

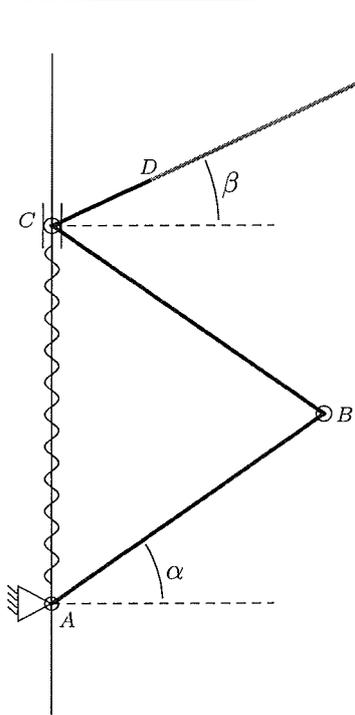
Meccanica Razionale - Ingegneria Civile & Edile - Università di Firenze
 PROVA SCRITTA DEL 9/7/12, parte II

COGNOME:	NOME:
MATRICOLA:	CdL:

Riservato alla correzione:

[01]

	a $\Delta \nabla$	b \square	c \square	d \square	e \square	f
						X



$5mg e_1$

AVVERTENZA: Le proporzioni del disegno possono non rispettare esattamente i dati del problema.

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{DE} = 2\ell$, $\overline{CD} = \ell$,
 massa dell'asta $AB = 2m$,
 massa dell'asta $BC = 3m$,
 massa totale dell'asta $CE = 4m$,
 costante elastica della molla: $5mg/\ell$.

Sistema meccanico piano **verticale**, vincoli lisci. Le aste omogenee AB e BC sono mutuamente incernierate in B ; inoltre AB è vincolata in A a una cerniera fissa, e l'estremo C di BC è vincolato a una guida rettilinea verticale passante per A . L'asta CE , incernierata in C all'asta BC , non è omogenea: è costituita dai due tratti omogenei CD e DE ; è data la massa totale dell'asta; inoltre D coincide con il centro di massa di CE . Oltre alle forze peso, le forze direttamente applicate sono la forza esercitata da una molla di lunghezza a riposo nulla che collega A e C , e la forza $F_E = 5mg e_1$ applicata nell'estremo E .

Il sistema ha due gradi di libertà. Come coordinate Lagrangiane utilizzare gli angoli polari (α, β) dei vettori $B-A$ ed $E-C$, rispettivamente.

Trovare **a** il potenziale e **b** l'energia cinetica del sistema; **c** scrivere le equazioni di Lagrange; **d** trovare le configurazioni di equilibrio e, **e** per ciascuna di esse, scrivere la matrice Hessiana del potenziale e discutere la stabilità.

Soluzione:

$$U = mg\ell \left(-27 \sin \alpha - 40 \sin^2 \alpha - 4 \sin \beta + 20 \cos \beta \right)$$

$$K = m\ell^2 \left(\left(\frac{176}{3} + 22 \cos(2\alpha) \right) \dot{\alpha}^2 + \frac{10}{3} \dot{\beta}^2 + 16 \cos \alpha \cos \beta \dot{\alpha} \dot{\beta} \right)$$

Equazioni di moto:

$$\left\{ \begin{aligned} l \left(\frac{152}{3} \ddot{\alpha} + 44 \cos(2\alpha) \ddot{\alpha} + 16 \cos \alpha \cos \beta \ddot{\beta} - 44 \sin(2\alpha) \dot{\alpha}^2 - 16 \cos \alpha \sin \beta \dot{\beta}^2 \right) &= \\ &= -g(27 \cos \alpha + 40 \sin 2\alpha) \\ l \left(16 \cos \alpha \cos \beta \ddot{\alpha} + \frac{20}{3} \ddot{\beta} - 16 \sin \alpha \cos \beta \dot{\alpha}^2 \right) &= -g(20 \sin \beta + 4 \cos \beta) \end{aligned} \right.$$

Configurazioni di equilibrio:

$$\begin{aligned} \text{I} & \begin{cases} \alpha = \pi/2 \\ \beta = -\arctan \frac{1}{5} \end{cases} & \text{II} & \begin{cases} \alpha = 3\pi/2 \\ \beta = -\arctan \frac{1}{5} \end{cases} \\ \text{III} & \begin{cases} \alpha = \pi/2 \\ \beta = \pi - \arctan \frac{1}{5} \end{cases} & \text{IV} & \begin{cases} \alpha = 3\pi/2 \\ \beta = \pi - \arctan \frac{1}{5} \end{cases} \\ \text{V} & \begin{cases} \alpha = -\arcsin \frac{27}{80} \\ \beta = -\arctan \frac{1}{5} \end{cases} & \text{VI} & \begin{cases} \alpha = \pi + \arcsin \frac{27}{80} \\ \beta = -\arctan \frac{1}{5} \end{cases} \\ \text{VII} & \begin{cases} \alpha = -\arcsin \frac{27}{80} \\ \beta = \pi - \arctan \frac{1}{5} \end{cases} & \text{VIII} & \begin{cases} \alpha = \pi + \arcsin \frac{27}{80} \\ \beta = \pi - \arctan \frac{1}{5} \end{cases} \end{aligned}$$

Stabilità dell'equilibrio:

$$(H_I) = mgl \begin{pmatrix} 107 & 0 \\ 0 & -4\sqrt{26} \end{pmatrix} \quad (H_{II}) = mgl \begin{pmatrix} 53 & 0 \\ 0 & -4\sqrt{26} \end{pmatrix}$$

$$(H_{III}) = mgl \begin{pmatrix} 107 & 0 \\ 0 & 4\sqrt{26} \end{pmatrix} \quad (H_{IV}) = mgl \begin{pmatrix} 53 & 0 \\ 0 & 4\sqrt{26} \end{pmatrix}$$

$$(H_V) = mgl \begin{pmatrix} -\frac{5671}{80} & 0 \\ 0 & -4\sqrt{26} \end{pmatrix} \quad (H_{VI}) = mgl \begin{pmatrix} -\frac{5671}{80} & 0 \\ 0 & -4\sqrt{26} \end{pmatrix}$$

$$(H_{VII}) = mgl \begin{pmatrix} -\frac{5671}{80} & 0 \\ 0 & 4\sqrt{26} \end{pmatrix} \quad (H_{VIII}) = mgl \begin{pmatrix} -\frac{5671}{80} & 0 \\ 0 & 4\sqrt{26} \end{pmatrix}$$

Le configurazioni **I** e **VI** sono di equilibrio STABILE.

Le configurazioni **III** e **IV** sono di equilibrio instabile.

Tutte le altre configurazioni sono punti di sella di U .