Angoli d'Eulero ed energia cinetica di un rigido

D. Canarutto
17/12/2019

* * *

Per esprimere l'energia cinetica di rotazione di un rigido in termini degli angoli d'Eulero (ϕ, θ, ψ) e delle velocità generalizzate $(\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})$ si utilizzano ragionamenti e calcoli che si trovano in vari punti del libro di testo.[1] Li riuniamo in questa nota per rendere più chiaro il filo del discorso.

1

Con riferimento al §2.9 del libro, nello spazio vettoriale Euclideo 3-dimensionale dei vettori puri consideriamo due basi ortonormali $\big(\mathsf{e}_i\big)$ ed $\big(\mathsf{e}'_i\big)$. Esiste allora un'unica trasformazione ortogonale $R : \mathsf{E} \to \mathsf{E}$ tale che $\mathsf{e}'_i = R(\mathsf{e}_i)$, ovvero

$$\mathsf{e}'_i = R_{ji}\,\mathsf{e}_j\ , \qquad i, j = 1, 2, 3\,,$$

dove è sottintesa la somma sull'indice ripetuto j. Dunque le componenti dei vettori della "nuova base" $\big(\mathsf{e}'_i\big)$ nella "vecchia base" $\big(\mathsf{e}_i\big)$ sono scritti nelle colonne della matrice di R nella vecchia base. In termini di angoli d'Eulero, tale matrice è

$$\big(R_{\phi\theta\psi}\big) = \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\psi - \sin\phi\cos\theta\sin\psi & -\cos\phi\sin\psi - \sin\phi\cos\theta\cos\psi & \sin\phi\sin\theta \\ \sin\phi\cos\psi + \cos\phi\cos\theta\sin\psi & -\sin\phi\sin\psi + \cos\phi\cos\theta\cos\psi & -\cos\phi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\psi & \sin\theta\cos\psi & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

2

Ora supponiamo che la base $\big(\mathsf{e}_i\big)$ sia fissa e che la base $\big(\mathsf{e}'_i\big)$ sia mobile, solidale con un moto rigido. Dunque scriveremo $\mathsf{e}'_i(t) = R_{ji}(t)\,\mathsf{e}_j$, dove le componenti $R_{ji}(t)$ sono espressi come elementi della medesima matrice scritta sopra ma gli angoli d'Eulero sono ora funzioni del tempo.

Vogliamo allora esprimere il tensore (trasformazione lineare) antisimmetrico "velocità di rotazione"

$$\Omega \equiv \dot{R}\cdot\tilde{R}$$

(dove $\tilde{R}$ denota la trasposta di R) in termini di $(\phi, \theta, \psi; \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})$.

La matrice di $\dot{R}$ nella base fissa la si ottiene derivando componente per componente, ovvero

$$\dot{R}_{11} = -(\sin\phi\cos\psi + \cos\phi\cos\theta\sin\psi)\,\dot{\phi} + \sin\phi\sin\psi\sin\theta\,\dot{\theta} - (\cos\phi\sin\psi + \sin\phi\cos\theta\cos\psi)\,\dot{\psi}\ ,$$

e così via. Il calcolo della matrice di Ω, con le necessarie semplificazioni, è quindi diretto seppur laborioso, e alla fine si ottiene

$$\big(\Omega\big) = \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\phi} - \cos\theta\,\dot{\psi} & \sin\phi\,\dot{\theta} - \cos\phi\,\sin\theta\,\dot{\psi} \\ \dot{\phi} + \cos\theta\,\dot{\psi} & 0 & -\cos\phi\,\dot{\theta} - \sin\phi\,\sin\theta\,\dot{\psi} \\ -\sin\phi\,\dot{\theta} + \cos\phi\,\sin\theta\,\dot{\psi} & \cos\phi\,\dot{\theta} + \sin\phi\,\sin\theta\,\dot{\psi} & 0 \end{pmatrix}.$$

[1] D. Canarutto, *Corso di Meccanica Razionale*, lulu.com (2019)

3

La relazione tra Ω e il vettore velocità angolare ω è

$$\Omega \cdot x = \omega \times x \quad \forall x,$$

che in componenti diventa

$$(\omega_i) = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega_{32} \\ \Omega_{13} \\ \Omega_{21} \end{pmatrix} ,$$

ovvero

$$\omega = (\cos\phi\,\dot\theta + \sin\phi\,\sin\theta\,\dot\psi)\,\mathsf{e}_1 + (\sin\phi\,\dot\theta - \cos\phi\,\sin\theta\,\dot\psi)\,\mathsf{e}_2 + (\dot\phi + \cos\theta\,\dot\psi)\,\mathsf{e}_3 \ .$$

4

Vogliamo ora esprimere, sempre in termini di $(\phi,\theta,\psi;\dot\phi,\dot\theta,\dot\psi)$, lo scalare funzione del tempo[2]

$$\tilde{\mathcal{T}}_O \equiv \tfrac{1}{2}\,\omega \cdot I_O \cdot \omega \ ,$$

dove I_O è il tensore d'inerzia di un rigido rispetto al punto $O \in \mathsf{P}$.

Tale scalare può essere calcolato come un prodotto di matrici righe per colonne, cioè

$$\tilde{\mathcal{T}}_O = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}\omega_1 & \omega_2 & \omega_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_O \end{pmatrix}\left(\begin{smallmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\end{smallmatrix}\right) \ ,$$

dove però le tre matrici devono essere espresse tutte *nella medesima base.*

Poiché il rigido si muove, il tensore d'inerzia dipende dal tempo. D'altra parte le componenti di I_O sono costanti in una base solidale, rispetto alla quale converrà calcolarle. Invece le componenti di ω le abbiamo espresse in una base fissa. Per legare le due cose cominciamo con l'osservare che, indicando con ω'_i le componenti di ω nella base mobile ed esprimendo il medesimo vettore ω nelle due basi, ovvero

$$\omega = \omega'_i\,\mathsf{e}'_i = \omega_i\,\mathsf{e}_i \ ,$$

si ottengono le relazioni[3]

$$\omega_i = R_{ij}\,\omega'_j \ , \qquad \omega'_i = \tilde{R}_{ij}\,\omega_j = R_{ji}\,\omega_j \ .$$

Pertanto indicando con $(I'_O)_{ij}$ le componenti di I_O nella base mobile, e cambiando opportunamente i nomi degli indici sommati, otteniamo

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{T}}_O &= \tfrac{1}{2}\,\omega'_i\,(I'_O)_{ij}\,\omega'_j = \tfrac{1}{2}\,R_{hi}\,\omega_h\,(I'_O)_{ij}\,R_{kj}\,\omega_k = \\ &= \tfrac{1}{2}\,\omega_h\,R_{hi}\,(I'_O)_{ij}\,\tilde{R}_{jk}\,\omega_k \ ,\end{aligned}$$

che può essere espresso direttamente in termini di $(\phi,\theta,\psi;\dot\phi,\dot\theta,\dot\psi)$. Osserviamo anche che

$$\big((I_O)_{hk}\big) = \big(R_{hi}\,(I'_O)_{ij}\,\tilde{R}_{jk}\big)$$

è la matrice di I_O nella base fissa, dipendente dal tempo in quanto R lo è.

[2] Ricordiamo il significato di $\tilde{\mathcal{T}}_O$ riguardo all'energia cinetica di un rigido. Se O è un punto fisso del rigido, $\tilde{\mathcal{T}}_O$ è proprio l'energia cinetica. Se il rigido non ha un punto fisso, $\tilde{\mathcal{T}}_G$ è l'energia cinetica "di rotazione rispetto al centro di massa" G.

[3] Come si vede da $\omega = \omega_i\,\mathsf{e}_i = \omega'_j\,\mathsf{e}'_j = \omega'_j\,R_{ij}\,\mathsf{e}_i$. La relazione inversa si ottiene in maniera analoga, osservando che la relazione $\mathsf{e}'_i = R_{ji}\,\mathsf{e}_j$ può essere invertita come $\mathsf{e}_i = \tilde{R}_{ji}\,\mathsf{e}'_j = R_{ij}\,\mathsf{e}'_j$.

5

Scegliendo la base solidale (e'_i) in modo tale che coincida con una terna principale d'inerzia, e ponendo $A \equiv I'_{11}$, $B \equiv I'_{22}$, $C \equiv I'_{33}$, si trova

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\,\omega\cdot I_O\cdot\omega &= \tfrac{1}{2}\left[\sin^2\theta\,(A\,\sin^2\psi + B\,\cos^2\psi) + C\,\cos^2\theta\right]\dot\phi^2 + \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\left[A\,\cos^2\psi + B\,\sin^2\psi\right]\dot\theta^2 + \tfrac{1}{2}\,C\,\dot\psi^2 + \\ &\quad + (A-B)\,\sin\theta\,\sin\psi\,\cos\psi\,\dot\phi\,\dot\theta + C\,\cos\theta\,\dot\phi\,\dot\psi\ .\end{aligned}$$

In particolare se il rigido ha struttura giroscopica intorno all'asse solidale generato da e'_3 , per cui $A = B$, si ottiene

$$\tfrac{1}{2}\,\omega\cdot I_O\cdot\omega = \tfrac{1}{2}\,(A\,\sin^2\theta + C\,\cos^2\theta)\,\dot\phi^2 + \tfrac{1}{2}\,A\,\dot\theta^2 + \tfrac{1}{2}\,C\,\dot\psi^2 + C\,\cos\theta\,\dot\phi\,\dot\psi\ .$$

Facciamo poi il caso limite di un'asta rigida, prendendo e'_3 proprio nella direzione dell'asta; ciò equivale a fare il limite per $C \to 0$, e si ottiene

$$\tfrac{1}{2}\,\omega\cdot I_O\cdot\omega = \tfrac{1}{2}\,A\left(\sin^2\theta\,\dot\phi^2 + \dot\theta^2\right)\ .$$

Qui l'angolo ψ e la velocità generalizzata $\dot\psi$ sono spariti, come dev'essere in quanto ora i gradi di libertà "di rotazione" sono solo due.

Per finire osserviamo che questa espressione coincide con l'energia cinetica (espressa in coordinate sferiche) di un punto materiale di massa $m = A/r^2$ vincolato a una superficie sferica di raggio r.