Registro Lezioni – Analisi Matematica 2
CDL Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni
A.A. 2018-19

1. **20190430:** Elenco di alcuni fatti organizzativi per il corso: Orario di ricevimento, testi usati, modalità di esame e fatti correlati. Richiami sullo studio dei punti di massimo e minimo per una funzione di due variabili per mezzo del criterio sufficiente del secondo ordine; generalizzazione di tale criterio al caso n-dimensionale. Considerazioni sulla forma quadratica associata alla matrice Hessiana. Formulazione del criterio del secondo ordine in $\R^n$ e approccio operativo per mezzo delle matrici di ordine k di Nord-Ovest e relativi determinanti. Estremi vincolati e descrizione del problema per mezzo di un semplice esempio in cui è possibile scrivere esplicitamente le linee di livello della funzione f da massimizzare (o minimizzare) sul vincolo $g(x, y)=0$. Cenni al teorema della funzione implicita per scrivere esplicitamente, localmente, il vincolo per poi restringervi la funzione f. Condizione necessaria per un punto estremante che si realizza dove le linee di livello della f, passante per tale punto, è tangente al vincolo $g(x, y)=0$. Riformulazione di tale relazione in termini dei gradienti delle funzioni f e g. Funzione Lagrangiana e enunciato del teorema dei moltiplicatori di Lagrange. Considerazioni di natura algebrica riguardo il sistema che emerge dall'enunciato del teorema dei moltiplicatori di Lagrange. Ulteriore esempio esplicito da concludere.

2. **20190507:** Breve riassunto di quanto visto nella lezione precedente riguardo il teorema dei moltiplicatori di Lagrange. Conclusione dell'esempio iniziato la volta scorsa sia utilizzando i moltiplicatori di Lagrange sia utilizzando la parametrizzazione esplicita del vincolo. Enunciato del teorema del Dini e relazione con il Teorema dei moltiplicatori di Lagrange. Secondo esempio esplicito nel caso 2-dimensionale e descrizione della procedura per determinare massimi e minimi di una funzione su un dominio limitato e chiuso: 1. calcolo dei punti stazionari sulla parte interna del dominio, 2. Moltiplicatori di Lagrange o parametrizzazione della frontiera, 3. punti di frontiera non regolari. Caso dei moltiplicatori di Lagrange nel caso n-dimensionale. Considerazioni algebriche sul numero di equazioni e il numero di variabili coinvolte nel sistema che emerge dal metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Due esempi espliciti (solo parzialmente trattati): nel primo si considera il caso di un vincolo con bordo (paraboloide ellittico con bordo rappresentato da una circonferenza), nel secondo caso il vincolo è dato dall'intersezione di un cilindro ed un piano. Funzioni a valori vettoriali: definizione ed esempi. Definizione di limite ed esempio di calcolo esplicito.

3. **20190508:** Alcune osservazioni riguardo la norma Euclidea in $\R^n$. Definizione di limite per funzioni a valori vettoriali in termini di intorni. Definizione di continuità, derivabilità e differenziabilità per questo tipo di funzioni. matrice Jacobiana e differenziale di una mappa a valori vettoriali. Definizione di superficie parametriche regolare. Piano tangente alla superficie in un punto considerato. Esempio per il caso di un grafico di funzione. Superfici di rotazione. Superfici parametriche e superfici cartesiane (partendo da una curva generatrice in forma

parametrica e cartesiana). Esempi nel caso del tronco di cilindro e del tronco di cono. Come passare dalle equazioni parametriche a quelle cartesiane

4. **<u>20190514</u>:** Superficie del toro in forma parametrica (ottenuta come soldo di rotazione) e in forma cartesiana. Ellissoide ottenuto come superficie di rotazione; anche in questo caso sono state fornite sia le equazioni cartesiane che parametriche. Superfici di rotazione attorno all'asse x sia nel caso di una generatrice in forma parametrica che cartesiana. Cenno ad un esercizio che consiste nel calcolo del piano tangente ad un toro per mezzo della parametrizzazione e del vettore normale nel punto di interesse. Integrali multipli. Caso di un dominio rettangolare con lati paralleli agli assi coordinati e funzione definita e limitata su di esso. Spiegazione effettuata in due step: prima si è considerato una partizione con lo stesso numero di punti sia per l'intervallo x-dipendente e quello y-dipendente, con intervalli tutti della stessa ampiezza. Si arriva così alla definizioni dei volumi approssimati e alle somme di Cauchy-Riemann. Da cui segue la definizione di integrale. Poi nel secondo step si è generalizzato tale visione per mezzo di partizioni puntate e passaggio al limite, nelle somme di Cauchy-Riemann, rispetto al parametro di finezza della partizione puntata. Definizione di insiemi di misura trascurabile. Funzioni integrabili che differiscono per un insieme di misura nulla su un rettangolo ammettono lo stesso integrale. Definizione di integrale su domini generici (limitati e chiusi) per mezzo dell'estensione standard della funzione considerata. Formule di riduzione sul rettangolo con un esempio di calcolo esplicito fatto nei dettagli. Definizione di domini X-semplici, Y-semplici e semplici. Definizione di domini regolari. Esempi espliciti di domini X-semplici e Y-semplici e regolari. Integrabilità delle funzioni continue sui domini semplici e formule di riduzione sui domini semplici (con discussione riguardo le formule ottenute).

5. **<u>20190515</u>:** Esempi di insiemi semplici (sia X-semplici che Y-semplici) con descrizione esplicita di due domini triangolari e successivi altri esempi di integrazione (della funzione $f(x,y)=xy$) su tali domini. Esempio di calcolo in cui si mostra l'importanza della scelta di integrazione (su uno speciale dominio per la funzione $f(x,y)=sen(y^3)$): scrivendo il dominio come Y-semplice non si conclude, mentre invece scrivendo il dominio come X-semplice si ottiene un integrale elementare facilmente calcolabile. Proprietà dell'integrale: linearità, monotonia (rispetto alla funzione integranda) e proprietà per la quale il valore assoluto dell'integrale si controlla con l'integrale del valore assoluto, additività rispetto al dominio, monotonia rispetto al dominio e annullamento. Definizione di massa per una lamina 2D (per mezzo di una funzione di densità), di baricentro e di momenti di inerzia (lamina piana che ruota rispetto ad un asse). Simmetrie del piano e funzioni pari e dispari rispetto alle simmetrie considerate. Alcuni esempi. Proposizione per la quale preso un dominio regolare D simmetrico rispetto ad una simmetria S, se la funzione è dispari allora l'integrale si annulla. Invece, nel caso di una funzione pari, il calcolo dell'integrale si riduce a fare "due volte" l'integrale su un opportuno sottoinsieme D_1 di D.

6. **<u>20190521</u>:** Esercizio sul calcolo della massa e del baricentro di una lamina triangolare assumendo la densità sia costante che di tipo $\rho(x,y)=c(1+x)$. Esercizio per il calcolo di un integrale doppio per mezzo di simmetrie del dominio e della funzione integranda. Definizione di mappa di cambiamento coordinate

(globale e locale); differenze tra il caso 1-dimensionale e il caso multidimensionale. cambiamento di coordinate polari nel piano. Coordinate polari e sferiche nello spazio. Enunciato del teorema di cambiamento di coordinate in $\R^2$. Esempio di calcolo: integrale di una funzione su di una corona circolare. Esempio di calcolo usando il cambio di coordinate $u=x-y$ e $v=x+y$. Relazione tra le aree degli insiemi trasformati per mezzo di una mappa di cambiamento di coordinate e determinante Jacobiano. Ulteriori altri due esempi (impostati, ma non completamente svolti) usando il cambio di coordinate polari. Integrali tripli su un parallelepipedo. Partizioni puntate, parametro di finezza e somme di Cauchy-Riemann. Integrale di una funzione limitata come limite, quando esiste, delle somme di Cauchy-Riemann al tendere del parametro di finezza (della partizione) a zero.

7. **20190522:** Integrale di una funzione continua su un parallelepipedo. Teorema di Fubini (e formule di riduzione) su un parallelepipedo. Estensione standard ed integrazione su insiemi regolari. Insiemi z-semplici e integrazione per fili (caso analogo per insiemi y- e x-semplici). Integrazione per strati. Insiemi regolari e integrale di funzioni continue su insiemi regolari. Formule di riduzione su domini semplici. Un esempio di calcolo esplicito per l'integrale della funzione $f(x,y,z)=z$ su un dominio z-semplice compreso fra un disco sul piano $z=0$ e la superficie di un paraboloide ellittico (uso delle formule di riduzione più cambio di variabili: coordinate ellittiche). Definizione di massa, baricentro e momenti d'inerzia per un corpo 3D. Calcolo della massa di una porzione di cono (traslato di una unità verso l'alto) assumendo la densità $\rho=z$; nel fare il calcolo si sono usate sia le formule di riduzione sia il cambio di coordinate polari.

8. **20190528:** Esercizi espliciti riguardo il calcolo di due integrali tripli. Calcolo del volume contenuto in una superficie di rotazione (attorno all'asse z) scritta in forma cartesiana. Proprietà degli integrali tripli (Linearità, Additività rispetto al dominio, annullamento, monotonia). Cenno alle simmetrie e funzioni pari e dispari nel caso 3D (con cenno alle applicazioni negli integrali tripli). Definizione di campo vettoriale stazionario e non. Definizione di operatore gradiente, rotore, divergenza e Laplaciano. Identità differenziali con idea della loro dimostrazione. Lavoro elementare di un campo vettoriale. Integrale di linea di seconda specie. Confronto con l'integrale di linea di prima specie (esso è invariante per cambi di parametro che cambino o meno il senso di percorrenza della curva). L'integrale di linea di seconda specie cambia di segno se si inverte il senso di percorrenza della curva (dimostrazione esplicita). Calcolo di un integrale curvilineo di seconda specie fatto su una porzione di spirale piana. Campi conservativi. Esempio relativo ad un sistema conservativo (corpo rigido soggetto ad una forza conservativa) per il quale l'energia totale del sistema si conserva nel tempo. Per campi conservativi il lavoro dipende solo dal valore del potenziale calcolato sul punto iniziale e quello iniziale del percorso (non dalla curva scelta per congiungerli). Teorema di caratterizzazione dei campi conservativi: alcune osservazioni e inizio della dimostrazione.

9. **20190529:** Conclusione della dimostrazione del teorema di caratterizzazione dei campi conservativi. Come calcolare il potenziale di un campo conservativo utilizzando la nozione di lavoro ed una spezzata come curva particolarmente "comoda". Condizione necessaria affinché un campo vettoriale sia conservativo

(deve essere irrotazionale). Teorema per il quale un campo vettoriale su un dominio semplicemente connesso è conservativo se e solo se è irrotazionale. Definizione di insieme semplicemente connesso ed esempi. Definizione di retrazione e retrazione per deformazione. Calcolo del potenziale di un campo su un dominio semplicemente connesso sia per integrazione diretta, sia per mezzo della definizione di lavoro e dell'uso di una spezzata presa ad hoc.

10. **20190604:** Esercizio sul calcolo del potenziale di un campo conservativo, su un dominio semplicemente connesso in $\R^3$, sia con integrazione diretta che per mezzo del lavoro calcolato su una opportuna spezzata. Definizione di spazio duale e di forma differenziale. Alcune osservazioni sul fatto che se il campo non è conservativo il lavoro dipende dalla curva scelta per congiungere due punti prefissati. Inoltre, si è osservato che per provare che un campo non è conservativo basta far vedere che il suo lavoro su una curva chiusa è non nullo. Parallelo fra campi vettoriali e 1-forme. Forme chiuse ed esatte. Superfici e integrali di superficie. Come si calcola l'area infinitesima ds di un elemento di superficie e in generale l'integrale di una funzione continua su una superficie regolare. Area della superficie "grafico di funzione". Area di una superficie di rotazione. Area di una calotta sferica. Massa, baricentro e momento d'inerzia rispetto ad un asse per una superficie regolare. Esercizio esplicito riguardo il calcolo dell'area di una una porzione di cilindro. Esercizio sul calcolo di dell'area di una porzione di piano. Superfici orientabili e orientamento. Bordo di una superficie orientabile (regola della mano destra per il bordo). Esempi di superfici con bordo.

11. **20190605:** Richiami sulle superfici orientabili e su come viene indotto l'orientamento sul bordo. Superfici regolari a pezzi. Definizione di flusso; prima nel caso di un campo di velocità per un liquido in movimento, poi per un campo un campo generale. Come riscrivere il flusso una volta introdotta una parametrizzazione per la superficie considerata. Il flusso si preserva per cambi di parametrizzazione che preservino l'orientamento della superficie. Due esempi di calcolo espliciti in dettaglio (il secondo riguardava il campo elettrostatico generato da una carica elettrica posizionata nell'origine del sistema di riferimento). Teorema della divergenza. Due esempi espliciti di calcolo del flusso attraverso una superficie (il secondo da concludere) svolti sia usando la definizione di flusso che il teorema della divergenza.

12. **20190606:** Conclusione dell'esercizio iniziato nella lezione precedente riguardo l'utilizzo del teorema della divergenza. Teorema di Stokes e commenti riguardo le sue implicazioni. Teorema di Gauss. Due esercizi riguardo l'uso del teorema di Gauss-Green. Come utilizzare questo risultato per calcolare l'area di un dominio piano. Applicazione del Teorema di Stokes per la risoluzione di un esercizio.