

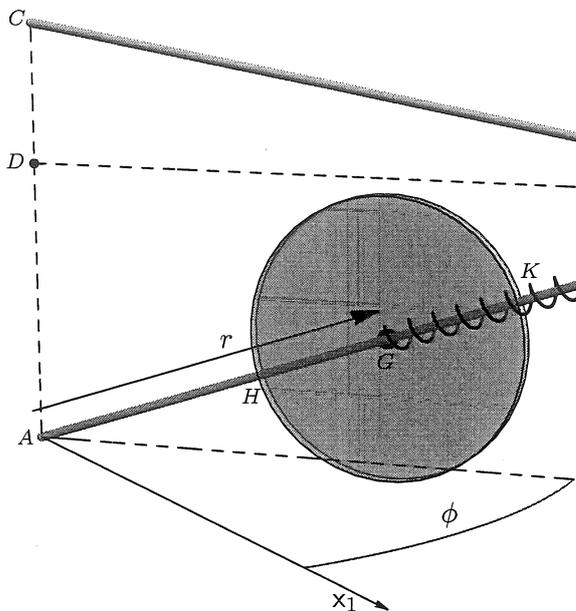
Meccanica Razionale - Ingegneria Meccanica M-Z - Università di Firenze  
 PROVA SCRITTA DEL 20 giugno 2019

COGNOME:	NOME:
MATRICOLA:	CdL:

Riservato alla correzione:

[01]

	a $\Delta \nabla$	b $\square \Delta  $	c $\square \Delta$	d	e $\square  $	
						X



$\overline{AD} = 2R$ ;  $\overline{DC} = R$ ;  $\overline{AB} = \overline{AD} + 3R$ ;  $\overline{BE} = R$ ;  
 raggio del disco:  $R$ ;

masse:

$AB : 2m$ ;  $BC : 6m$ ; disco:  $4m$ ;

costante della molla:  $5mg/R$ .

Sistema meccanico olonomo, vincoli lisci. Le due aste omogenee  $AB$  e  $BC$  sono saldate in  $B$  e vincolate a cerniere fisse negli estremi  $A$  e  $C$ ; il segmento  $AC$  è verticale, il segmento  $BD$  è orizzontale. Il diametro  $HK$  del disco omogeneo è vincolato all'asta  $AB$ , potendo scorrere su di essa; il disco è inoltre vincolato a rimanere verticale (quindi nel piano delle due aste). Una molla di lunghezza riposo nulla collega il centro  $G$  del disco al punto  $E$  fisso sull'asta  $AB$ . In  $B$  è applicata la forza  $mg(4\frac{1}{R}x_1e_1 + 8x_2e_2)$ .

Il sistema ha due gradi di libertà. Utilizzare come coordinate Lagrangiane le coordinate polari  $(r, \phi)$  di  $G$ , relativamente a un riferimento con origine in  $A$  ed asse  $x_3$  verticale.

AVVERTENZA: Le proporzioni del disegno possono non rispettare esattamente i dati del problema.

Trovare **a** il potenziale e **b** l'energia cinetica del sistema; **c** scrivere le equazioni di Lagrange; **d** trovare le configurazioni di equilibrio e, **e** scrivere la matrice Hessiana del potenziale e discutere la stabilità.

Soluzione:

$$U = mg \left( 84R \sin^2 \phi + 42R \cos^2 \phi - \frac{5}{2} \frac{r^2}{R} + \frac{92}{5} r \right)$$

$$T = m \left( \frac{57}{2} R^2 + \frac{42}{25} r^2 \right) \dot{\phi}^2 + 2m \dot{r}^2$$

Equazioni di moto:

$$\left(57R^2 + \frac{84}{25}r^2\right)\ddot{\phi} + \frac{168}{25}r\dot{\phi}\dot{r} = 84gR \sin\phi \cos\phi$$

$$4\ddot{r} - \frac{84}{25}r\dot{\phi}^2 = g\left(\frac{92}{5} - 5\frac{r}{R}\right)$$

Configurazioni di equilibrio:

$$\textcircled{\text{I}} \begin{cases} \phi = 0 \\ r = \frac{92}{25}R \end{cases}$$

$$\textcircled{\text{II}} \begin{cases} \phi = \frac{\pi}{2} \\ r = \frac{92}{25}R \end{cases}$$

$$\textcircled{\text{III}} \begin{cases} \phi = \pi \\ r = \frac{92}{25}R \end{cases}$$

$$\textcircled{\text{IV}} \begin{cases} \phi = \frac{3}{2}\pi \\ r = \frac{92}{25}R \end{cases}$$

Hessiano e stabilità dell'equilibrio:

$$(H_{\text{I}}) = \begin{pmatrix} -\frac{5mg}{R} & 0 \\ 0 & 84mgR \end{pmatrix}$$

punto di sella del potenziale

$$(H_{\text{II}}) = \begin{pmatrix} -\frac{5mg}{R} & 0 \\ 0 & -84mgR \end{pmatrix}$$

massimo del potenziale  
(equilibrio stabile)

$$(H_{\text{III}}) = \begin{pmatrix} -\frac{5mg}{R} & 0 \\ 0 & 84mgR \end{pmatrix}$$

punto di sella

$$(H_{\text{IV}}) = \begin{pmatrix} -\frac{5mg}{R} & 0 \\ 0 & -84mgR \end{pmatrix}$$

minimo