

# Serie

## 1 Definizioni

Una serie è una funzione  $\Sigma$  che trasforma una successione numerica  $\{s_n\}$  nella successione  $\{r_n\}$  delle sue *ridotte n-esime*

$$r_n = s_0 + s_1 + \cdots + s_n = \sum_{i=0}^n s_i$$

Se il limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n$  esiste ed è finito allora si dice che la serie converge; se il limite esiste ed è infinito si dice che la serie diverge; altrimenti si dice che la serie è indeterminata.

Per brevità si denota la serie delle ridotte di una successione  $\{a_n\}$  col simbolo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

*Questo è solo un simbolo, non è una somma di numeri!!!* Comunque se la serie converge al numero  $s$ , cioè se

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n a_i$$

la scrittura precedente denota proprio il numero  $s$ , che si dice *somma della serie*.

In generale ha interesse stabilire se una serie numerica converga, diverga o sia indeterminata: il calcolo esatto della somma, nel caso in cui converga, è difficile e richiede tecniche più raffinate di quelle a nostra disposizione.

**Esempio 1.1** Consideriamo la serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

per un fissato  $x \in \mathbb{R}$ ; allora, dato che la sua ridotta  $n$ -esima si scrive come

$$r_n = x^0 + x^1 + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

(basta osservare che  $(1 - x)(x^0 + x^1 + x^2 + \cdots + x^n) = 1 - x^{n+1}$ ) abbiamo che *la serie geometrica converge se  $|x| < 1$ , diverge se  $|x| > 1$  oppure se  $x = 1$  ed è indeterminata se  $x = -1$ .*

Se una serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

ha termini *positivi* ci sono alcuni criteri utili di convergenza:

**Criterio del confronto.** *Se  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  e  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  sono serie a termini positivi e se esiste  $n_0 \in \mathbb{N}$  tale che per ogni  $n > n_0$  si abbia*

$$a_n \leq b_n$$

*allora: se  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  converge allora converge anche  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ; se  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  diverge allora anche  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  diverge.*

Per applicare questo criterio dobbiamo quindi avere a disposizione una serie con lo stesso comportamento di quella che vogliamo studiare. In genere si usa una serie geometrica, oppure la *serie armonica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$$

che converge se  $a > 1$  e diverge se  $a \leq 1$ .

**Criterio della radice.** *Se*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$$

*allora la serie converge. Se invece*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$$

*allora la serie diverge.*

Se il limite è uno nulla si può dire sulla serie. Ad esempio la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{2^n}$$

converge dato che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^2 + 1}{2^n}} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 + 1} = \frac{1}{2} < 1$$

mentre la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^n}$$

diverge in quanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{2^n}} = \frac{3}{2} > 1$$

Per la serie armonica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

abbiamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$$

e quindi non possiamo dire nulla.

**Criterio del rapporto.** *Se*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$$

*allora la serie converge*

**ATTENZIONE:** a differenza del criterio della radice, se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$$

non possiamo dire nulla sulla serie. Ad esempio la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

dove

$$a_n = \begin{cases} 2^{-n} & \text{se } n \text{ è pari} \\ 3^{-n} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

converge, dato che  $a_n \leq 2^{-n}$  e la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}$  converge, tuttavia abbiamo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$$

La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

converge, dato che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!n^n}{n!(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n$$

e quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{e} < 1$$

Il seguente è un criterio di divergenza:

**Condizione necessaria per le serie.** *Se*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$$

*allora la serie a termini positivi  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  non può convergere.*

Per le serie a segni alterni vige il criterio di Leibniz

**Criterio di Leibniz.** *La serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

*converge se esiste  $n_0 \in \mathbb{N}$  tale che per ogni  $n \geq n_0$  si abbia  $a_n < a_{n+1}$  e se*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

**Esempio 1.2** Si studi al variare di  $a \in \mathbb{R}$  la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{\sqrt{3+n+2n^a}}$$

Intanto notiamo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{\sqrt{3+n+2n^a}} = 0 \iff a > 2$$

col che, per  $a \leq 2$  la serie non può convergere. Se  $a > 2$  usiamo il criterio di Leibniz: notiamo che la funzione

$$\frac{n+1}{\sqrt{3+n+2n^a}}$$

è crescente da un certo indice in poi: un modo per vederlo è considerare la funzione

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{3+x+2x^a}}$$

e dimostrare che la derivata prima è positiva per un certo  $x$  in poi. Quindi per il criterio di Leibniz la serie converge per  $a > 2$ .

Il criterio del confronto si può usare più facilmente per dimostrare la convergenza o divergenza di una serie se si sostituisce al termine generico  $a_n$  della serie un termine che ha lo stesso ordine di infinitesimo.

**Esempio 1.3** Per quali valori di  $a \in \mathbb{R}$  la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{\cos \frac{3}{n^3}}{\cos \frac{2}{n^3}} \right)^{n^a}$$

converge. Notiamo che la serie ha termini positivi: possiamo scriverne il termine generico come

$$a_n = \left( \frac{\cos \frac{3}{n^3}}{\cos \frac{2}{n^3}} \right)^{n^a} = e^{n^a \log \cos \frac{3}{n^3} - n^a \log \cos \frac{2}{n^3}}$$

Ora poniamo  $x = 1/n$  e studiamo la funzione

$$f(x) = e^{\frac{1}{x^a} (\log \cos 3x^3 - \log \cos 2x^3)}$$

per  $x \rightarrow 0$  (cioè per  $n \rightarrow \infty$ ); approssimiamo il coseno come

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$$

e troviamo che

$$\log(\cos x) = \log(1 + (\cos x - 1)) = \cos x - 1 + \dots = -\frac{x^2}{2} + \dots$$

da cui

$$\log \cos \frac{3}{n^3} - \log \cos \frac{2}{n^3} = -\frac{1}{2} \frac{9}{n^6} + \frac{1}{2} \frac{4}{n^6} + \dots = -\frac{5}{2n^6} + \dots$$

Quindi il termine  $a_n$  è dello stesso ordine di infinitesimo di

$$e^{-\frac{5}{2n^6} n^a} = e^{-\frac{5}{2n^{6-a}}}$$

Abbiamo quindi che per  $a > 6$  il termine generico si comporta come una serie del tipo  $e^{-n} = (1/e)^n$ , che è una serie geometrica convergente.

## 2 Esercizi

1) Dimostrare che la seguente serie converge e calcolarne la somma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

2) Dimostrare che la seguente serie converge e calcolarne la somma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

Stabilire il comportamento delle seguenti serie:

3)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n-1}$$

4)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{2n+1} \right)^n$$

5)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left( 1 + \frac{1}{2} \right)^n$$

6)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^{10}}$$

7)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n!}$$

8)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$$

9)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n}{(2^n+1)^2}$$

10)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{2n^2 + 2n + 1}{5n^2 + 2n + 1} \right)^n$$

11)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log \left( 1 + \frac{1}{n} \right)$$

12)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right)$$

13)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 - e^{-\frac{1}{n^2}} \right)$$

14)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n \log \log n}$$

15)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2}$$

16)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^a n}$$

17)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{1/n} \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1} dx$$

18)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{1/n} \frac{\operatorname{sen}^3 x}{x^4 + 1} dx$$

[Le risposte nella pagina seguente]

### 3 Risposte

1) La somma è  $1/2$ : basta notare che

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

e calcolare induttivamente la somma delle ridotte  $n$ -esime facendone poi il limite.

2) La somma è  $1/4$ : bisogna spezzare il termine  $a_n$  come

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right)$$

3) Divergente.

4) Convergente.

5) Divergente.

6) Divergente.

7) Convergente.

8) Convergente.

9) Divergente.

10) Convergente.

11) Divergente.

12) Convergente.

13) Convergente.

14) Divergente.

15) Convergente.

16) Convergente per  $a > 1$ , divergente per  $0 < a \leq 1$ .

17) Convergente (l'integrale è minore di  $2/(3n^{3/2})$ ).

18) Convergente (l'integrale è minore di  $1/(4n^4)$ ).