Registro delle lezioni del corso: "Matematica e Statistica" A.A. 18/19

- **Lezione del 24/09/2018:** Presentazione del corso elencando sia gli aspetti tecnici e i contenuti prettamente matematici sia quelli di natura più organizzativa (orario di ricevimento, appelli della sessione invernale, libri di riferimento...). Esempio elementare di probabilità (esperimento sul lancio di un dado). Teoria degli insiemi. Definizione formale di cosa è un insieme, di sottoinsieme e di come scrivere - utilizzando l'appropriato formalismo - un insieme descrivendone i suoi elementi. Inclusione tra insiemi e nozione di uguaglianza tra insiemi. Unione, intersezione e insieme complementare; il tutto con esempi e descrizione precisa delle proprietà di queste operazioni. Insieme universo e insieme vuoto. Differenza di due insiemi. Diagrammi di Venn e esempi sul loro uso per descrivere le connessioni che intercorrono tra sottoinsiemi di uno stesso insieme universo.

- **Lezione del 28/09/2018:** Elenco e descrizione delle proprietà dell'unione e dell'intersezione di insiemi, con alcuni esempi per illustrare la situazione. Leggi di De Morgan. Applicazioni al caso di un diagramma di Venn con due insiemi. Esempio con due digrammi di Venn, relativi al caso di due insiemi A e B, sia in configurazione generale e sia nel caso in cui A sia incluso in B. Diagrammi di Venn con tre insiemi. Esempio esplicito con studio delle relazioni tra i sottoinsiemi. Numeri naturali, interi, razionali e reali. Nozione di valore assoluto e di distanza sulla retta reale. Proprietà della distanza. Intervalli della retta reale e loro descrizione in termini delle disequazioni che li caratterizzano. Proprietà elementari delle disequazioni con due esempi: studio di una disequazione di primo grado e di una di secondo grado.

- **Lezione del 01/10/18:** Esempi espliciti sulla risoluzione di disequazioni (caso di un problema di secondo grado e caso di una espressione razionale fratta). Valore assoluto e disuguaglianze che coinvolgono il valore assoluto: proprietà e calcoli completi per due esempi espliciti. Elenco di alcuni fatti algebrici elementari: come decomporre la differenza di due quadrati, la somma di due cubi oppure la differenza di due cubi. Quadrato e cubo di un binomio. Quadrato di un trinomio. Potenze ed esponenti: proprietà elementari ed esempi nel caso di potenze con base reale ed esponente intero. Radici n-esime e relativo teorema. Esempi vari. Caso della radice n-esima di una base a elevata alla n. Studio delle varie situazioni per n pari oppure dispari. Esempi espliciti anche in questo caso. Generalizzazione al caso di una base positiva a elevata al numero frazionario p/q nei razionali. Come definire la funzione esponenziale a^x per mezzo di un procedimento di limite basandosi sulla conoscenza di a^y, dove $y=p/q$, e usando il teorema che dice che i numeri razionali sono densi nei reali. Costruzione formale ma non precisa nei dettagli in quanto non è ancora stata introdotta la nozione di limite. Proprietà della funzione esponenziale.

- **Lezione del 05/10/2018:** Definizione di cosa è una funzione con esempi. Definizione della funzione logaritmo con una dettagliata lista d tutte le proprietà spiegandole in dettaglio. Cambio di base ed esempi su questa procedura. Alcune altre proprietà del logaritmo derivate da quelle elementari scritte inizialmente: come riscrivere $log_{ab}(c)$ in termini delle basi a, b e c; $log_{1/a}(c)=-log_a(c)$;

$log_a(b)=1/log_b(a)$. Equazioni e disequazioni logaritmiche con esempi espliciti risolti in dettaglio. Prodotto cartesiano di insiemi. Diagrammi ad albero e loro utilizzo per elencare e contare gli elementi del prodotto finito di insiemi finiti. Principio fondamentale del calcolo combinatorio e suo utilizzo. Esempi in cui si può utilizzare tale principio. Notazione fattoriale con definizione e prime proprietà. Disposizioni di n oggetti presi r ad r. Permutazioni di n oggetti. Calcolo di $D(n, r)$ e $P(n)$ per mezzo del relativo teorema che dice $D(n, r)=n!/(n-r)!$ e $P(n)=n!$. Caso di permutazioni con ripetizione e relativo teorema per calcolare il numero di possibili esiti. Esempio esplicito su questo caso.

- **Lezione del 08/10/2018:** Commenti sul teorema riguardo le permutazioni con elementi ripetuti. Campioni ordinati. Caso dell'estrazione di r palline da un'urna che ne contiene $n\geq r$ con reimbussolamento e senza reimbusslamento e rela. Definizione di campione r-dimensionale. Coefficiente binomiale. Definizione e proprietà fondamentali ed esempi: $\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}$, e più in generale $\binom{n}{a}=\binom{n}{b}$ con $a+b=n$ con esempi espliciti. Teorema sul calcolo della potenza n-esima di un binomio con esempio esplicito. Combinazioni Caso di combinazioni di n oggetti presi r ad r. Teorema per il quale il numero di combinazioni di n oggetti presi r ad r è dato dal coefficiente binomiale $\binom{n}{r}$, ovvero $C(n, r) = \binom{n}{r}$. Confronto fra $C(n, r)$ e $D(n, r)$. Esempio esplicito. Introduzione alla probabilità: Insieme Campionario ed eventi. Prime proprietà. Esempio di uno sazio campionario finito ed equiprobabile. Esempio del lancio di un dado considerando come eventi l'uscita di numeri dispari, pari e primi. Descrizione per mezzo di un diagramma di Venn con tre insiemi. Calcolo delle relative probabilità assumendo che lo spazio sia equiprobabile. Esempio che consiste nel lanciare una moneta ripetutamente 3 volte di fila; spazio campionario fatto di triplette ordinate di T o C. Studio della probabilità di alcuni eventi assumendo che la moneta sia equilibrata e lo spazio equiprobabile. Assiomi della probabilità con spiegazioni. Misura di probabilità e spazio di probabilità.

- **Lezione del 12/10/2018:** Discussione riguardo il quarto assioma della probabilità. Cenni agli insiemi numerabili e relativa definizione. Definizione di funzione iniettiva e suriettiva. Unioni e intersezioni numerabili. Teoremi relativi a conseguenze dei 4 assiomi fondamentali: $P(\empty)=0$; $P(A^c)=1-P(A)$; Se $A\subseteq B$ allora $P(B)\geq P(A)$; $P(A\B) = P(A) - P(A\cap B)$; $P(AUB)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$. Corollario su come riscrivere $P(AUBUC)$ usando 2 volte $P(AUB)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$. Spazi di probabilità finita. Definizione e come introdurre una misura di probabilità soddisfacente due condizioni fondamentali. Esempio sul lancio consecutivo (3 volte) di una moneta. In questo caso tutti i sottoinsiemi dello spazio campionario sono eventi. Spazi finiti equiprobabili. Come scrivere la misura di probabilità in questo caso. Esempio su un lotto di 12 oggetti di cui 4 sono difettati (estraiamo coppie non ordinate di oggetti). Probabilità condizionata. Definzioni ed esempi. Descrizione per mezzo di un diagramma di Venn. P(A | E)= P(A\cap E)/ P(E). Se lo spazio è finito Allora P(A | E)= |A\cap E|/|E|. Teorema che dice che P(A\cap E)= P(E)P(A| E). Esempio sul lancio di due dadi sapendo che (evento E) la somma dei risultati è 6.

- **Lezione del 15/10/2018:** Definizione di intorno circolare di un punto. Definizione di insieme aperto ed esempi. Definizione di insieme chiuso. Definizione di punto isolato e esempi. Definizione di punto di accumulazione ed esempi. Definizione di limite di funzione con ϵ e δ e spiegazione della nozione. Esempio, nei dettagli, per il limite di $f(x)=x^2$ per x che tende ad x_0. Esempio, nei dettagli, per il limite di $f(x)=|x|$ per x che tende ad x_0. Esempio, nei dettagli, per il limite di $f(x)=1/x$ per x che tende ad $x_0\ne 0$. Interruzione della lezione per permettere alla rappresentante degli studenti di riportare informazioni di utilità ai nuovi iscritti.

- **Lezione del 19/10/2018:** Conclusione dell'esercizio sul limite di $f(x)=1/x$ per x che tende a $x_0\ne 0$ con i conti espliciti. Teorema dell'unicità del limite. Definizione di funzioni continua mettendo in evidenza le differenze con la definizione di limite. Esempio di funzione non continua ($f(x)=segno(x)$ che non è continua in $x=0$). Teorema della permanenza del segno per funzioni continue con esempio grafico. Teorema sulla continuità di prodotto e somma di funzioni continue. Teorema riguardo al fatto che le funzioni: radice ennesima, polinomi di grado qualunque, esponenziale, logaritmo e funzioni trigonometriche seno e coseno sono continue su tutti i punti del loro dominio di definizione. Definizione di Limite destro e limite sinistro. Teorema sul fatto che c'è esistenza del limite solo quando il limite destro coincide con il limite sinistro (che quindi devono esistere entrambi). Teorema (enunciato in maniera informale) riguardo al fatto che nel considerare il limite del prodotto di due funzioni, quando esistono finiti i limiti di entrambe le funzioni, allora il limite del prodotto coincide con il prodotto dei limiti. Due esempi di calcolo di limiti, espliciti, usando la teoria fornita (entrambi nel caso indeterminato $0/0$).

- **Lezione del 22/10/2018:** Esempio esplicito sul calcolo del limite destro e sinistro per una funzione definita in due modi diversi in due porzioni del suo dominio. Limite di funzione per $x\to +\infty$ e limite di funzione per il caso in cui $x\to -\infty$. Caso degli asintoti orizzontali. Descrizione della definizione di limite all'infinito per via grafica ed esempio esplicito con la funzione $f(x)= (1+|x|)/(x-1)$. Teorema (con dimostrazione) per il quale una funzione è continua in un punto isolato del suo dominio. Teorema per il quale se si ha un punto di accumulazione per l'intersezione dei domini di due funzioni f e g, allora detti l e m rispettivamente i limiti di f e di g quando $x\to x_0$ allora, escludendo casi che diano luogo a forme indeterminate, si ha che il limite fi $f\cdot g$ per $x\to x_0$ è uguale al prodotto dei limiti $l\cdot m$. Caso del limite di $f(x)$ che va a più infinito per x che tende ad un punto di accumulazione x_0 per il dominio della f. Stessa definizione nel caso di - infinito. In questo contesto caso dei limiti destri e sinistri. Esempio con le funzioni $f(x)=1/|x|$ e $g(x)=1/x$. Teorema "operativo" in cui vengono elencate tutte le operazioni permesse tra i limiti di due funzioni, nel caso di un punto di accumulazione comune per i due domini e nel caso di limiti all'infinito. Lista dei casi indeterminati e commenti. Definizione della composizione di due funzioni. Teorema riguardo al fatto che se compongo una funzione g continua con una f che ammette limite y_0, per $x\to$$ e tale limite y_0 è nel dominio della g, allora il limite della composizione coindide con g letto sul limite. Esempio esplicito per $f(x)=\sqrt{3+ x^2}/x$ per $x\to-infty$.

- **Lezione del 26/10/18:** Limiti di funzioni composte. Teorema relativo alla possibilità di comporre i limiti di due funzioni (sotto opportune ipotesi). Esempio nel quale si fa vedere che in generale è falso che il limite di una funzione composta è uguale alla composizione dei limiti. Caso nel quale si considera un punto di accumulazione per il dominio della funzione più interna f (con limiti finiti sia della f che della g, quest'ultima è la funzione esterna). Caso di limite finito per $x\to +\infty$ e il limite di g è finito. Caso in cui sia il limite di f che quello di g sono infiniti. Due esempi di calcolo esplicito usando la teoria. Limiti fondamentali e come ottenere alcuni di essi a partire dal limite del numero di Nepero. Altro esempio esplicito in cui si usano esplicitamente i limiti fondamentali. Teorema del confronto (Teorema dei carabinieri) e teorema del confronto in cui se $f(x)\geq g(x)\geq 0$ e g tende a $+\infty$ per $x\to x_0$ allora $f(x) \to +\infty$. Uso esplicito del teorema dei carabinieri per provare che $\lim_{x\to 0}\log_a(x)/x = 0$. Definizione di incremento di una funzione, assegnati due punti, e di rapporto incrementale. Definizione di derivata come limite del rapporto incrementale. Limite destro e sinistro del rapporto incrementale, se essi sono finiti e uguali, allora esiste la derivata nel punto.

- **Lezione del 5/11/2018:** Richiami della nozione di derivata, nozione di derivata laterale calcolo di derivate elementari. Derivata destra e sinistra per la funzione valore assoluto quando $x\to 0$. In Particolare calcolo esplicito della derivata per $f(x)=x^n$ con n naturale. Formula analoga per un esponente reale. Formula per la funzione data dalla radice n-sima. Calcolo esplicito per la derivata del logaritmo con base qualunque. Introduzione alla nozione di funzione derivata assumendo che esista la derivata punto per punto, in un sottoinsieme del dominio della funzione di partenza. Derivata delle funzioni trigonometriche. Teorema riguardo la derivata della somma, differenza e prodotto. Teorema riguardo la derivata della derivata del reciproco di una funzione e del rapporto di funzioni. Esempio del calcolo della derivata della funzione tangente e di $f(x)=ln(x)/x$. Derivata di funzione composta ed esempio in cui questo risultato non funziona; caso della funzione $f(x)=x^2ln(|x|)$ se $x\ne 0$ e $f(0)=0$ e calcolo del limite del rapporto incrementale. Definizione di funzioni "o-piccolo" per $x\to x_0$ nel confronto fra due funzioni f e g. Proposizione per la quale se $f=o(g)$ per $$x\to x_0$ allora esiste una funzione infinitesima h, per $x\to x_0$, definita su un intorno di x_0 e tale che $f(x)=h(x)g(x)$.

- **Lezione del 12/11/2018:** Breve riassunto di quanto fatto nella lezione precedente per quello che riguarda gli "o-piccoli". Proprietà che caratterizzano gli o-piccoli; assumendo che $f=o(g)$ per $x\to x_0$ se e solo se il limite del rapporto delle due funzioni è nullo. Se esiste finito il limite per $x\to x_0$, diverso da zero, di g allora il limite della f è nullo. Se esiste finito il limite per $x\to x_0$ per la f ed esso è non nullo, allora il limite della g è infinito. Teorema di eliminazione dei termini trascurabili con commenti ed un esempio esplicito risolto sia usando quest'ultimo risultato che con i mezzi precedentemente a disposizione. Definizione della funzione inversa e proprietà. Teorema riguardo le proprietà dell'inversa dell'inversa. Teorema in cui si dice che una funzione continua e invertibile ammette inversa continua. Come ottenere il grafico della funzione inversa per mezzo di considerazioni geometriche. Come calcolare il coefficiente angolare, in un punto del grafico della funzione inversa, per mezzo del coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione assegnata. Teorema riguardo la derivata dell'inversa di una funzione assegnata. Esercizi espliciti nel caso dell'inversa della funzione tangente e della funzione seno.

- **Lezione del 15/11/2018:** Definizione di funzione monotona e strettamente monotona. Teorema per il quale una funzione strettamente monotona è iniettiva. Teorema per il quale una funzione monotona e derivabile ha derivata non-negativa. Idea della dimostrazione e commenti. Teorema del confronto (caso dei limiti). Teorema della permanenza del segno caso dei limiti. Definizione di massimo e minino relativo e assoluto. Teorema di Weierstrass. Teorema per il quale una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato assume tutti i valori compresi tra massimo e minimo. Teorema per il quale una funzione derivabile in un punto è ivi continua. Teorema per il quale una funzione derivabile, in un punto di massimo o di minimo relativo, ha derivata nulla. Teorema di Rolle con dimostrazione. Teorema di Lagrange con dimostrazione.

- **Lezione del 16/11/2018:** Richiamo di tutti i risultati enunciati nella lezione del 15/11/2018 con particolare attenzione al Teorema di Weierstrass e al Teorema di Rolle. Teorema di Cauchy con enunciato e dimostrazione. Commenti sulle regole di de l'Hôpital. Teorema di de l'Hôpital nel caso $0/0$ con x che tende a x_0 da destra (e poi da sinistra). Esempio con calcolo esplicito e uso del Teorema di de l'Hôpital. Nozione di funzione infinitesima. Funzioni con lo stesso ordine di infinitesimo. Esempio sul rapporto $sin(x)-x/x$ per x che tende a 0 limite risolto con il Teorema di de l'Hôpital e poi è stato determinato l'ordine di infinitesimo di $sin(x)-x $ per x che tende a 0. Teoremi de l'Hôpital in tutte le forme. Esempio di calcolo per un limite in cui il limite f/g del rapporto delle derivate non esiste (quindi non si applica de l'Hôpital -fatto tutto nei dettagli dando condizioni per la non esistenza del limite per x che tende a ∞-) ma comunque esiste il limite del rapporto $f/g. Dimostrazione per assurdo (cenni).

- **Lezione del 19/11/2018:** Dimostrazione per assurdo e dimostrazione diretta. Elementi di logica: proposizione da un punto di vista logico. Congiunzione, disgiunzione e negazione. tavole della verità e come poter verificare che due proposizioni logiche sono equivalenti. Leggi di De Morgan. Dimostrazione del fatto che la dimostrazione per assurdo è equivalente alla dimostrazione diretta (uso di De Morgan e tavole della verità) e anche nel caso della Contronominale (dettagli per fare vedere l'equivalenza). Proposizione per la quale una funzione derivabile in x_0 può essere approssimata, a meno di $o(x-x_0)$, con un polinomio di grado uno ovvero $f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$. Algebra degli o-piccoli. Stesso procedimento assumendo che la funzione ha due derivate e poi tre ottenendo esplicitamente la formula di Taylor di ordine 2 e poi di ordine 3. Definizione di polinomio di Taylor $P_{f, x_0, n}(x)$ e di resto $r_{f, x_0, n}(x)$. Teorema riguardo la formula di Taylor con resto di Peano. Lemma per il quale $d/dx P_{f, x_0, n}(x) = P_{f', x_0, n-1}$. Definizione di funzioni con contatto n-esimo in un punto. Teorema per il quale, assegnata f derivabile n-volte in x_0, il polinomio di Taylor è l'unico polinomio, tra quelli con grado minore o uguale ad n ad avere contatto n-esimo con f in x_0 e proprietà che mette in relazione le derivate della f calcolate in x_0 e le derivate del polinomio di Taylor in x_0.

- **Lezione del 23/11/2018:** Formula di Taylor e richiami di quanto fatto nella lezione scorsa. Formula di Taylor con il resto di Lagrange. Calcolo della formula di Taylor per $f(x)=e^x$ in x_0 di ordine n. Calcolo della formula di Taylor per $f(x)=sin(x)$ in x_0 di ordine n. Calcolo della formula di McLaurin per $f(x)=sin(x)$ di ordine n. Calcolo della formula di McLaurin per $f(x)=cos(x)$ di ordine n. Calcolo della formula di Taylor (e di McLaurin) per $f(x)=1/(1+x)$) di ordine n. Calcolo della formula di Taylor (e di McLaurin) per $f(x)=1/(1-x)$) di ordine n usando l'esempio precedente. Calcolo della formula di Taylor (e di McLaurin) per $f(x)=ln(1+x)$) di ordine n sia direttamente che utilizzando il lemma che afferma che la derivata del polinomio di Taylor della funzione f, centrato in x_0 e di ordine n, coincide con il polinomio di Taylor della derivata f', centrato in x_0 e di ordine $n-1$. Calcolo esplicito per determinare lo sviluppo fino all'ordine 4 della formula di McLaurin di $ln(cos(x))$.

- **Lezione del 26/11/2018:** Formula di Taylor e McLaurin esempi e applicazioni ai limiti di funzioni. Sviluppo di McLaurin ordine n per la funzione $f(x)=arctan(x)$ usando il lemma per il quale $d/dx P_{f,0,n}=P_{f', 0, n-1}$ e quindi $f'(x)=1/(1+x^2)$. Sviluppo di Taylor per la funzione $f(x)=ln(3x-2)$ riconducendosi a uno sviluppo di McLaurin. Definizione di parte principale di una funzione infinitesima f rispetto a una seconda funzione infinitesima g. Definizione della parte principale nel per gli infiniti. Funzioni test standard $g(x)=|x-x_0|$ per gli infinitesimi e $g(x)=1/|x-x_0|$ per gli infiniti. Esempio di calcolo esplicito. Ulteriore esempio di calcolo per il limite di $(e^{-x^2} - cos(\sqrt{2}x))/\sqrt{1 + x^4}-1$ per $x\to 0$ utilizzando Taylor e principio di eliminazione degli infinitesimi di ordine più alto. Teorema per il quale nello sviluppo di McLaurin di una funzione pari non ci sono monomi di potenza dispari e analogamente per una funzione dispari non ci sono monomi di ordine pari. Asintoti verticali e orizzontali con descrizione grafica. Definizioni di funzioni asintotiche. Definizione di asintoto obliquo e criterio per l'esistenza di un asintoto obliquo. Esempio di calcolo per una funzione che non ammette un asintoto orizzontale.

- **Lezione del 30/11/2018:** Esercizio su un limite svolto con l'utilizzo della formula di Taylor. Derivate seconde e convessità. Definizione di funzione convessa e concava. Punti di flesso ascendente e discendente: definizione e rappresentazione grafica della situazione. Integrali indefiniti su un intervallo. Nozione di primitiva di una funzione su un intervallo assegnato. Esempi vari, nello specifico è stato mostrato come una funzione assegnata può avere più di una primitiva. Descrizione del significato dell'integrale indefinito e del differenziale. Esempio relativo al fatto che la funzione $f(x)=sign(x)$ non ammette primitiva su $\R$. Teorema per il quale se una funzione, definita su intervallo ammette una primitiva, allora tutte le altre differiscono da essa per una costante. Esempio nel quale considerando la funzione $f(x)=1/x$ su $\R-{0}$ si hanno primitive $F(x)=ln(|x|)$ e $G(x)=ln(|x|) + sign(x)$ la cui differenza non è una costante. Proprietà di additività dell'integrale indefinito. Come determinare la primitiva di un generico polinomio di grado n. Integrazione per parti con enunciato del relativo risultato e calcolo diretto per l'integrale $\int x e^x dx$.

- **Lezione del 3/12/2018:** Due esempi espliciti di integrazione per parti. Relazione con la derivazione del prodotto di funzioni e cenno alla dimostrazione del risultato. Commenti sul caso generale di $\int x^n e^x dx$. Integrazione per sostituzione con procedura "diretta" ovvero calcolo di una primitiva di $g(f)=f(\phi(r))\phi'(t)$ nota una primitiva $F(x)$ di $f(x)$ e procedura in senso opposto nota una primitiva $G(t)$ di $g(t)$ allora calcolo della primitiva $F(x)=G(\phi^{-1})(x)$. Significato del differenziale e suo utilizzo. Due esempi espliciti. Funzioni razionali fratte proprie e improprie. Riduzione del caso improprio a quello proprio mediante divisione tra polinomi. Definizione di polinomi irriducibili su $\R$. Teorema che permette di affrontare e risolvere l'integrazione di funzioni razionali proprie. Esempio di calcolo esplicito in tutti i dettagli per una funzione integranda, razionale propria, avente a denominatore solo termini irriducibili del primo ordine (uno con molteplicità 1 e il secondo con molteplicità 2).

- **Lezione del 7/12/2018:** Due esercizi espliciti sul calcolo di integrali di funzioni razionali proprie. Calcolo esplicito dell'integrale di $\sqrt{1 -x^2}$ con tutti i dettagli necessari per portare l'esercizio alla fine. Calcolo dell'integrale per funzioni razionali proprie del tipo $M(x)/(x-x_0)^n$ con $M(x)$ polinomio e $deg M=k <n$. Possibile applicazione di questo metodo (solo cenno da concludere). Inizio dello studio della teoria necessaria per introdurre l'integrale definito di una funzione definita su un intervallo limitato. Significato geometrico dell'integrale definito e definizione di trapezioide. Suddivisione di un intervallo. Raffinamento di una suddivisione. Esempi di funzioni a scala (funzione segno e funzione parte intera). Definizione di funzione a scala in funzione di una suddivisione assegnata di un certo intervallo. Descrizione della nozione. Proposizione riguardo il fatto che una funzione a scala rimane tale per raffinamenti della suddivisione iniziale.

- **Lezione del 10/12/2018:** Definizione di suddivisione adatta per una funzione a scala. Definizione di integrale per una funzione a scala. Parentesi riguardo la definizione di maggiorante e minorante per un sottoinsieme dei numeri reali. Nozione di massimo e di minimo. Teorema di unicità. Osservazione riguardo al fatto che non sempre queste due quantità esistono con un esempio esplicito. Nozione di estremo superiore e di estremo inferiore. Teorema di unicità e relazione tra max e sup e relazione tra min e inf. Definizione degli insiemi H^+_f e H^-_f per un'assegnata funzione $f : I \to \R$. Osservazione riguardo al fatto che questi due insiemi non sono vuoti. Definizione di integrale superiore e integrale inferiore per la funzione f. Relazione che intercorre tra queste due quantità. Definizione di funzione integrabile, ovvero: integrale superiore e integrale superiore coincidono. Dimostrazione del fatto che una funzione a scala è integrabile secondo questa nuova definizione. Teorema sul fatto che le funzioni continue su un intervallo sono ivi integrabili. Le continue a tratti sono integrabili. Le funzioni monotone sono integrabili. Proprietà di linearità, omogeneità e monotonia dell'integrale. Monotonia rispetto al dominio. Assegnata f definizione di f_+ e f_- e teorema per il quale se $f è integrabile allora lo sono anche f_+, f_- e

$|f|=(f_+) + (f_-)$ e relazione tra il valore assoluto dell integrale e integrale del valore assoluto.

- **Lezione del 14/12/2018:** Definizione di integrale orientato con le immediate conseguenze. Descrizione grafica del significato della definizione. Proposizione riguardo la formula di additività rispetto al dominio. Definizione di media integrale con le principali proprietà (invarianza rispetto all'inversione degli estremi di integrazione e proprietà della funzione che vale costantemente quanto la media). Teorema della media integrale per funzioni integrabili e continue con dimostrazione in ambo i casi. Corollario per il quale il valore assoluto di un integrale definito su un intervallo limitato si controlla con il $sup f$ per l'ampiezza dell'intervallo. Definizione di funzione localmente integrabile. Definizione di funzione integrale per f rispetto a $x_0\in I$. Proposizione per la quale se f è localmente integrabile su I allora la funzione integrale è continua. Teorema fondamentale del calcolo integrale. Se f è continua su un aperto allora ammette primitiva. Uso del teorema fondamentale del calcolo integrale per determinare una primitiva e risolvere un integrale definito. Alcune altre proprietà. Esempio di calcolo esplicito. Equazioni differenziali ordinarie. Definizioni ed esempi. Caso del primo e secondo ordine. Caso delle equazioni esplicite.

- **Lezione del 17/12/2018:** Integrali indefiniti, tecniche di integrazione alcune osservazioni. Integrazione per parti e integrazione per sostituzione. Equazioni differenziali ordinarie (EDO) alcuni esempi del primo ordine in forma esplicita. Definizione di soluzione locale. Forma generale $y'=F(x,y)$ e proprietà della F. Caso in cui $F(x, y)=F(x)$ ed esempio esplicito. Caso delle equazioni a variabili separabili (con la teoria necessaria per ottenere soluzioni costanti e non costanti). Due esempi espliciti e completi. Equazioni lineari del primo ordine omogenee e non omogenee. Risoluzione esplicita per le omogenee e uso di un fattore integrante nel caso delle non omogenee. Esempio esplicito nel caso di una non omogenea.

- **Lezione del 21/12/2018:** Esercizio completo sulla risoluzione di una EDO lineare non omogenea del primo ordine. Caso delle equazioni del secondo ordine lineari (omogenee e non-onogenee). Criterio id esistenza di una soluzione locale. Caso delle equazioni del secondo ordine lineari a coefficienti costanti e omogenee (equazione caratteristica). Metodo risolutivo per questo tipo di equazioni nel caso in cui il discriminante dell'equazione caratteristica sia non negativo. Elementi di statistica. Dati qualitativi e dati quantitativi. Modalità di un dato (caso discreto e continuo). Campione di dati. Effettivo e frequenza relativa. Due esempi espliciti. Rappresentazione grafica, per mezzo di un istogramma, sia nel caso di modalità discrete che continue. Regola di Sturges. Definizione di moda. Definizione di media (indice di centralità) e di varianza (indice di dispersione) con breve descrizione delle loro proprietà. Definizione della deviazione standard.