

# Prodotti scalari ed hermitiani

## 1 Spazi duali

Sappiamo già che se  $V$  e  $W$  sono spazi vettoriali allora l'insieme  $L(V, W)$  delle applicazioni lineari  $f: V \rightarrow W$  è pure uno spazio vettoriale, di dimensione pari al prodotto delle dimensioni di  $V$  e di  $W$ .

Un caso particolarmente importante si ha quando  $W$  ha dimensione 1, cioè è isomorfo a  $\mathbb{R}$ ; in questo caso lo spazio  $L(V, \mathbb{R})$  si denota col simbolo  $V^*$  e si dice *spazio vettoriale duale di  $V$* , ed i suoi elementi si chiamano *funzionali lineari* o anche *forme lineari*.

Un funzionale lineare è quindi una funzione  $f: V \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

$$f(av + bw) = af(v) + bf(w)$$

Lo spazio  $V^*$  ha la stessa dimensione di  $V$ : per vederlo direttamente mostriamo come data una base di  $V$  si possa determinare una base di  $V^*$  (la sua base duale).

Se  $\{v_1, \dots, v_n\}$  è una base di  $V$ , vogliamo definire una base di  $V^*$ : gli elementi di questa base saranno dei funzionali lineari  $\{f_1, \dots, f_n\}$ ; ciascuno di essi è determinato dai valori che assume sugli elementi di  $V$ : se  $v \in V$  sappiamo che esistono unici  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$  tali che

$$v = x_1v_1 + \dots + x_nv_n$$

Allora, se  $f \in V^*$  abbiamo che

$$f(v) = f(x_1v_1 + \dots + x_nv_n) = x_1f(v_1) + \dots + x_nf(v_n)$$

quindi  $f$  è completamente determinato dai valori che assume su una base di  $V$ ; per definire gli elementi della base di  $V^*$  che andiamo cercando basterà allora dire quanto valgono sugli elementi della base  $\{v_1, \dots, v_n\}$ ; poniamo

$$f_i(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

dove  $\delta_{ij}$  denota 1 o 0 a seconda che  $i = j$  oppure  $i \neq j$  e si dice *simbolo di Kronecker* (dal nome del matematico che lo introdusse).

In particolare notiamo che  $f_i(v) = x_i$ , cioè il funzionale  $f_i$  applicato ad un qualsiasi vettore restituisce la sua  $i$ -esima coordinata rispetto alla base  $\{v_1, \dots, v_n\}$ .

**Teorema 1.1** *I vettori  $\{f_1, \dots, f_n\}$  formano una base dello spazio  $V^*$ .*

DIMOSTRAZIONE: Dimostriamo che i vettori  $\{f_1, \dots, f_n\}$  generano  $V^*$ : se  $f \in V^*$  allora, per ogni  $v \in V$

$$f(v) = x_1 f(v_1) + \dots + x_n f(v_n) = f_1(v) f(v_1) + \dots + f_n(v) f(v_n)$$

Abbiamo cioè espresso  $f(v)$  come combinazione lineare di  $f_1(v), \dots, f_n(v)$  (con coefficienti  $f(v_1), \dots, f(v_n)$ ) e questo vuol dire che  $f$  è combinazione lineare di  $f_1, \dots, f_n$  che quindi generano  $V^*$ .

Dimostriamo l'indipendenza lineare: supponiamo che

$$a_1 f_1 + \dots + a_n f_n = 0$$

Quindi, per ogni  $v \in V$  abbiamo

$$a_1 f_1(v) + \dots + a_n f_n(v) = 0$$

Prendiamo ad esempio  $v = v_1$ : allora, per definizione degli  $f_i$ , troviamo

$$a_1 f_1(v_1) = a_1 = 0$$

Allo stesso modo per  $v = v_2, \dots, v_n$  troviamo  $a_2 = \dots = a_n = 0$ , quindi  $\{f_1, \dots, f_n\}$  sono linearmente indipendenti.

CVD

Tutto quello che abbiamo detto per spazi vettoriali sui reali si può dire, *mutatis mutandis*, per spazi vettoriali complessi: un funzionale lineare complesso è una funzione lineare  $f: V \rightarrow \mathbb{C}$ , etc.

Notiamo che un funzionale lineare scritto in coordinate ha sempre la forma di una funzione

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$$

dove  $(x_1, \dots, x_n)$  sono le coordinate del vettore sul quale calcoliamo  $f$ ; in generale una espressione della forma  $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$  può vedersi come una funzione tanto delle  $a_1, \dots, a_n$  quanto delle  $x_1, \dots, x_n$ : questa idea conduce al concetto di prodotto scalare.

## 2 Prodotti scalari

**Definizione 2.1** Se  $V$  è uno spazio vettoriale, un prodotto scalare è una funzione  $f: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  che goda delle seguenti proprietà:

- (1)  $f(au + bv, w) = af(u, w) + bf(v, w)$
- (2)  $f(u, av + bw) = af(u, v) + bf(u, w)$
- (3)  $f(u, v) = f(v, u)$
- (4)  $f(u, u) \geq 0$  e  $f(u, u) = 0 \iff u = 0$   
con  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $u, v, w \in V$ .

Si noti che una qualsiasi delle (1),(2) si deduce dall'altra per mezzo della (3); un prodotto scalare è quindi una funzione di due variabili vettoriali a valori reali che sia lineare in ciascuna delle due variabili (1,2), simmetrica (3) e definita positiva (4).

La (4) ci dice in particolare che se  $f(u, v) = 0$  per ogni  $v \in V$  allora  $u = 0$ ; diciamo quindi che il prodotto scalare è *non degenerare*.

**Esempio 2.1** Un esempio di prodotto scalare è il *prodotto scalare canonico*: in  $\mathbb{R}^n$  scriviamo

$$f(v, w) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$$

se  $(x_1, \dots, x_n)$  sono le coordinate di  $v$  rispetto alla base canonica e  $(y_1, \dots, y_n)$  sono le coordinate di  $w$  rispetto alla base canonica.

Il prodotto scalare canonico si denota con  $\langle v, w \rangle$ , e spesso un generico prodotto scalare si denota con questa stessa simbologia.

**Esempio 2.2** Consideriamo lo spazio  $M_n(\mathbb{R})$  delle matrici  $n \times n$ : possiamo allora definire il prodotto scalare

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB)$$

dove  $\text{tr}(A)$  è la traccia di una matrice, cioè la somma degli elementi della diagonale. In effetti

$$\text{tr}((aA + bB)C) = \text{tr}(a(AC) + b(BC)) = a\text{tr}(AC) + b\text{tr}(BC)$$

cioè la (1); allo stesso modo si verifica la (2); inoltre

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$$

(esercizio per il lettore) quindi la (3); infine<sup>1</sup>

$$\operatorname{tr}(A^2) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}a_{ji} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2$$

(dove  $a_{ij}$  sono i coefficienti della matrice  $A$ ) quindi  $\operatorname{tr}(A^2) \geq 0$  ed è nullo se e solo se ciascun coefficiente della matrice è nullo, cioè se e solo se la matrice è nulla.

Dato che il prodotto scalare canonico è dato dalla formula

$$\langle v, w \rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$$

è legato alla nozione di distanza; infatti se  $P$  e  $Q$  sono punti nello spazio  $\mathbb{R}^n$  di coordinate  $(p_1, \dots, p_n)$  e  $(q_1, \dots, q_n)$  la loro distanza è data dalla formula pitagorica

$$d(P, Q) = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + \cdots + (p_n - q_n)^2}$$

Ma  $(p_1 - q_1, \dots, p_n - q_n)$  sono le coordinate della differenza di due punti, cioè del vettore  $v$  che da  $Q$  va a  $P$ ; la lunghezza di questo vettore è esattamente la distanza fra  $P$  e  $Q$ , e si tratta proprio di

$$\sqrt{\langle v, v \rangle}$$

Quindi *la radice quadrata del prodotto scalare canonico rappresenta la lunghezza di un vettore*. Inoltre, dato il legame che c'è fra angoli, cateti ed ipotenusa in un triangolo rettangolo, troviamo che *il prodotto scalare fra due vettori è il prodotto delle loro lunghezze per il coseno dell'angolo da essi formato*. Questa ultima osservazione è alla base della seguente

**Definizione 2.2** *Due vettori  $v, w \in V$  in uno spazio vettoriale  $V$  dotato di un prodotto scalare  $\langle, \rangle$  si dicono ortogonali se  $\langle v, w \rangle = 0$ .*

Si noti che due vettori ortogonali non possono essere linearmente dipendenti: infatti dire che sono linearmente dipendenti vuol dire che sono paralleli.

**Definizione 2.3** *Se  $V$  è uno spazio vettoriale  $V$  dotato di un prodotto scalare  $\langle, \rangle$  una sua base  $\{v_1, \dots, v_n\}$  si dice base ortonormale se i suoi vettori sono ortogonali fra loro e hanno lunghezza uno, cioè se*

$$\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$$

---

<sup>1</sup>Si rammenti che se  $A$  ha coefficienti  $(a_{ij})$  e  $B$  ha coefficienti  $(b_{ij})$  allora il coefficiente di indici  $(i, j)$  del prodotto  $AB$  è  $\sum_k a_{ik}b_{ki}$ .

Lavorare con basi ortonormali semplifica moltissimo la vita quando si ha a che fare con prodotti scalari: fortunatamente esiste un algoritmo per trasformare una qualsiasi base in una base ortonormale: il procedimento di Gram-Schmidt.

L'idea base è ripetere la seguente operazione di proiezione ortogonale di un vettore su un altro: supponiamo di avere due vettori  $v, w$ ; la proiezione ortogonale di  $w$  su  $v$  è il vettore

$$w' = \frac{\langle w, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v$$

parallelo a  $v$ ; notiamo che il vettore

$$w'' = w - w'$$

è ortogonale a  $v$ , dato che

$$\begin{aligned} \langle w'', v \rangle &= \langle w - w', v \rangle = \langle w, v \rangle - \langle w' - v \rangle = \langle w, v \rangle - \left\langle \frac{\langle w, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v, v \right\rangle \\ &= \langle w, v \rangle - \frac{\langle w, v \rangle}{\langle v, v \rangle} \langle v, v \rangle = \langle w, v \rangle - \langle w, v \rangle = 0 \end{aligned}$$

Possiamo quindi trovare, dato  $v$  e un altro vettore non parallelo a  $v$ , un vettore ortogonale a  $v$ ; ripetendo induttivamente questo procedimento possiamo costruire una base ortonormale.

Supponiamo di avere una base  $\{v_1, \dots, v_n\}$  di uno spazio vettoriale  $V$  dotato di un prodotto scalare  $\langle, \rangle$ ; vogliamo costruirne una ortonormale, e lo faremo induttivamente.

Poniamo per prima cosa

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{\langle v_1, v_1 \rangle}} v_1$$

Questo è semplicemente un vettore di lunghezza uno parallelo a  $v_1$ ; poi definiamo  $w_2$  come  $v_2$  meno la proiezione ortogonale di  $v_2$  su  $w_1$  normalizzato a lunghezza uno:

$$w_2 = \frac{1}{\lambda_2} (v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1)$$

dove

$$\lambda_2 = \langle v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1, v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1 \rangle$$

In questo modo abbiamo un vettore  $w_2$  ortogonale a  $w_1$  e di lunghezza 1. Definiamo poi  $w_3$  come  $v_3$  meno le sue proiezioni ortogonali su  $w_1$  e  $w_2$  normalizzato a lunghezza uno:

$$w_3 = \frac{1}{\lambda_3} (v_3 - \langle v_3, w_1 \rangle w_1 - \langle v_3, w_2 \rangle w_2)$$

dove

$$\lambda_3 = \langle v_2 - \langle v_3, w_1 \rangle w_1 - \langle v_3, w_2 \rangle w_2, v_2 - \langle v_3, w_1 \rangle w_1 - \langle v_3, w_2 \rangle w_2 \rangle$$

e così via, fino all'ultimo

$$w_n = \frac{1}{\lambda_n} \left( v_n - \sum_{i=2}^{n-1} \langle v_n, w_i \rangle w_i \right)$$

con

$$\lambda_n = \langle v_n - \sum_{i=2}^{n-1} \langle v_n, w_i \rangle w_i, v_n - \sum_{i=2}^{n-1} \langle v_n, w_i \rangle w_i \rangle$$

Vediamo un esempio: consideriamo i vettori  $v_1 = (1, 1, -1)$ ,  $v_2 = (1, -2, 0)$ ,  $v_3 = (1, 0, -1)$ ; si tratta di una base di  $V$  dalla quale vogliamo trarre una base ortonormale rispetto al prodotto scalare canonico.

Cominciamo col definire

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Poi calcoliamo

$$w'_2 = v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ -5/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

e normalizziamolo

$$w_2 = \frac{1}{\sqrt{42}} \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Passiamo infine a  $w_3$ : prima calcoliamo  $v_3$  meno le sue proiezioni ortogonali su  $w_1$  e  $w_2$ :

$$w'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{5}{42} \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{14} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

e normalizziamolo

$$w_3 = -\frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Abbiamo detto che un prodotto scalare un  $\mathbb{R}^n$  non coincide necessariamente col prodotto scalare canonico. Tuttavia *in ogni base ortonormale un qualsiasi prodotto scalare assume la forma del prodotto canonico*.

In effetti se  $\{w_1, \dots, w_n\}$  è una base ortonormale di uno spazio vettoriale  $V$  equipaggiato con un prodotto scalare, allora abbiamo che, per ogni coppia di vettori  $v, w \in V$ :

$$\langle v, w \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i w_i, \sum_{j=1}^n y_j w_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \langle w_i, w_j \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

**Esempio 2.3** Consideriamo il prodotto scalare sullo spazio  $\mathbb{R}^3$  dato da

$$\langle v, w \rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + 2x_3y_3$$

La base canonica non è ortonormale rispetto a questo prodotto, dato che ad esempio

$$\langle e_1, e_2 \rangle = 1 \neq 0$$

Troviamo una base ortonormale di  $\mathbb{R}^3$  rispetto a questo prodotto scalare: applichiamo il procedimento di Gram-Schmidt alla base canonica. Poniamo per prima cosa

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{\langle e_1, e_1 \rangle}} e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Poi passiamo a  $w_2$ : intanto calcoliamo

$$e_2 - \langle e_2, w_1 \rangle w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(dato che  $\langle e_2, w_1 \rangle = 1/\sqrt{2}$ ), e normalizziamolo: dato che il prodotto scalare con se stesso è  $5/2$  troviamo

$$w_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Infine calcoliamo

$$e_3 - \langle e_3, w_1 \rangle w_1 - \langle e_3, w_2 \rangle w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{5} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 \\ -2/5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(dato che  $\langle e_3, w_1 \rangle = 0$  e  $\langle e_3, w_2 \rangle = \sqrt{2}/\sqrt{5}$ ) e normalizziamo:

$$w_3 = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} 1/5 \\ -2/5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ora abbiamo una base ortonormale: rispetto a questa base il prodotto scalare è quello canonico; ad esempio se prendiamo i primi due vettori della base canonica, il loro prodotto scalare è  $\langle e_1, e_2 \rangle = 1$ , come abbiamo visto: esprimiamo  $e_1$  ed  $e_2$  rispetto alla base  $\{w_1, w_2, w_3\}$ :

$$e_1 = \sqrt{2}w_1 \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}w_1 + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}w_2$$

e notiamo che  $\langle e_1, e_2 \rangle$  è proprio il prodotto delle coordinate relative allo stesso indice di  $e_1$  e  $e_2$  rispetto alla base  $\{w_1, w_2, w_3\}$ .

Se  $\langle, \rangle$  è un prodotto scalare su uno spazio vettoriale  $V$ , e se fissiamo una base  $\{v_1, \dots, v_n\}$  di  $V$ , allora la matrice  $A$  i cui elementi sono  $\langle v_i, v_j \rangle$  determina completamente il prodotto in quella base: precisamente

$$\langle v, w \rangle = v^T A w$$

( $X^T$  denota la trasposta di  $X$ :  $v^T$  è il vettore riga ottenuto trasponendo il vettore colonna  $v$ ).

Nel caso del prodotto scalare canonico abbiamo  $A = I$ . In generale  $A$  è una matrice simmetrica invertibile, definita positiva (l'ultima proprietà equivale a dire che il prodotto scalare da essa indotto è definito positivo).

La presenza di un prodotto scalare  $\langle, \rangle$  su uno spazio vettoriale  $V$  consente di stabilire un isomorfismo  $\sigma: V \rightarrow V^*$  e quindi di identificare i due spazi. Infatti definiamo

$$\sigma(v) = f_v$$

dove  $f_v$  è il funzionale lineare definito come

$$f_v(w) = \langle v, w \rangle$$

$\sigma$  è lineare dato che  $\sigma(au + bv) = f_{au+bv}$  e

$$f_{au+bv}(w) = \langle au + bv, w \rangle = a\langle u, w \rangle + b\langle v, w \rangle = af_u(w) + bf_v(w)$$

quindi

$$\sigma(au + bv) = f_{au+bv} = af_u + bf_v = a\sigma(u) + b\sigma(v)$$

Inoltre il nucleo di  $\sigma$  è zero dato che se  $\sigma(u) = 0$  allora  $f_u = 0$ , cioè per ogni  $w \in V$

$$0 = f_u(w) = \langle u, w \rangle$$

e quindi, dato che il prodotto è non degenere,  $u = 0$ .

Dato che  $V$  e  $V^*$  hanno la stessa dimensione,  $\sigma$  deve anche essere suriettiva, dato che la sua immagine deve avere la stessa dimensione di  $V^*$ , quindi è un isomorfismo.

**Definizione 2.4** *Se  $F: V \rightarrow V$  è una applicazione lineare su uno spazio vettoriale  $V$  dotato di prodotto scalare  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , la sua applicazione aggiunta è l'applicazione lineare  $F^*: V \rightarrow V$  tale che*

$$\langle F(v), w \rangle = \langle v, F^*(w) \rangle$$

L'aggiunta di una applicazione lineare esiste sempre ed è unica: che sia unica è facile vederlo: supponiamo che esista un'altra funzione lineare  $F': V \rightarrow V$  tale che  $\langle F(v), w \rangle = \langle v, F'(w) \rangle$ , allora la funzione lineare  $G(v) = F^*(v) - F'(v)$  è tale che

$$\langle v, G(w) \rangle = \langle v, F^*(w) - F'(w) \rangle = \langle F(v), w \rangle - \langle F(v), w \rangle = 0$$

per ogni  $v \in V$ , quindi  $G = 0$  e  $F^* = F'$ .

Per vedere l'esistenza di  $F^*$ , fissiamo una base ortonormale  $\{w_1, \dots, w_n\}$  in  $V$ : allora il prodotto scalare diviene

$$\langle v, w \rangle = x^T y$$

dove  $x = (x_1, \dots, x_n)$  sono le coordinate di  $v$  e  $y = (y_1, \dots, y_n)$  sono le coordinate di  $w$  (NB:  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , mentre  $v, w \in V$ ).

Inoltre in questa base la funzione  $F$  è rappresentata da una matrice  $A$  in modo che

$$F(v) = Ax$$

Definiamo allora

$$F^*(v) = A^T x$$

Abbiamo quindi che

$$\langle F(v), w \rangle = (Ax)^T y = x^T A^T y = x^T (A^T y) = \langle v, F^*(w) \rangle$$

**Definizione 2.5** *Una funzione lineare  $F: V \rightarrow V$  si dice autoaggiunta o simmetrica se  $F = F^*$ .*

Le funzioni lineari simmetriche rispetto ad un prodotto scalare sono molto importanti perché esiste sempre una base nella quale la matrice che le rappresenta è diagonale.

In modo analogo al caso reale si definiscono i prodotti hermitiani: si tratta dell'analogo di un prodotto scalare per uno spazio vettoriale complesso.

**Definizione 2.6** *Se  $V$  è uno spazio vettoriale complesso, un prodotto hermitiano è una funzione  $f: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  che goda delle seguenti proprietà:*

- (1)  $f(au + bv, w) = af(u, w) + bf(v, w)$
- (2)  $f(u, av + bw) = af(u, v) + bf(u, w)$
- (3)  $f(u, v) = \overline{f(v, u)}$
- (4)  $f(u, u) \geq 0$  e  $f(u, u) = 0 \iff u = 0$   
con  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $u, v, w \in V$ .

Si noti che la (4) ha senso, dato che  $f(u, u) = \overline{f(u, u)}$  per la (3) e quindi  $f(u, u) \in \mathbb{R}$ .

Tutti i concetti esposti per i prodotti scalari si riformulano e ridimostrano in modo analogo per i prodotti hermitiani. A livello di matrici, una matrice hermitiana è una matrice uguale alla sua trasposta coniugata:  $A = \overline{A^T}$ , quindi l'aggiunto di una funzione lineare complessa si definisce in coordinate ortonormali come  $F^*(v) = \overline{A^T}x$ .

### 3 Esercizi

Applicare il procedimento di Gram-Schmidt alle seguenti basi:

1)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2)

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

4)

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5) Sia  $V$  uno spazio vettoriale con un prodotto scalare  $\langle, \rangle$ : dimostrare che se  $\{v_1, \dots, v_n\}$  sono linearmente indipendenti se e solo se la matrice  $A$  i cui coefficienti sono  $\langle v_i, v_j \rangle$  è invertibile.

6) Se  $F: V \rightarrow V$  è lineare dimostrare che l'immagine della sua aggiunta è lo spazio ortogonale al nucleo di  $F$ .

7) Sia  $A$  una matrice reale simmetrica non nulla: dimostrare che la traccia di  $A^2$  è positiva.

8) Se  $A$  e  $B$  sono simmetriche dimostrare che  $AB$  è simmetrica se e solo se  $AB = BA$ .

[Le risposte nella pagina seguente]

## 4 Risposte

1)

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2)

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3)

$$\sqrt{14} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \frac{\sqrt{42}}{49} \begin{pmatrix} -39 \\ -6 \\ 42 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \frac{\sqrt{21}}{27} \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \sqrt{7} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4)

$$\sqrt{10} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \frac{\sqrt{610}}{100} \begin{pmatrix} 17 \\ -4 \\ -10 \\ 6 \\ 13 \end{pmatrix} \quad \frac{\sqrt{6299}}{3721} \begin{pmatrix} 6 \\ -38 \\ 27 \\ 57 \\ -29 \end{pmatrix} \quad \frac{\sqrt{65}}{338} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -5 \\ 1 \\ -11 \end{pmatrix} \quad \frac{81\sqrt{10}}{800} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$