

Meccanica Razionale - Ingegneria Meccanica M-Z - Università di Firenze
 PROVA SCRITTA DEL 18.09.2019

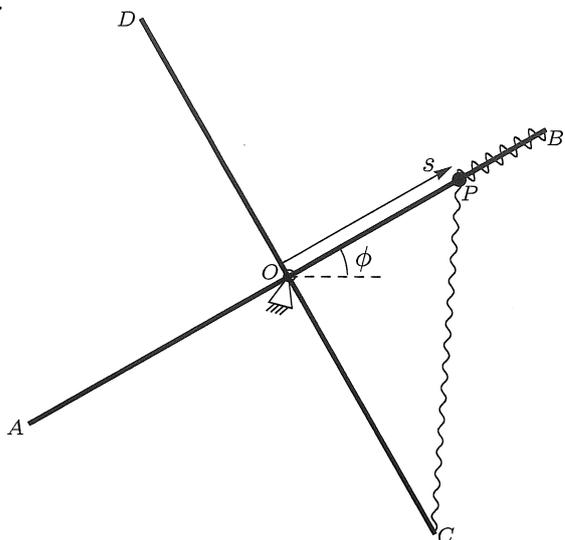
NOME:

MATRICOLA:

Riservato alla correzione:

[01]

	a $\square \Delta$	b $\Delta $	c $ \Delta $	d $ \Delta$	e $\Delta \nabla$



$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD} = l$;
 massa dell'asta AB : $2m$;
 massa dell'asta CD : $3m$;
 massa del punto P : $4m$;
 costante delle molle: $5mg/R$.

Sistema meccanico piano verticale. Le aste omogenee AB e CD sono mutuamente vincolate, nel comune centro O , a formare un corpo rigido, che è a sua volta vincolato in O a una cerniera fissa priva di attrito. Sull'asta AB scorre, senza attrito, il punto materiale P , che è collegato ai punti B e C mediante molle di lunghezza a riposo nulla.

Il sistema ha due gradi di libertà. Si scelgano come coordinate Lagrangiane la coordinata s che individua la posizione di P lungo l'asta AB , con $|s| = \overline{OP}$ (dunque s assume valori nell'intervallo $(-l, l)$), e l'angolo ϕ che il segmento OB fa con la semiretta orizzontale uscente da O verso destra.

Trovare [a] l'energia cinetica e [b] il potenziale del sistema; [c] scrivere le equazioni di Lagrange; [d] trovare le configurazioni di equilibrio e [e] studiarne la stabilità.

Soluzione:

$$V = mg \left(5s - \frac{5s^2}{\ell} - 4s \sin \phi \right)$$

$$T = m \left(\frac{5}{6} \ell^2 + 2s^2 \right) \dot{\phi}^2 + 2m \dot{s}^2$$

Equazioni di moto:

$$\left(\frac{5}{3} \ell^2 + 4s^2\right) \ddot{\phi} + 8s \dot{\phi} \dot{s} = -4g s \cos \phi$$

$$4\dot{s} - 4s \dot{\phi}^2 = g\left(-4 \sin \phi - \frac{10s}{\ell} + 5\right)$$

Configurazioni di equilibrio:

Ⓘ

$$\begin{cases} \phi = \frac{\pi}{2} \\ s = \frac{1}{10} \ell \end{cases}$$

Ⓢ

$$\begin{cases} \phi = \frac{3}{2} \pi \\ s = \frac{9}{10} \ell \end{cases}$$

NB: formalmente si otterrebbero anche le soluzioni:
 $\begin{cases} s=0 \\ \phi = \arcsin \frac{5}{4} \end{cases}$ $\begin{cases} s=0 \\ \phi = \pi - \arcsin \frac{5}{4} \end{cases}$
 che però non sono reali

Stabilità dell'equilibrio:

$$(H_{\text{I}}) = mg \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \ell & 0 \\ 0 & -\frac{10}{\ell} \end{pmatrix}$$

punto di sella del potenziale

$$(H_{\text{II}}) = mg \begin{pmatrix} -\frac{18}{5} \ell & 0 \\ 0 & -\frac{10}{\ell} \end{pmatrix}$$

massimo del potenziale
(equilibrio stabile)