Diagonalizzazione di matrici

1 Autovalori ed autovettori

Ricordiamo che se $f: V \to V$ è una applicazione lineare di uno spazio vettoriale in se stesso, un suo *autovettore* di *autovalore* λ è un vettore $v \neq 0$ tale che

$$f(v) = \lambda v$$

L'insieme dei λ per i quali esistono autovettori si dice *spettro* della funzione f e si denota talora con $\sigma(f)$.

Teorema 1.1 *Se V è uno spazio vettoriale allora e $f: V \to V$ una applicazione lineare, allora:*
(1) *Lo spettro $\sigma(f)$ è un insieme finito (o anche vuoto).*
(2) *Se $\lambda \in \sigma(f)$ allora l'insieme*

$$V_\lambda := \{v \in V \mid v \neq 0,\ f(v) = \lambda v\}$$

è un sottospazio vettoriale di V la cui dimensione si dice molteplicità geometrica *dell'autovalore λ.*
(3) *Se $\sigma(f) = \{\lambda_1, ..., \lambda_k\}$ allora se $w_1 \in V_{\lambda_1}$, ...,$w_k \in V_{\lambda_k}$, i vettori $\{w_1, ..., w_k\}$ sono linearmente indipendenti (autovettori relativi ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti).*

Lo spazio V_λ degli autovettori relativi ad un autovalore λ si dice *autospazio* di λ.

Se $f: V \to V$ è una applicazione lineare, fissata una base $\{v_1, ..., v_n\}$ di V possiamo considerare per ogni vettore $v \in V$ il vettore $x \in \mathbb{R}^n$ delle sue coordinate rispetto a questa base, e sappiamo che

$$f(v) = Ax$$

dove A è una opportuna matrice (che dipende da f e dalla base).

Se fissiamo un'altra base $\{v'_1, ..., v'_n\}$ avremo delle altre coordinate $x' \in \mathbb{R}^n$ per lo stesso vettore v, e la relazione

$$f(v) = A'x'$$

dove A' è un'altra matrice. La relazione fra le matrici A e A' è data dalla

$$A' = CAC^{-1}$$

dove C è la matrice del cambiamento di base dalla base $\{v_1, ..., v_n\}$ alla base $\{w_1, ..., w_n\}$.

In effetti, la matrice C è quella che trasforma le coordinate di un vettore v rispetto alla base $\{v_1, ..., v_n\}$ nelle coordinate dello stesso vettore v ma rispetto alla base $\{w_1, ..., w_n\}$:

$$Cx = x'$$

Quindi abbiamo che $f(v) = A'x' = A'Cx = y'$ e $f(v) = Ax = y$; y è il vettore delle coordinate di $f(v)$ rispetto alla base $\{v_1, ..., v_n\}$ e y' è il vettore delle coordinate di $f(v)$ rispetto alla base $\{v'_1, ..., v'_n\}$, sicché $Cy = y'$ e troviamo quindi $CAx = A'Cx$, cioè la $A' = CAC^{-1}$.

Quindi le matrici che rappresentano una stessa applicazione lineare f si ottengono tutte le une dalle altre con operazioni del tipo CAC^{-1}, dove C è una qualsiasi matrice invertibile.

Se v è un autovalore di autovettore λ per f, allora possiamo scrivere

$$f(v) = \lambda v \Rightarrow Ax = \lambda x$$

Questo non dipende dalla base scelta per rappresentare f, dato che, se $Cx = x'$, allora

$$Ax = \lambda x \iff CAC^{-1}x' = CAx = \lambda Cx = \lambda x'$$

Quindi per trovare gli autovettori di una funzione lineare f, si può fissare una base e risolvere l'equazione

$$Ax = \lambda x$$

cioè il sistema $(A - \lambda I)x = 0$; questo sistema ha soluzioni non nulle se e solo se $\det(A - \lambda I) = 0$, e quindi per trovare gli autovalori di f basta risolvere l'equazione caratteristica

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

che è una equazione algebrica (polinomio uguagliato a zero). Una volta trovati gli autovalori, gli autovettori si trovano risolvendo i sistemi $Ax = \lambda x$.

Ad esempio troviamo gli autovalori della funzione $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ data da

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix}$$

Rispetto alla base canonica questa funzione è rappresentata dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

quindi l'equazione caratteristica è

$$0 = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

cioè $(1-\lambda)^2 + 1 = 0$ vale a dire $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$, da cui troviamo $\lambda = 1 \pm i$; quindi gli autovalori sono numeri complessi, il che vuol dire che lo spettro (reale) di f è vuoto.

Una classe di matrici che posseggono sempre autovalori reali sono le matrici simmetriche e le matrici hermitiane: per queste due classi di matrici vale il teorema spettrale. La versione reale è la seguente

Teorema 1.2 *Se $(V, \langle,\rangle)$ è uno spazio vettoriale con un prodotto scalare e se $f\colon V \to V$ è una funzione lineare autoaggiunta allora esiste una base di V formata da autovettori di f.*

La versione complessa è invece

Teorema 1.3 *Se $(V, \langle,\rangle)$ è uno spazio vettoriale con un prodotto hermitiano e se $f\colon V \to V$ è una funzione lineare autoaggiunta allora esiste una base di V formata da autovettori di f.*

Nel caso reale, fissata una base ortonormale, la matrice di f è simmetrica, mentre nel caso complesso è hermitiana. In ogni caso gli autovalori sono reali.

Dire che una funzione ha una base di autovettori vuol dire che in quella base la matrice che la rappresenta è diagonale: infatti se $\{v_1, ..., v_n\}$ è una base di autovalori relativi agli autovettori $\lambda_1, ..., \lambda_n$ (dove alcuni autovalori possono fra loro coincidere, se le molteplicità geometriche dei relativi autospazi sono maggiori di uno) allora

$$f(v_i) = \lambda_i v_i$$

e dato che la matrice che rappresenta f nella base $\{v_1, ..., v_n\}$ si ottiene valutando f sugli elementi di questa base, esprimendo il risultato come combinazione lineare degli elementi di questa base e prendendo i coefficienti di queste combinazioni e mettendoli in colonne a formare una matrice, troviamo che la matrice di f è proprio

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Quindi il teorema spettrale ha come corollario che una matrice simmetrica (o hermitiana) può sempre essere diagonalizzata.

Naturalmente ci sono anche altre matrici che possono essere diagonalizzate: una condizione necessaria e sufficiente è data come segue: il polinomio

$$p(A) = \det(A - \lambda I)$$

si dice *polinomio caratteristico* della matrice A: le sue radici sono esattamente gli autovalori di A.

Ciascuna radice ha una sua molteplicità algebrica: ad esempio la radice 3 ha molteplicità due nel polinomio $(\lambda - 3)^2(\lambda + 1)$.

Teorema 1.4 *Una matrice è diagonalizzabile se e solo se le molteplicità algebriche dei suoi autovalori coincidono con le loro molteplicità geometriche (cioè con le dimensioni dei relativi autospazi).*

Si noti che quando andiamo in cerca della diagonalizzazione di una matrice simmetrica o hermitiana, ci muoviamo in spazi con prodotti scalari o hermitiani, ed è conveniente lavorare sempre con basi ortonormali.

Ad esempio se vogliamo diagonalizzare una applicazione lineare autoaggiunta $f: V \to V$ allora prendiamo una base ortonormale $\{w_1, ..., w_n\}$ di V, col che identifichiamo V con $\mathbb{R}^n$ e il prodotto scalare su V col prodotto scalare canonico su $\mathbb{R}^n$; la matrice che rappresenta f in questa base sarà quindi una matrice simmetrica A, e la matrice che rappresenta f in un'altra base ortonormale $\{w'_1, ..., w'_n\}$ è una matrice simmetrica A', legata ad A dalla relazione

$$A' = CAC^{-1}$$

dove la matrice C è ortogonale, cioè $C^{-1} = C^T$, col che la relazione si semplifica nella

$$A' = CAC^T$$

Morale, se vogliamo determinare C^{-1}, invece che invertire una matrice ci siamo ridotti a calcolarne la trasposta, che è molto più semplice.

2 Esercizi

1) Consideriamo l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita come

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z \\ 4x - y \\ x + 3y - z \end{pmatrix}$$

Dimostrare che è invertibile e determinarne l'inversa. Scrivere le matrici di queste applicazioni lineari rispetto alla base canonica.

2) Date le basi

$$\mathcal{B}_1 \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad \mathcal{B}_2 \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

trovare le matrici del cambiamento di base dall'una all'altra e verificare che sono l'una l'inversa dell'altra.

3) Scrivere due basi non canoniche in $\mathbb{R}^3$ e determinare le matrici del cambiamento di base; fare lo stesso quando una delle due basi è quella canonica.

4) Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathbb{R}_3[x]$ dei polinomi reali di grado minore o uguale a tre: verificare che la derivazione per x è una applicazione lineare e scriverne la matrice in due coppie di basi.

5) Consideriamo lo spazio delle matrici *speciali*

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \subset M_2(\mathbb{R})$$

Dimostrare che si tratta di un sottospazio vettoriale, esibirne base e dimensione, scrivere una base in cui i commutatori $[e_i, e_j] = e_i e_j - e_j e_i$ siano multipli di elementi della base stessa e scrivere un isomorfismo di S con uno spazio vettoriale del tipo $\mathbb{R}^n$.

6) Consideriamo la *proiezione* $p : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ data da

$$p \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Scrivere la sua matrice A rispetto alle basi canoniche e la sua matrice A' rispetto ad altre due basi non canoniche; verificare la formula $A = D^{-1} A' C$ esplicitamente (D e C matrici del cambiamento di basi).

7) Risolvere l'equazione $\det\begin{pmatrix} t-1 & -1 & 1 \\ 0 & t-1 & 0 \\ -1 & 0 & t-1 \end{pmatrix} = 0$ in $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$.

8) Calcolare autovalori ed autovettori di $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e dire se è diagonalizzabile.

9) Considerare le seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

calcolarne gli autovalori e se possibile esibire una base in cui sono diagonali.

10) Consideriamo i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ed una funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che su questi vettori assuma i seguenti valori:

$$(*) \qquad f(v_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(v_2) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f(v_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(a) Dimostrare che esiste un'unica funzione lineare che soddisfa le tre equazioni (*); (b) Determinare la matrice $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$ di f rispetto alla base canonica; (c) Determinare una base del nucleo e dell'immagine di f; (d) Calcolare traccia e determinante della matrice $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$; (e) Dire se esiste una base $\mathcal{C} = (w_1, w_2, w_3)$ tale che la matrice $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f)$ che rappresenta f in questa base abbia determinante 1.

11) Calcolare la matrice

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}^{-60}$$