: le curve di equazione $y = x^2$, $y = \sqrt[3]{x}$, $y = \sqrt[3]{x^2}$, $y = |x|$. Punti cuspidali e punti angolosi, rette di appoggio. Rette normali. Rapporto incrementale e definizione di derivabilità di una funzione f in un punto x_0 interno al dominio. Derivate destra e sinistra ($f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$). La funzione derivata (prima) $x \mapsto f'(x)$.

Derivate di alcune funzioni elementari ($ax+b$, x^n, con $n = 1, 2, \ldots$, $\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}$, ...). Regole di derivazione. Derivate di funzioni ottenute tramite somma, moltiplicazione per una costante, prodotto, reciproco, quoziente. Esempi. Derivazione di funzioni composte (Teorema): la "regola della catena".

Il limite notevole $\lim_{x\to 0}(\sin x)/x = 1$ (dimostrato). Derivate delle funzioni trigonometriche ($\cos x$, $\sin x$, $\tan x$, $\sec x$, $\csc x$). Il limite notevole $\lim_{x\to 0}(1 - \cos x)/x^2 = 1/2$ (dimostrato).

Derivate di ordine superiore. Esempio: la funzione $y(t) = \cos(2t)$ verifica $y''(t) + 4y(t) = 0$ per ogni t. L'equazione (differenziale) dell'oscillatore armonico (§ 3.1). Funzioni con derivate di ogni ordine.

Uso delle derivate. *Derivazione implicita.* Rapidità di variazione media e istantanea: definizioni ed esempi. Regola generale della derivata di una potenza (tramite derivazione implicita). Variazioni collegate: esempi.

Valori estremi: massimi e minimi assoluti e relativi (o locali). TEOREMA DI FERMAT: *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di massimo o minimo relativo interno all'intervallo I. Se f è derivabile in x_0, allora $f'(x_0) = 0$.* Corollario: localizzazione degli estremi. Esempio: tra i triangoli isosceli di perimetro assegnato deteminare quello di area massima.

Immagini di funzioni continue in un intervallo. Esempi. Funzioni continue su un intervallo non chiuso e/o non limitato. Applicazione del Teorema di

Weierstrass: esistenza del valore minimo di funzioni continue che tendono a $+\infty$ per $x \to a^+$ e per $x \to b^-$. Esempio: ricerca delle dimensioni di un oggetto di forma cilindrica che rendono minima la superficie, fissato il volume.

Il Teorema del valor medio (o di Lagrange); il Teorema di Rolle (dimostrati). Interpretazione geometrica. Applicazioni del Teorema del valore medio. Funzioni con derivata nulla in un intervallo. Funzioni (monotòne) crescenti e decrescenti. Studio degli intervalli di monotonia di una funzione f mediante studio del segno della derivata prima f', e disegno di un grafico qualitativo. Esempi.

Studio di grafici di funzioni e applicazioni. Disuguaglianze tra funzioni su un intervallo. Ricerca delle radici reali di un polinomio, o di zeri di una generica funzione continua.

Insiemi convessi nel piano. Esempi. Definizione di funzione convessa in $[a, b]$. (*Attenzione: la definizione data è quella più usuale, valida per funzioni di una o più variabili, ed è diversa da quella del testo di riferimento, che è in seguito ricavata come proprietà delle funzioni convesse derivabili in* $[a, b]$*).* Interpretazione geometrica. Esempi. L'epigrafico E_f. Caratterizzazione delle funzioni convesse derivabili in $[a, b]$.

Funzioni f con derivata seconda $f''(x)$, $x \in [a, b]$. Studio del segno della derivata seonda per la determinazione degli intervalli in cui f è convessa (o concava). Esempi. Punti di flesso.

Grafici di funzioni inverse. Funzioni inverse derivabili: formula per il calcolo della derivata della funzione inversa.

Funzioni trigonometriche inverse. Funzione arcoseno ($\arcsin x$), funzione arcotangente ($\arctan x$). Proprietà principali, grafici. Calcolo delle derivate.

Funzioni trascendenti: le funzioni logaritmo ed esponenziale. Introduzione al logaritmo naturale per via geometrica: il grafico della funzione $1/x$, $x > 0$, e definizione della funzione $\ln x$ tramite l'area di una opportuna regione piana.

La funzione $\exp x$ come funzione inversa di $\ln x$. Il numero e. Crescita e decadimento delle funzioni esponenziale esponenziale e logaritmo. Comportamento asintotico e confronto tra logaritmi, potenze, esponenziali. Esponenziali e logaritmi generali (con base $a > 0$).