

del numero
Mico

Elementi di
algebra ed analisi
tensoriale
con applicazioni ai
sistemi continui

Corso di "Calcolo Tensoriale" tenuto presso la Facoltà di Ingegneria
dell'Università di Firenze
durante l'anno accademico 1974/75

INTRODUZIONE

BREVI CENNI STORICI SULLA TEORIA DEI TENSORI.

La teoria dei tensori è stata sviluppata per le esigenze della fisica, da una parte, e della geometria, dall'altra. Il suo sviluppo storico, benchè complesso, può essere caratterizzato in tre tappe, o filoni, principali, al solo fine della nostra esposizione, senza nessuna pretesa di rigore e completezza.

I) Gli albori della teoria possono essere riconosciuti nella idea cartesiana (prima metà del XVII secolo) della Geometria Analitica, che traduce in termini algebrico-numericì entità geometriche, quali i vettori. Successivamente (seconda metà del XIX secolo) tale metodo è stato esteso con l'introduzione di entità tensoriali. Esse generalizzano i vettori, in quanto sono rappresentate da "matrici a più indici", ciascuna delle quali è associata ad un "sistema di riferimento", e si "trasforma" in un certo modo al cambiamento di quest'ultimo. Una relazione di equivalenza, tra le matrici, induce per i tensori un significato "intrinseco" cioè svincolato dal sistema di riferimento (il quale risulta però essenziale per la loro introduzione).

Le tecniche matematiche qui usate non vanno molto al di là di quelle della Geometria e dell'Algebra elementari. La teoria si rivela utile per la descrizione di entità fisiche come, per esempio, le tensioni o le caratteristiche elastiche dei materiali.

II) Uno sviluppo essenziale della teoria, è stato indotto (seconda metà del XIX secolo ed inizi del XX secolo) da studi fisici, da una parte, e geometrici dall'altra, adattando i tensori a sistemi di coordinate, ed a spazi "curvi" ed introducendo le tecniche dell'Analisi Differenziale ed Integrale, le quali vengono potenziate per tale scopo. In questo quadro rientrano i teoremi di Stokes e di Gauss ed il Calcolo Differenziale Assoluto di Levi-Civita. Le tecniche matematiche sono dunque ben più complesse delle precedenti ed anche le possibilità applicative si fanno molto più vaste ed interessanti, riguardando essenzialmente lo studio dei "sistemi continui", meccanici ed elettromagnetici, con particolari successi, per esempio, nell'enunciazione delle "leggi di conservazione".

III) I più recenti sviluppi della teoria dei tensori risalgono a questi ultimi decenni e fanno parte integrante della revisione critica di tutto il linguaggio matematico, affermatosi con l'algebrizzazione di quest'ultimo e con un'articolazione organica in "strutture" distinte (Algebra, Topologia, Analisi, Geometria Differenziale, ecc.). In tale contesto, innanzitutto, i tensori vengono visti come enti puramente matematici, senza alcuna necessità di riferimento all'intuizione fisica. Inoltre, si distingue un aspetto algebrico dei tensori, per cui essi diventano parte integrante dell'Algebra Lineare (e Multilineare), ed un aspetto geometrico, per cui essi diventano parte integrante della Geometria Differenziale. In tal senso, lo stesso nome di "Calcolo tensoriale" perde un suo significato specifico, per diventare semplicemente il linguaggio corrente di teorie matematiche più generali, adatto ad unificare nozioni classiche di Algebra, Analisi e Geometria. Alcuni autori identificano i tensori con le applicazioni multilineari, mentre altri, con un procedimento più generale, definiscono autonomamente il prodotto tensoriale di spazi vettoriali e, successivamente, stabiliscono delle regole di identificazione tra tensori ed applicazioni multi-

lineari. E' in quest'ultima direzione che ci muoveremo anche noi.

La precedente classificazione ha un valore puramente espositivo, mentre la storia è ben più complessa. Per esempio, taluni aspetti della teoria, che sono stati elaborati nell'ambito di una certa corrente di pensiero, con certi presupposti filosofici, vengono poi adottati da altre scuole, ai fini di calcolo, ma in un certo contesto metodologico ben differente. La stessa successione cronologica deve essere fortemente corretta, per tenere conto dei ritardi, talvolta notevoli, nell'assimilazione da parte di una corrente del lavoro fatto da un'altra. Questo fenomeno è tanto maggiore, quanto maggiore è la divisione del lavoro nei campi della ricerca e la diversità di linguaggio, pur su argomenti di comune interesse. Per esempio, oggi nella maggior parte delle scuole di Ingegneria italiane, i tensori sono intesi alla prima maniera, riservando, eventualmente, il secondo approccio alla ricerca avanzata, mentre i tensori alla terza maniera sono spesso sconosciuti e si faticerebbe a riconoscerli come oggetti di proprio interesse.

ALCUNE OSSERVAZIONI CRITICHE.

Per capire la posizione che assumeremo noi, trattando i tensori, è necessario premettere alcune considerazioni critiche sulle teorie precedentemente esposte, almeno, per come esse si presentano in buona parte della letteratura. Naturalmente le nostre critiche vanno assunte con la cautela dovuta alla non univocità delle formulazioni in esame.

Incominciamo a prendere in considerazione le formulazioni I e II della teoria dei tensori.

Innanzitutto esse sono teorie né propriamente matematiche, né propriamente fisiche, ma fisico-matematiche, nelle quali manca spesso una distinzione organica di ruoli tra il linguaggio fisico-operativo e quello matematico-logico.

Per esempio, nella nozione di "sistema di riferimento", che è alla base della definizione di tensore, appaiono intimamente fusi l'aspetto cinematico di "osservatore", operativo di "sistema di misurazioni", analitico di "sistema di coordinate" ed algebrico di "base", i quali richiederebbero, invece, ben maggiori e distinti approfondimenti.

In taluni casi la teoria fa ricorso in modo essenziale all'intuizione in un contesto che dovrebbe essere puramente deduttivo. Ciò capita, per esempio, per le nozioni di "angolo", "orientazione", "volume", ecc., le quali pur essendo intuitive, non sono affatto semplici da un punto di vista matematico. Anzi, tali concetti coinvolgono dei punti cruciali della teoria.

La teoria dei tensori è talvolta presentata in modo non organico all'Algebra, all'Analisi e alla Geometria, le quali sono semplicemente presupposte. Si hanno così un gran numero di suddivisioni acritiche e di inversioni logiche.

Per esempio, non viene messo in luce, in modo sufficientemente naturale, la natura comune delle nozioni di "determinante", "volume", "orientazione", ecc. Tuttalpiù, si verificano le analogie con dei calcoli "ad hoc" che non evidenziano le motivazioni a priori.

L'insufficiente organicità, ora lamentata, si riscontra soprattutto nello scarso senso intrinseco del linguaggio, che fa un abuso di matrici. Le definizioni e le operazioni sono enunciate in termini matriciali ed il loro significato può essere spiegato solo dopo aver verificato la loro indipendenza dal sistema di riferimento. Si ottengono così formule complicate ed un po' miracolistiche. Per esempio, risulta un po' strano il perché le matrici con certe regole di trasformazione, ossia i tensori, debbano avere un ruolo così interessante in Geometria.

Anche dal punto di vista fisico risulta strano il fatto che i tensori siano atti a descrivere egregiamente tanti fenomeni fisici, quando si pretenda di ricercare la spiegazione nella

legge di trasformazione di certe misure al cambiamento del sistema di riferimento.

Per quanto riguarda, invece, la formulazione III della teoria dei tensori, si possono fare considerazioni diverse.

La teoria è stata creata da matematici nell'ambito di un discorso profondo, ma essenzialmente interno alla Matematica. Pertanto, le applicazioni di tale linguaggio alla Fisica non hanno quell'ampiezza che si potrebbe desiderare, o, per lo meno, non sono sufficientemente divulgate; in ogni caso esse sono carenti, per quanto riguarda la Fisica elementare, che interessa al nostro corso.

La teoria è esente dai difetti che abbiamo lamentato per le altre formulazioni. Ma, dato il suo carattere avanzato, rispetto al nostro corso, mal si accorda con le conoscenze elementari e più classiche di cui dispone lo studente.

Noi siamo, dunque, indotti ad una elaborazione che si muova nella linea scientifica di tale linguaggio, ma che risulti organica alla preparazione dello studente ed alle finalità pratiche che ci proponiamo.

CRITERI DEL CORSO.

Innanzitutto noi partiamo da una certa filosofia sulla corretta enunciazione di una teoria fisica. Riteniamo che una teoria fisica consista, almeno, di tre linguaggi distinti: un linguaggio operativo, che descrive un certo complesso di esperienze fisiche, un linguaggio matematico, che costituisce un modello puramente formale (cioè deduttivo e sintatticamente autosufficiente), ed un linguaggio di traduzione, il quale collega il modello con le esperienze fisiche. Per esempio, riferendoci alla Meccanica Classica, nella sua più semplice formulazione, il linguaggio operativo descriverà i regoli rigidi, gli orologi, ecc., il linguaggio

matematico consisterà essenzialmente nella Geometria Euclidea (e nell'Analisi, ecc. sviluppate in tale contesto) ed il linguaggio di traduzione costituirà il collegamento tra i primi due.

Naturalmente, il discorso precedente è semplicistico. In pratica la Fisica è costituita da un complesso di teorie, ciascuna delle quali descrive con successo un aspetto dei fenomeni fisici. Tali teorie possono essere ordinate, in base alla loro potenza, venendo così a costituire un reticolo e non una catena totalmente ordinata. Per esempio, i sistemi continui sono trattati dalla Meccanica Classica (con un modello matematico continuo, di tipo essenzialmente geometrico), dalla Meccanica Statistica (con un modello matematico discontinuo, di tipo essenzialmente probabilistico), dalla Termodinamica (con un modello matematico continuo, ma più ricco di quello puramente geometrico). Nessuna delle tre teorie può essere completamente ridotta ad un'altra e si possono trovare, solo parzialmente, delle equivalenze o delle dipendenze fra esse.

Riteniamo dunque essenziale, anche dal punto di vista didattico, la distinzione fra i precedenti linguaggi ed i loro ruoli. Ogni affermazione deve essere formulata all'interno di un linguaggio, dotato di regole sintattiche sufficientemente precise, rispetto al grado di chiarezza che vogliamo attribuire ad esse. Per esempio, la domanda "che cosa è un sistema di riferimento inerziale" ha un significato ben diverso secondo che è posta all'interno del linguaggio operativo, o matematico, o di traduzione di un certo modello; essa ha, poi, un significato ancora più profondo se non è posta all'interno di un certo modello, ma se è una domanda "metalinguistica", cioè, se comporta la ricerca stessa di un modello, all'interno del quale essa possa avere una risposta fisicamente significativa e non banale. Viceversa, se non si precisa il contesto della domanda, essa rischia di avere un significato tanto vago, da non poter essere

considerata scientifica.

Naturalmente lo sviluppo delle teorie fisiche è un fenomeno storico, non solo indotto da una dinamica interna alla scienza ed alla cultura, più in generale, ma potentemente sospinto dall'evoluzione dell'organizzazione produttiva e sociale. A causa della complessità di tale fenomeno, le teorie fisiche si presentano come un coacervo in cui è opportuno mettere ordine, superando criticamente, con una visione organica, la stratificazione in cui esse si sono sovrapposte, in tempi (cronologici o logici) distinti. Questa revisione comporta necessariamente un lavoro interdisciplinare, nel quale ha un posto preminente un rapporto organico fra Fisica e Matematica moderna, che coinvolga anche gli aspetti elementari e didattici di entrambe.

Il nostro corso si muove nella linea ora esposta ed è rivolto essenzialmente alla costruzione della teoria matematica dei tensori, atta a formulare un modello dei sistemi meccanici continui, che costituiscono il campo fisico di maggiore interesse per l'Ingegnere Civile.

Comunque, la teoria matematica che sviluppiamo ha un valore ed un interesse ben più generale e profondo, sia per le sue vastissime possibilità di applicazione in Fisica, sia perchè essa fornisce una struttura logica in cui è possibile inquadrare organicamente vasti settori della Matematica classica e moderna.

Noi cerchiamo di mettere in evidenza tale organicità, pur rimanendo entro i limiti che abbiamo imposto al corso. La teoria dei tensori viene così a far parte integrante dell'Algebra Lineare e Multilineare della Geometria e dell'Analisi Differenziale degli spazi affini, che si svolgono in un discorso unitario (l'Analisi Integrale e la Geometria Differenziale delle varietà non è trattata, per mancanza di tempo; però l'interpretazione che seguiamo è favorevole a tali eventuali sviluppi).

La teoria si articola nella costruzione di "strutture" essenzialmente di tipo algebrico, iniziando dalle più semplici ed

arricchendole a tappe successive, fino ad arrivare a quelle di "spazio affine euclideo", importante perchè costituisce un ottimo modello dello spazio fisico.

Ogni nozione è introdotta, nel contesto di una precisa struttura, nella quale essa acquista pieno significato. Per esempio, le nozioni di lunghezza, angolo e volume sono date nell'ambito degli spazi euclidei. Infatti, riteniamo che i concetti matematici, evulsi dal loro ambiente naturale non abbiano validità scientifica. Per esempio, per noi non hanno significato i "vettori", ma gli "spazi vettoriali" ed un vettore esiste solo in quanto esso è un elemento di un certo insieme dotato di una certa struttura.

La costruzione e lo sviluppo delle teorie algebriche, da noi trattate, si svolgono secondo moduli pressochè costanti. Innanzitutto tutto il nostro linguaggio è costituito quasi esclusivamente dalle due parole: "insieme" ed "applicazione". Infatti, noi consideriamo insiemi nei quali sono definite certe operazioni, da cui traiamo le prime conseguenze. Studiamo poi le applicazioni tra insiemi dotati di strutture analoghe. Abbiamo, per esempio, gli spazi vettoriali e le applicazioni lineari, gli spazi vettoriali euclidei e gli operatori unitari, gli spazi affini e le applicazioni affini, o le applicazioni che possono essere approssimate come affini (cioè quelle differenziabili), che ci danno la nozione di derivata.

Inoltre, noi andiamo alla ricerca, all'interno di ogni struttura, degli elementi canonici, cioè privilegiati, naturali per essa. In tal modo lo sviluppo della teoria non ha nulla di occasionale, ma risulta quasi obbligato da una logica interna. Anzi, concetti che tradizionalmente sono dati in contesti diversi, e con definizioni "ad hoc", saltano fuori, invece, in modo naturale e, magari, con legami stretti ed insospettati. Così, per esempio, nell'ambito dei tensori antisimmetrici, si vede che la potenza tensoriale antisimmetrica n -ma $\wedge^n(V)$, di uno spazio vettoriale

V di dimensione n , ha dimensione 1 e perciò risulta essere uno spazio privilegiato: di qui discendono in modo naturale le definizioni di determinante, di orientazione, di volume, ecc.

Una delle caratteristiche salienti del nostro corso è la esposizione intrinseca. Ossia, tutte le strutture algebriche e le conseguenti nozioni sono introdotte direttamente, per via assiomatica, senza ricorrere alla rappresentazione numerica. Riteniamo che così si arrivi meglio al nocciolo di ogni questione, si faccia una grande economia di linguaggio favorendo la sintesi, ed inoltre si ottengano modelli fisici molto semplici e naturali. Per esempio, riteniamo che sia molto più semplice e naturale assumere come modello dello spazio fisico uno spazio affine euclideo di dimensione 3, che non $\mathbb{R}^3$ (in cui, l'origine ed i tre assi non hanno alcun significato fisico).

Comunque, per ogni nozione intrinseca, introduciamo anche sistematicamente la sua rappresentazione numerica, o matriciale, la quale viene utilizzata essenzialmente nei calcoli pratici. In generale, per ogni nozione ricaviamo dalla sua definizione intrinseca (la quale esprime direttamente il significato che ci interessa) le espressioni matriciali, relative ai vari sistemi di coordinate. Questo metodo ci sembra più chiaro e più semplice che quello di partire dalle formule relative ai vari sistemi di coordinate, di far vedere che esse sono equivalenti (e che perciò definiscono un ente intrinseco) e, poi, di capire il significato geometrico della definizione.

Il criterio ora esposto comporta, spesso, delle inversioni rispetto all'esposizione tradizionale, le quali possono, talvolta, colpire lo studente e creargli delle difficoltà. Ma questi può anche valutare i vantaggi di sintesi e chiarezza che può ottenere per questa strada.

Per esempio, non definiamo i tensori come delle matrici che si trasformano in un certo modo al cambiamento di base, ma diamo una definizione intrinseca, che usa solo la struttura di spazio

vettoriale, cercando di risolvere il problema della trasformazione di applicazioni bilineari in applicazioni lineari. La rappresentazione matriciale dei tensori e la relativa legge di trasformazione diventa, allora, un banale teorema, e non una definizione "ad hoc".

Così, pure, introduciamo la nozione di "derivata", approssimando le applicazioni tra spazi affini, con applicazioni affini, in modo intrinseco. Solo in un secondo momento, l'introduzione di sistemi di coordinate (non necessariamente cartesiane), dà luogo alla rappresentazione matriciale delle applicazioni derivate, che si esprime mediante le "derivate parziali".

Un altro esempio è dato dalla nozione di "gradiente" di una funzione, definito come il vettore associato, tramite la "metrica" alla derivata della funzione.

Similmente, il tensore delle "deformazioni", è introdotto come la misura della modificazione della struttura euclidea, in seguito ad una trasformazione differenziabile. Ci sembra che tale definizione sia molto semplice, centri direttamente la natura essenziale del problema e fornisca delle formule facili, esatte e valide in qualunque sistema di coordinate.

Abbiamo la convinzione che il linguaggio algebrico metta in evidenza l'aspetto estetico della Matematica, il quale va valorizzato, non con intento edonistico ma come un importante strumento per la didattica e per la ricerca.

Si potrebbe pensare che la struttura rigidamente deduttiva possa soffocare l'intuizione. E' bensì vero che il metodo seguito richiede un certo sforzo. Riteniamo, però, che l'intuizione non sia un fatto assoluto, ma storico e che si evolva con la cultura. Riteniamo che la conoscenza scientifica debba essere sintattica, cioè basata sulle regole logiche del linguaggio. Comunque, in ogni stadio della cultura, l'uso di certe regole diventa psicologicamente automatico, cosicchè si perde la coscienza dei relativi processi sintattici, i cui risultati ac-

quistano così un aspetto puramente semantico. E' dunque opportuno adeguare la didattica scientifica all'evoluzione culturale, guidando l'intuizione verso stadi più avanzati. Per esempio, oggi, anche per l'Ingegnere, può essere proficuamente sviluppata una intuizione di tipo algebrico intrinseco, la quale segni un progresso, rispetto a quella dell'epoca di Lagrange o Eulero.

Per favorire tale intuizione algebrica, dei problemi fisici, oltre che per una naturale esigenza di rigore scientifico, seguiamo un'impostazione ed un linguaggio coerentemente unitario nella trattazione sia delle questioni teoriche, sia degli esercizi pratici. Possiamo anche renderci conto come lo studio dei problemi pratici non ne risulta appesantito, ma viene rinsaldato il legame tra teoria matematica ed applicazioni fisiche.

Per facilitare la comprensione del corso è opportuno tener conto del fatto che la maggior parte delle nozioni introdotte ha sistematicamente almeno quattro aspetti, che vanno analizzati e confrontati: un aspetto matematico, formale, algebrico, un aspetto geometrico intrinseco, un aspetto matriciale, un aspetto fisico.

La lunghezza apparentemente eccessiva del testo è dovuta alle inevitabili notizie di dettaglio. Ma, in realtà, i punti salienti sono molto pochi, semplici e strettamente collegati fra di loro. Pertanto, è essenziale che lo studente segua il filo del discorso e non si perda nello studio dei dettagli, i quali vanno visti come esercizi.

Veniamo, dunque, al contenuto del corso.

La principale nozione è quella di "spazio vettoriale": l'aspetto algebrico è costituito dalla sua definizione come insieme dotato di certe operazioni; l'aspetto geometrico è dato dalla nozione, associata, di "spazio affine"; l'aspetto matriciale è costituito dalla rappresentazione numerica dei vettori (relativamente ad una base), o dei punti (relativamente ad un sistema di coordinate); l'aspetto fisico degli spazi vettoriali deriva dal

fatto che essi fungono ottimamente da modello per svariati insiemi di fenomeni fisici omogenei, per i quali siano definiti in modo naturale la "sovrapposizione" ed i "multipli" (come forze, tensioni, deformazioni, caratteristiche elastiche, ecc.); l'aspetto fisico degli spazi affini consiste nel fatto che lo spazio fisico ha, come modello matematico, uno spazio affine euclideo a dimensione 3.

Successivamente, una nozione fondamentale è quella di "applicazione lineare": da un punto di vista algebrico, un'applicazione fra spazi vettoriali è lineare se conserva la struttura vettoriale; operatori lineari con un notevole significato geometrico sono le omotetie, le simmetrie e soprattutto gli operatori unitari (rotazioni e riflessioni), negli spazi vettoriali euclidei, e gli spostamenti rigidi, negli spazi affini euclidei; la rappresentazione numerica delle applicazioni lineari è costituita dalle matrici ad esse associate, relativamente a certe basi; l'importanza fisica delle applicazioni lineari sta nel fatto che esse sono atte a descrivere la dipendenza tra certi fenomeni e le loro cause (entrambi di natura vettoriale), per la quale valga il "principio di sovrapposizione" (alla sovrapposizione di due cause, corrisponde la sovrapposizione dei loro effetti).

Le potenze tensoriali $T^n(V)$ appaiono come dei particolari spazi vettoriali costruiti intrinsecamente, a partire da uno spazio vettoriale V , i quali, sono atti a fornire una rappresentazione algebrica degli spazi di applicazioni lineari, vantaggiosa per lo sviluppo di certi calcoli. Dunque, i tensori non hanno un diretto significato geometrico o fisico, ma vanno considerati solo come una tecnica algebrica. Così, per esempio, quando noi consideriamo lo stato di tensione, lo stato di deformazione, le caratteristiche elastiche di un sistema continuo, ecc., desumiamo direttamente dall'esperienza fisica che essi sono rappresentabili da applicazioni lineari e, successivamente,

osserviamo che da ciò deriva in maniera automatica, ma non essenziale, la loro rappresentabilità mediante tensori.

Otteniamo la struttura di spazio vettoriale (o affine) euclideo, aggiungendo alla struttura di spazio vettoriale una forma bilineare, simmetrica e definita positiva. E' in questa struttura che ha senso parlare di misura di lunghezze, angoli, volumi, di rotazioni, ecc., deformazioni, dilatazioni, ecc.

L'Analisi Differenziale si inserisce in modo naturale ed organico nel nostro discorso. Ciò avviene con l'introduzione delle applicazioni differenziabili, tra spazi affini, le quali sono approssimabili con applicazioni affini, cioè con applicazioni, il cui incremento dipende linearmente dall'incremento della variabile. Questa approssimazione è data dalla applicazione lineare "derivata". Pertanto tutti i concetti e le tecniche dell'Algebra Lineare e Tensoriale possono essere adoperati naturalmente nella Analisi.

Tali tecniche sono usate, innanzitutto per lo studio della Geometria Differenziale degli spazi affini, volto, principalmente, ad un'analisi rigorosa delle deformazioni e della cinematica dei moti continui, secondo il metodo euleriano e lagrangiano.

Si passa poi ad applicare i precedenti risultati allo studio dinamico dei sistemi continui, in particolare elastici, dove, coerentemente con l'esperienza, la dipendenza tra causa ed effetto soddisfa al principio di sovrapposizione almeno al primo ordine. Così, il legame tra Algebra Lineare, Algebra Tensoriale, Analisi Differenziale, Geometria Differenziale e Fisica appare molto naturale e per nulla occasionale.

PARTE PRIMA

ELEMENTI DI

ALGEBRA LINEARE E TENSORIALE

INDICE DEL 1° VOLUME

CAPITOLO I - APPLICAZIONI

- 0 Introduzione.
- 1 Applicazioni.
- 2 Prodotto cartesiano.

CAPITOLO II - MATRICI

- 0 Introduzione.
- 1 Matrici.
- 2 Addizione e moltiplicazione per gli scalari delle matrici.
- 3 Moltiplicazione tensoriale fra matrici.
- 4 Contrazione di matrici.
- 5 Moltiplicazione di matrici rettangolari.

CAPITOLO III - GRUPPI

- 0 Introduzione.
- 1 Gruppi.
- 2 Il gruppo additivo delle matrici.
- 3 Il gruppo moltiplicativo $GL(n, R)$.
- 4 Il gruppo delle permutazioni.
- 5 Anelli, corpi e campi.

CAPITOLO IV - SPAZI VETTORIALI

- 0 Introduzione.
- 1 Spazi vettoriali.

- 2 Sottospazi (vettoriali).
- 3 Algebre.
- 4 Vettori linearmente indipendenti.
- 5 Base di uno spazio vettoriale.
- 6 Dimensione di uno spazio vettoriale.
- 7 Dimensione dei sottospazi di uno spazio vettoriale.
- 8 La rappresentazione matriciale degli spazi vettoriali.

CAPITOLO V - APPLICAZIONI LINEARI

- 0 Introduzione.
- 1 Applicazioni lineari.
- 2 Applicazioni lineari e basi.
- 3 Lo spazio vettoriale $L(U,V)$ delle applicazioni lineari.
- 4 Composizione di applicazioni lineari.
- 5 Lo spazio vettoriale $L(R,V)$.
- 6 L'algebra $L(V,V)$ ed il gruppo $GL(V)$. Autovalori ed autovettori.
- 7 Lo spazio vettoriale duale $L(V,R) \cong V^*$.
- 8 Applicazioni lineari e cambiamenti di base.

CAPITOLO VI - APPLICAZIONI MULTILINEARI

- 0 Introduzione.
- 1 Applicazioni multilineari.
- 2 Lo spazio vettoriale $L(U_1, \dots, U_p; V)$ delle applicazioni p-lineari.
- 3 L'isomorfismo $L^2(U,V;W) \cong L(U, L(V,W))$.
- 4 Applicazioni multilineari simmetriche ed antisimmetriche.

CAPITOLO VII - PRODOTTO DIRETTO, SOMMA DIRETTA E QUOZIENTE

- 0 Introduzione.
- 1 Prodotto diretto.
- 2 Somma diretta.
- 3 Algebre graduate.

- 4 Lo spazio vettoriale liberamente generato da un insieme.
- 5 Quoziente.

CAPITOLO VIII - ALGEBRA TENSORIALE

- 0 Introduzione.
- 1 Prodotto tensoriale di due spazi vettoriali.
- 2 Prodotto tensoriale di due applicazioni lineari.
- 3 Isomorfismi canonici di rappresentazione tensoriale delle applicazioni lineari e multilineari. Regole pratiche.
- 4 Prodotto tensoriale di p spazi vettoriali.
- 5 L'algebra tensoriale di uno spazio vettoriale.
- 6 Contrazioni nell'algebra tensoriale mista. Traccia.
- 7 Il tensore fondamentale.

CAPITOLO IX - ALGEBRA ESTERNA E DETERMINANTI

- 0 Introduzione.
- 1 Tensori simmetrici ed antisimmetrici.
- 2 La potenza tensoriale antisimmetrica di uno spazio vettoriale U.
- 3 Il prodotto tensoriale antisimmetrico di p applicazioni lineari. Determinante e polinomio caratteristico di un operatore lineare.
- 4 Isomorfismi canonici di rappresentazione tensoriale delle applicazioni lineari e multilineari antisimmetriche. Regole pratiche.
- 5 L'algebra esterna di uno spazio vettoriale V.
- 6 Contrazioni nell'algebra tensoriale antisimmetrica mista. Determinante.
- 7 Il tensore antisimmetrico fondamentale.
- 8 Determinante di matrici. Sistemi lineari.

CAPITOLO X - STUDIO DI UNA FORMA BILINEARE SIMMETRICA

- 0 Introduzione.
- 1 Forme bilineari simmetriche e forme quadratiche.
- 2 Forme bilineari simmetriche ed ortogonalità.

- 3 Forme bilineari simmetriche non degeneri.
- 4 Forme bilineari simmetriche definite positive.

CAPITOLO XI - SPAZI VETTORIALI EUCLIDEI

- 0 Introduzione.
- 1 Spazi vettoriali euclidei: moltiplicazione scalare e metrica.
- 2 L'isomorfismo $E \approx E^*$.
- 3 Estensione della moltiplicazione scalare alle algebre tensoriali.
- 4 L'isomorfismo $*$ di Hodge. Moltiplicazione vettoriale.
- 5 Operatori lineari e forme bilineari.
- 6 Trasposizione metrica.
- 7 Il gruppo unitario $U(E)$. Rotazioni.
- 8 Isotropia.