

# Applicazioni lineari

## 1 Esempi di applicazioni lineari

**Definizione 1.1** *Se  $V$  e  $W$  sono spazi vettoriali, una applicazione lineare è una funzione  $f: V \rightarrow W$  tale che, per ogni  $v, w \in V$  e per ogni  $a, b \in \mathbb{R}$  si abbia*

$$f(av + bw) = af(v) + bf(w)$$

La parola “applicazione” è sinonimo di “funzione”.

**Definizione 1.2** *Se  $f: V \rightarrow W$  è una applicazione lineare allora il sottospazio vettoriale di  $V$  definito come*

$$\ker f = \{v \in V \mid f(v) = 0\}$$

*si dice nucleo di  $f$ .*

Il nucleo di  $f$  è quindi l'insieme dei vettori di  $V$  che vengono mandati da  $f$  nel vettore nullo; il nucleo misura quanto una funzione non è iniettiva:

**Teorema 1.1** *Una funzione lineare  $f: V \rightarrow W$  è iniettiva se e solo se  $\ker f = 0$  (con  $0$  indichiamo al solito lo spazio vettoriale nullo, formato dal solo vettore  $0$ ).*

**DIMOSTRAZIONE:** Supponiamo che  $f$  sia iniettiva, e dimostriamo che  $\ker f = 0$ ; se  $v \in \ker f$  allora  $f(v) = 0$ ; ma  $0 = f(0)$  (dato che  $f$  è lineare) quindi  $f(v) = f(0)$ , sicché  $v = 0$  per iniettività; questo mostra che l'unico elemento contenuto in  $\ker f$  è il vettore nullo.

Viceversa, se  $\ker f = 0$  mostriamo che  $f$  è iniettiva: supponiamo che  $f(v) = f(w)$ ; allora  $f(v) - f(w) = 0$ , cioè, dato che  $f$  è lineare,  $f(v - w) = 0$ , quindi  $v - w \in \ker f$ ; ma stiamo supponendo  $\ker f = 0$ , quindi  $v - w = 0$ , cioè  $v = w$ . Dunque da  $f(v) = f(w)$  segue che  $v = w$ , quindi  $f$  è iniettiva.

CVD

Quindi più piccolo è il nucleo, più la funzione tende ad essere iniettiva.

**Definizione 1.3** *Il sottospazio vettoriale di  $W$  definito come*

$$\text{Im } f = \{w \in W \mid \exists v \in V \quad f(v) = w\}$$

*si dice immagine di  $f$ .*

L'immagine di  $f$  è quindi l'insieme dei vettori di  $W$  che si possono ottenere come valori della funzione  $f$  su qualche elemento di  $v$ . L'immagine misura quanto una funzione è suriettiva: più grande è l'immagine, più la funzione tende ad essere suriettiva.

**Definizione 1.4** *Una applicazione lineare iniettiva e suriettiva si dice un isomorfismo; ovviamente un isomorfismo ammette una inversa, che è ancora un isomorfismo.*

Quando fra due spazi vettoriali  $V$  e  $W$  esiste un isomorfismo allora  $V$  e  $W$  hanno le stesse proprietà: dal punto di vista dell'algebra lineare sono indistinguibili, cioè l'unico modo di distinguerli è considerandone i singoli elementi.

Ad esempio la funzione  $f: M_{2,2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^4$  definita come

$$f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

è un isomorfismo; ne segue che dal punto di vista dell'algebra lineare " $M_{2,2}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^4$ ".

Quando due spazi sono isomorfi scriviamo  $V \cong W$ : questo simbolo è una specie di  $=$  che ci ricorda che i due insiemi in quanto insiemi possono non essere lo stesso, ma come spazi vettoriali sono completamente identificabili.

Si noti che se  $f: V \rightarrow W$  è iniettiva allora  $V$  è isomorfo a  $\text{Im } f$ : infatti la funzione  $f$  può essere considerata come una funzione  $f: V \rightarrow \text{Im } f$  (gli elementi di  $W$  che non stanno in  $\text{Im } f$  non hanno alcun ruolo nella definizione di  $f$ ) e questa è suriettiva, quindi, essendo per ipotesi iniettiva, è un isomorfismo.

**Teorema 1.2** *Supponiamo che  $f: V \rightarrow W$  sia un isomorfismo.*

(1)  $v_1, \dots, v_n$  sono linearmente indipendenti in  $V$  se e solo se  $f(v_1), \dots, f(v_n)$  sono linearmente indipendenti in  $W$ .

(2)  $v_1, \dots, v_n$  generano  $V$  se e solo se  $f(v_1), \dots, f(v_n)$  generano  $W$ .

DIMOSTRAZIONE: 1) Supponiamo che  $v_1, \dots, v_n \in V$  e consideriamo una relazione di dipendenza lineare

$$a_1 f(v_1) + \dots + a_n f(v_n) = 0$$

Dato che  $f$  è lineare questo vuol dire che

$$f(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = 0$$

e, dato che  $\ker f = 0$ ,

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0$$

Questo ragionamento dimostra che  $v_1, \dots, v_n$  sono linearmente indipendenti se e solo se lo sono  $f(v_1), \dots, f(v_n)$ .

2) Supponiamo che  $v_1, \dots, v_n$  generino  $V$  e dimostriamo che  $f(v_1), \dots, f(v_n)$  generano  $W$ : prendiamo un qualsiasi  $w \in W$ ; dato che  $\text{Im } f = W$  deve esistere  $v \in V$  tale che  $f(v) = w$ , e quindi, dato che  $v_1, \dots, v_n$  generano  $V$ , esistono  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  tali che

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$$

da cui, per linearità di  $f$ ,

$$w = f(v) = f(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = a_1 f(v_1) + \dots + a_n f(v_n)$$

Quindi ogni  $w \in W$  è combinazione lineare di  $f(v_1), \dots, f(v_n)$ . Se invece supponiamo che  $f(v_1), \dots, f(v_n)$  generino  $W$ , allora per ogni  $v \in V$  abbiamo che  $f(v) \in W$  e quindi esistono  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  tali che

$$f(v) = a_1 f(v_1) + \dots + a_n f(v_n) = f(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n)$$

Sottraendo il primo membro dal terzo in questa equazione troviamo

$$0 = f(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) - f(v) = f(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n - v)$$

(per linearità di  $f$ ), quindi, dato che  $f$  è iniettiva:

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n - v = 0$$

e quindi  $v$  è combinazione lineare di  $v_1, \dots, v_n$ .

CVD

Si noti che la (1) è vera nella sola ipotesi di iniettività della  $f$ . Per definizione di base abbiamo allora il seguente

**Corollario 1.3** *Se  $f: V \rightarrow W$  è un isomorfismo allora  $\{v_1, \dots, v_n\}$  è una base di  $V$  se e solo se  $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$  è una base di  $W$ .*

e, per definizione di dimensione:

**Corollario 1.4** *Spazi vettoriali isomorfi hanno la stessa dimensione.*

Notiamo che dare una base in uno spazio vettoriale  $V$  è la stessa cosa che fissare un isomorfismo  $V \cong \mathbb{R}^n$ . Infatti se abbiamo una base  $\{v_1, \dots, v_n\}$  possiamo usarla per definire una applicazione lineare  $f: V \rightarrow \mathbb{R}^n$  definita come

$$f(v) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

dove  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  sono i numeri univocamente associati a  $v$  in modo che

$$v = a_1v_1 + \dots + a_nv_n$$

(cioè  $a_1, \dots, a_n$  sono le coordinate di  $v$  nella base  $\{v_1, \dots, v_n\}$ ).

Questa applicazione è ovviamente lineare, dato che se  $v' \in V$  allora esistono unici  $a'_1, \dots, a'_n \in \mathbb{R}$  tali che  $v' = a'_1v_1 + \dots + a'_nv_n$ , e, per ogni  $a, b \in \mathbb{R}$ , abbiamo

$$\begin{aligned} af(v) + bf(v') &= a(a_1v_1 + \dots + a_nv_n) + b(a'_1v_1 + \dots + a'_nv_n) \\ &= (aa_1 + ba'_1)v_1 + \dots + (aa_n + ba'_n)v_n = f(av + bv') \end{aligned}$$

dato che  $av + bv' = (aa_1 + ba'_1)v_1 + \dots + (aa_n + ba'_n)v_n$ . Quindi  $f$  è lineare.

Che  $\ker f = 0$  è ovvio, dato che  $f(v) = 0$  vuol dire che  $v = 0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_n = 0$ . Infine  $f$  è suriettiva, dato che ogni  $n$ -pla di numeri reali  $(a_1, \dots, a_n)$  è immagine, per tramite di  $F$ , del vettore  $v = a_1v_1 + \dots + a_nv_n \in V$ .

Viceversa, se abbiamo un isomorfismo  $f: V \rightarrow \mathbb{R}^n$  allora possiamo usarlo per determinare una base di  $V$ ; consideriamo la base canonica  $(e_1, \dots, e_n)$  di  $\mathbb{R}^n$  ed i vettori  $v_1, \dots, v_n \in V$  tali che  $f(v_1) = e_1, \dots, f(v_n) = e_n$ : questi vettori esistono (perché  $f$  è suriettiva) e sono unici (perché  $f$  è iniettiva); per il teorema precedente questi vettori sono una base di  $V$ .

**Teorema 1.5** *Se  $V$  e  $W$  sono spazi vettoriali di dimensione finita,  $\{v_1, \dots, v_n\}$  è una base di  $V$  e  $w_1, \dots, w_n \in W$  sono elementi qualsiasi allora esiste un'unica applicazione lineare  $f: V \rightarrow W$  tale che*

$$f(v_1) = w_1, \quad f(v_2) = w_2, \quad \dots, \quad f(v_n) = w_n$$

DIMOSTRAZIONE: Dato che  $\{v_1, \dots, v_n\}$  è una base di  $V$ , ogni vettore  $v \in V$  si esprime in modo unico come

$$v = a_1v_1 + \dots + a_nv_n$$

con  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ . Vogliamo definire  $f: V \rightarrow W$  lineare, e quindi dobbiamo dire quanto vale su ciascun elemento di  $V$ : poniamo

$$f(v) = f(a_1v_1 + \dots + a_nv_n) = a_1w_1 + \dots + a_nw_n$$

Questa applicazione è lineare, dato che se  $v' \in V$  allora esistono unici  $a'_1, \dots, a'_n \in \mathbb{R}$  tali che  $v' = a'_1v_1 + \dots + a'_nv_n$ ; quindi, se  $a, a' \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(av + a'v') &= f(aa_1v_1 + \dots + aa_nv_n + a'a'_1v_1 + \dots + a'a'_nv_n) \\ &= f((aa_1 + a'a'_1)v_1 + \dots + (aa_n + a'a'_n)v_n) \\ &= (aa_1 + a'a'_1)f(v_1) + \dots + (aa_n + a'a'_n)f(v_n) \end{aligned}$$

(per linearità di  $f$ )

$$= (aa_1 + a'a'_1)w_1 + \dots + (aa_n + a'a'_n)w_n$$

(per ipotesi)

$$\begin{aligned} &= a(a_1w_1 + \dots + a_nw_n) + a'(a'_1w_1 + \dots + a'_nw_n) \\ &= af(v) + a'f(v') \end{aligned}$$

CVD

**Teorema 1.6** *Se  $f: V \rightarrow W$  è lineare allora*

$$\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim V$$

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo il nucleo  $\ker f$ : è un sottospazio vettoriale di  $V$ ; abbiamo due possibilità:  $\ker f = 0$  oppure  $\ker f$  è un sottospazio vettoriale di dimensione almeno uno.

Se  $\ker f = 0$  (e quindi  $\dim \ker f = 0$ ), la funzione è iniettiva, quindi è un isomorfismo fra  $V$  ed il sottospazio  $\operatorname{Im} f \subset W$ ; in particolare  $\dim V = \dim \operatorname{Im} f$ , come si voleva.

Se  $m = \dim \ker f > 0$  allora consideriamo una base  $\{v_1, \dots, v_k\}$  di  $\ker f$ , ed una base  $\{w_1, \dots, w_m\}$  di  $\operatorname{Im} f$ ; per definizione di  $\operatorname{Im} f$ , esistono  $v_{k+1}, \dots, v_{k+m} \in V$  tali che

$$f(v_{k+1}) = w_1, \quad f(v_{k+2}) = w_2, \quad \dots \quad f(v_{k+m}) = w_m$$

Vogliamo dimostrare che  $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+m}\}$  è una base di  $V$ , e questo implica chiaramente la tesi:  $\dim V = k + m = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$ .

Intanto mostriamo che  $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+m}\}$  generano  $V$ : sia  $v \in V$ , e consideriamo  $f(v) \in W$ ; esistono unici  $a_{k+1}, \dots, a_{k+m} \in \mathbb{R}$  tali che

$$\begin{aligned} f(v) &= a_{k+1}w_1 + \dots + a_{k+m}w_m = a_{k+1}f(v_{k+1}) + \dots + a_{k+m}f(v_{k+m}) \\ &= f(a_{k+1}v_{k+1} + \dots + a_{k+m}v_{k+m}) \end{aligned}$$

Dunque  $f(v) - f(a_{k+1}v_{k+1} + \dots + a_{k+m}v_{k+m}) = 0$ , cioè

$$f(v - a_{k+1}v_{k+1} - \dots - a_{k+m}v_{k+m}) = 0$$

vale a dire  $v - a_{k+1}v_{k+1} - \dots - a_{k+m}v_{k+m} \in \ker f$ , e quindi esistono unici  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$  tali che

$$v - a_{k+1}v_{k+1} - \dots - a_{k+m}v_{k+m} = a_1v_1 + \dots + a_kv_k$$

cioè

$$v = a_1v_1 + \dots + a_kv_k + a_{k+1}v_{k+1} + \dots + a_{k+m}v_{k+m}$$

sicché ogni  $v \in V$  è combinazione lineare di  $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+m}\}$ .

Vediamo ora che  $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+m}\}$  sono linearmente indipendenti, col che avremo dimostrato che sono una base.

Supponiamo di avere una relazione di dipendenza lineare

$$a_1v_1 + \dots + a_kv_k + a_{k+1}v_{k+1} + \dots + a_{k+m}v_{k+m} = 0$$

ed applichiamo  $f$  ad entrambi i membri di questa equazione:

$$f(a_1v_1 + \dots + a_kv_k + a_{k+1}v_{k+1} + \dots + a_{k+m}v_{k+m}) = 0$$

Ora usiamo il fatto che  $f$  è lineare e che  $v_1, \dots, v_k \in \ker f$ :

$$a_{k+1}f(v_{k+1}) + \dots + a_{k+m}f(v_{k+m}) = 0$$

Ma  $w_1 = f(v_{k+1}), \dots, w_m = f(v_{k+m})$  sono una base di  $W$ , in particolare sono linearmente indipendenti, quindi  $a_{k+1} = \dots = a_{k+m} = 0$ .

Resta da provare che anche  $a_1, \dots, a_k$  sono zero: torniamo all'equazione

$$a_1v_1 + \dots + a_kv_k + a_{k+1}v_{k+1} + \dots + a_{k+m}v_{k+m} = 0$$

da cui eravamo partiti: ora sappiamo che gli ultimi  $m$  coefficienti sono zero, quindi

$$a_1v_1 + \dots + a_kv_k = 0$$

Ma  $\{v_1, \dots, v_k\}$  sono una base di  $\ker f$ , in particolare sono linearmente indipendenti, quindi  $a_1 = \dots = a_k = 0$ .

La formula appena dimostrata è di grande utilità nel calcolo delle immagini delle applicazioni lineari.

**Teorema 1.7** *L'insieme delle applicazioni lineari  $f: V \rightarrow W$  fra due spazi vettoriali fissati è a sua volta uno spazio vettoriale, rispetto alla somma di applicazioni definita come*

$$(f + g)(v) = f(v) + g(v)$$

*ed al prodotto per uno scalare definito come*

$$(af)(v) = af(v)$$

**Esempio 1.1** Identifichiamo tutte le applicazioni lineari  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ : si tratta di determinare le funzioni  $f$  tali che  $f(ax + by) = af(x) + bf(y)$ ; per  $a = 1$  e  $b = 0$  abbiamo (dato che sia gli scalari che i vettori sono in questo caso elementi di  $\mathbb{R}$ )

$$f(x) = f(1 \cdot x) = f(x \cdot 1) = xf(1)$$

Quindi se  $f(1) = \alpha$  la nostra applicazione lineare è della forma

$$f(x) = \alpha x$$

In altre parole una applicazione lineare  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è completamente determinata dal valore  $f(1)$ , che può essere un numero reale qualsiasi. Precisamente, lo spazio delle applicazioni lineari  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è isomorfo a  $\mathbb{R}$  come spazio vettoriale.

**Esempio 1.2** Identifichiamo tutte le applicazioni lineari  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ : consideriamo un vettore qualsiasi e notiamo che

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = f(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \cdots + x_n f(e_n)$$

dove  $\{e_1, \dots, e_n\}$  è la base canonica di  $\mathbb{R}^n$ ; quindi  $f$  è completamente determinata dai valori che assume sugli elementi della base canonica; ciascuno di questi valori è un numero reale  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , quindi  $f$  è della forma

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n$$

e lo spazio delle applicazioni lineari  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è isomorfo a  $\mathbb{R}^n$ .

**Esempio 1.3** Una applicazione lineare  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  è sempre della forma

$$f(v) = Av$$

dove  $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ . Infatti possiamo scrivere

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$$

Ciascun  $f(e_i)$  è un vettore in  $\mathbb{R}^m$ , quindi si scrive, rispetto alla base canonica di  $\mathbb{R}^m$  come

$$f(e_i) = a_{1i} e_1 + a_{2i} e_2 + \cdots + a_{mi} e_m$$

(dove  $a_{ji} \in \mathbb{R}$ ). Da ciò traiamo, per linearità di  $f$ :

$$\begin{aligned} f(v) &= f(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \cdots + x_n f(e_n) \\ &= x_1 (a_{11} e_1 + a_{21} e_2 + \cdots + a_{m1} e_m) + x_2 (a_{12} e_1 + a_{22} e_2 + \cdots + a_{m2} e_m) + \\ &\quad + \cdots + x_n (a_{1n} e_1 + a_{2n} e_2 + \cdots + a_{mn} e_m) \\ &= (x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \cdots + x_n a_{1n}) e_1 + (x_2 a_{21} + x_2 a_{22} + \cdots + x_n a_{2n}) e_2 + \\ &\quad + \cdots + (x_n a_{m1} + x_2 a_{m2} + \cdots + x_n a_{mn}) e_m \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Quindi una applicazione lineare  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  è determinata da una matrice reale con  $n$  righe e  $m$  colonne; lo spazio vettoriale di tali matrici è isomorfo a quello delle applicazioni lineari  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

**Esempio 1.4** Un esempio di applicazione lineare  $f: M_{n,m}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{l,m}(\mathbb{R})$  è dato dalla

$$f(X) = AX$$

dove  $A \in M_{l,n}(\mathbb{R})$ .

**Esempio 1.5** Non ogni applicazione lineare  $M_{n,n}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{n,n}(\mathbb{R})$  è della forma  $f(X) = AX$ : ad esempio

$$f(X) = AX - XA$$

è una applicazione lineare. Anche

$$f(X) = AX + XA$$

è una applicazione lineare.

## 2 Esercizi

1) Dire quali fra le seguenti applicazioni sono lineari ed in ogni caso dire se sono iniettive e/o suriettive e, per quelle lineari, calcolare nucleo e immagine:

a)  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definita come  $F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ x \end{pmatrix}$ .

b)  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita come  $F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = xy$ .

c)  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita come  $F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 1 \\ 2y \\ x + y \end{pmatrix}$ .

d)  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definita come  $F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2x - 3y + 4z$ .

e)  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definita come  $F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |x| \\ 0 \end{pmatrix}$ .

2) Consideriamo l'insieme  $P = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$  dei numeri positivi; dimostrare che, rispetto alle operazioni

$$x+y = xy \qquad \lambda \cdot x = x^\lambda$$

è uno spazio vettoriale. Calcolarne dimensione e base e dire se l'applicazione  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow P$  che porta  $x$  in  $e^x$  dall'usuale retta reale in questo spazio vettoriale è lineare, iniettiva, suriettiva.

3) Dato lo spazio delle matrici  $M_n(\mathbb{R})$  ed una matrice fissata  $A \in M_n(\mathbb{R})$  dire se le applicazioni  $F_A^\pm : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$  sono o no lineari:

$$F_A^\pm(B) = AB \pm BA$$

4) Dimostrare che se  $A$  e  $B$  sono matrici allora il rango di  $AB$  è minore o uguale sia al rango di  $A$  che al rango di  $B$ .

5) Esiste una applicazione lineare  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $F \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3$  e  $F \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -2$ ? Se sì determinarla.

6) Trovare una applicazione lineare  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  la cui immagine sia generata dai vettori  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$  e  $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ .

7) Consideriamo le applicazioni lineari  $f_t: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  date da  $f_t(v) = A_t v$  con  $v \in \mathbb{R}^4$  e

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ t & t^3 & 1+t & 1 \end{pmatrix}$$

Dire se esistono dei valori di  $t \in \mathbb{R}$  per i quali  $\dim \ker f_t = 2$ .

8) Si consideri la funzione  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita come

$$f(x, y, z, w) = (2z - y + 5x - w, y + 2x + 4z - 2w, x - 3y + 5w - 6z)$$

Dimostrare che  $f$  è lineare, determinare una base del nucleo e una dell'immagine, e dire se il vettore  $v = (2, 1, 0)$  appartiene o no a  $\text{Im } f$ .

9) Esistono, e se sì quante sono, delle applicazioni lineari  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  tali che  $\text{Im } f$  sia generato dai seguenti vettori? In caso affermativo scriverne esplicitamente almeno una.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

10) Esistono, e se sì quante sono, delle applicazioni lineari  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tali che  $\text{Im } f$  sia generata dal seguente vettore? In caso affermativo scriverne esplicitamente almeno una.

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

11) Esistono, e se sì quante sono, delle applicazioni lineari  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  iniettive e la cui immagine sia generata dal seguente vettore? In caso affermativo scriverne esplicitamente almeno una.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

12) Esistono, e se sì quante sono, delle applicazioni lineari  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  il cui nucleo sia generato dal vettore  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  e tali che  $f \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ ? In caso affermativo scriverne esplicitamente almeno una.

13) Sia  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  data da

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + z \\ 2x + y - z \\ z \\ 2x + 2y \end{pmatrix}$$

Determinare una base del nucleo e dell'immagine di  $f$ .

[Le risposte nella pagina seguente]

### 3 Risposte

- 1) a) è lineare, iniettiva e suriettiva; b) non è lineare; c) non è lineare; d) è lineare, il suo nucleo sono i vettori del tipo  $(3a/2 - 2b, a, b)$ , è suriettiva; e) non è lineare.
- 2) L'applicazione esponenziale è un isomorfismo fra  $P$  e  $\mathbb{R}$ .
- 3) Sono entrambe lineari.
- 5) L'applicazione esiste ed è  $F(x, y) = 5x - 2y$ .
- 6)  $F(x, y, z) = (x + 2y, 2x, -y, -4x - 3y)$ .
- 7)  $t = 1$ .
- 8)  $\dim \ker f = \dim \operatorname{Im} f = 2$ ; sì.
- 9) Ci sono infinite applicazioni siffatte.
- 10) Ci sono infinite applicazioni siffatte.
- 11) Non ci sono applicazioni siffatte.
- 12) Ce n'è solo una, precisamente  $f(x, y) = (10x - 5y, 2y - 4x)$ .
- 13) Il nucleo è 0, l'immagine è l'insieme  $\{(x, y, z, t) | x + y - t = 0\}$ .