Teorema di Huyghens senza usare i tensori

D. Canarutto
18/12/2019

* * *

Nel libro di testo[1] il Teorema di Huyghens è espresso e dimostrato in termini di tensori, che nel programma di quest'anno sono facoltativi. Diamo allora la versione equivalente, presentata a lezione, che non utilizza la nozione di tensore.

Facciamo il caso di una distribuzione di massa continua, definita da una densità

$$\rho : \mathsf{C} \to \mathbb{M}\mathbb{L}^{-3}, \quad \mathsf{C} \subset \mathsf{P} \ .$$

Il caso discreto, con le sommatorie al posto degli integrali, è lasciato come esercizio.

Osserviamo prima di tutto che dalla definizione di applicazione d'inerzia

$$I_O(w) \equiv \int_{\mathsf{C}} \rho(P)\,(P-O) \times [w \times (P-O)]\,\mathrm{d}\mathsf{v} \ ,$$

utilizzando la formula del doppio prodotto vettoriale, si ottiene

$$I_O(w) = \int_{\mathsf{C}} \rho(P) \Big[(P-O)^2\, w - \big((P-O)\cdot w\big)\,(P-O)\Big]\,\mathrm{d}\mathsf{v} \ .$$

Facendo ora la sostituzione

$$(P-O) \mapsto (P-G) + (G-O)$$

e sviluppando i vari prodotti si ottiene

$$\begin{aligned}
&(P-O)^2 = (P-G)^2 + (G-O)^2 + 2\,(P-G)\cdot(G-O) \ , \\
&\big((P-O)\cdot w\big)\,(P-O) = \big((P-G)\cdot w\big)\,(P-G) + \big((G-O)\cdot w\big)\,(G-O) + \\
&\qquad\qquad + \big((G-O)\cdot w\big)\,(P-O) + \big((P-O)\cdot w\big)\,(G-O) \ .
\end{aligned}$$

Per la proprietà fondamentale del centro di massa, l'ultimo termine nell'espressione di $(P-O)^2$ e gli ultimi due termini nell'espressione di $\big((P-O)\cdot w\big)\,(P-O)$ non contribuiscono all'integrale che dà $I_O(w)$; infatti in ciascuno di questi termini, portando fuori dall'integrale ciò che non dipende dalla variabile di integrazione P, rimane un fattore

$$\int_{\mathsf{C}} \rho(P)\,(P-G)\,\mathrm{d}\mathsf{v} = 0 \ .$$

Pertanto facendo tutte le semplificazioni si ottiene

$$\begin{aligned}
I_O(w) &= \int_{\mathsf{C}} \rho(P) \Big[(P-G)^2\, w - \big((P-G)\cdot w\big)\,(P-G)\Big]\,\mathrm{d}\mathsf{v} + m\,(G-O)^2\, w - m\,\big((G-O)\cdot w\big)\,(G-O) = \\
&= I_G(w) + m\,(G-O)^2\, w - m\,\big((G-O)\cdot w\big)\,(G-O) \ .
\end{aligned}$$

[1] D. Canarutto, *Corso di Meccanica Razionale*, lulu.com (2019)