

Meccanica Razionale - Ingegneria Edile - Università di Firenze  
 PROVA SCRITTA DEL 21.12.09 (es. 3)

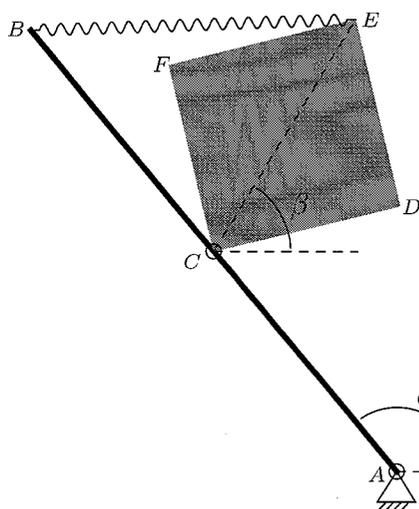
NOME:

MATRICOLA:

Riservato alla correzione:

[01]

	a: 5	b: 7	c: 6	d: 6	e: 6	f
						X



$$\overline{AB} = 2l; \overline{AC} = \overline{CB} = \frac{1}{2} \overline{AB};$$

$$\overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FC} = l;$$

massa dell'asta  $AB$ :  $2m$ ;

massa della lamina quadrata:  $3m$ ;

costante elastica della molla:  $4mg/R$ .

AVVERTENZA: Le proporzioni del disegno possono non rispettare esattamente i dati del problema.

Sistema meccanico piano verticale, vincoli lisci. L'asta omogenea è vincolata a una cerniera fissa in  $A$ . La lamina quadrata omogenea è incernierata nel punto medio  $C$  dell'asta. Il vertice  $E$  della lamina è collegato all'estremo  $B$  dell'asta mediante una molla di lunghezza a riposo nulla.

Il sistema ha due gradi di libertà. Si scelgano come coordinate lagrangiane l'angolo  $\alpha$  crescente in senso antiorario, tra l'asta fa con la semiretta uscente da  $A$  verso destra; e l'angolo  $\beta$ , crescente in senso antiorario, che la diagonale  $CE$  della lamina fa con la semiretta uscente da  $C$  verso destra.

Trovare [b:5 pt] il potenziale e [a:7 pt] l'energia cinetica del sistema; [c:6 pt] scrivere le equazioni di Lagrange; [d:6 pt] trovare le configurazioni di equilibrio e [e:6 pt] studiarne la stabilità.

Soluzione:

$$U = mgl \left( -5 \sin \alpha - \frac{3}{2} \sqrt{2} \sin \beta + 4 \sqrt{2} \cos(\alpha - \beta) \right)$$

$$K = \frac{17}{6} m l^2 \dot{\alpha}^2 + m l^2 \dot{\beta}^2 + \frac{3}{2} \sqrt{2} m l^2 \cos(\alpha - \beta) \dot{\alpha} \dot{\beta}$$

VOLTARE PAGINA

Equazioni di moto:

$$ml^2 \left( \frac{17}{3} \ddot{\alpha} + \frac{3}{2} \sqrt{2} \cos(\alpha - \beta) \ddot{\beta} + \frac{3}{2} \sqrt{2} \sin(\alpha - \beta) \dot{\beta}^2 \right) = mgl \left( -5 \cos \alpha - 4\sqrt{2} \sin(\alpha - \beta) \right)$$

$$ml^2 \left( \frac{3}{2} \sqrt{2} \cos(\alpha - \beta) \ddot{\alpha} + 2 \ddot{\beta} - \frac{3}{2} \sqrt{2} \sin(\alpha - \beta) \dot{\alpha}^2 \right) = mgl \left( -\frac{3}{2} \sqrt{2} \cos \beta + 4\sqrt{2} \sin(\alpha - \beta) \right)$$

Configurazioni di equilibrio:

$$I) \quad \alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$II) \quad \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{2} \\ \beta = \frac{3}{2}\pi \end{cases}$$

$$III) \quad \begin{cases} \alpha = \frac{3}{2}\pi \\ \beta = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$IV) \quad \alpha = \beta = \frac{3}{2}\pi$$

Stabilità dell'equilibrio:

$$I) \quad (H) = \begin{pmatrix} 5-4\sqrt{2} & 4\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} & -\frac{5}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} mgl, \quad \det H = -(12 + \frac{25}{2}\sqrt{2}) m^2 g^2 l^2 < 0$$

PUNTO DI SELLA

$$II) \quad (H) = \begin{pmatrix} 5+4\sqrt{2} & -4\sqrt{2} \\ -4\sqrt{2} & \frac{5}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} mgl, \quad \det H = (\frac{25}{2}\sqrt{2} - 12) m^2 g^2 l^2 > 0$$

$H_{11} > 0 \Rightarrow$  EQUILIBRIO INSTABILE

$$III) \quad (H) = \begin{pmatrix} 4\sqrt{2}-5 & -4\sqrt{2} \\ -4\sqrt{2} & \frac{11}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} mgl, \quad \det H = (12 - \frac{55}{2}\sqrt{2}) m^2 g^2 l^2 < 0$$

PUNTO DI SELLA

$$IV) \quad (H) = \begin{pmatrix} -5-4\sqrt{2} & 4\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} & -\frac{11}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} mgl, \quad \det H = (12 + \frac{55}{2}\sqrt{2}) m^2 g^2 l^2 > 0$$

$H_{11} < 0 \Rightarrow$  EQUILIBRIO STABILE