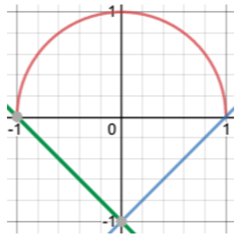
Esercizi sui seguenti argomenti:
Integrali doppi, integrali di supeficie, campi vettoriali:

Esercizio 1.
Calcolare l'integrale di $\mathbf{F}(x,y) = (3x^2+y,\ 2x+y^2)$ sulla curva $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$, dove

$$\gamma_1 \ : \ \begin{cases} x = \cos(\theta), \\ y = \sin(\theta), \end{cases} \quad 0 \le \theta \le \pi; \qquad \gamma_2 \ : \ \begin{cases} x = t, \\ y = -1 - t, \end{cases} \quad -1 \le t \le 0;$$

$$\gamma_3 \ : \ \begin{cases} x = t, \\ y = t - 1, \end{cases} \quad 0 \le t \le 1;$$



[**R.** $\frac{14}{3} + \frac{\pi}{2}$]

Esercizio 2.
Verificare che il campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y) = (2xy^2 - y^3,\ 2x^2y - 3xy^2 + 2)$, definito su $\mathbb{R}^2$, è conservativo e calcolarne il potenziale generale.
[**R.** $U(x,y) = x^2y^2 - xy^3 + 2y + c$)]

Esercizio 3.
Mostrare che campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y) = (-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$, definito su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, non è conservativo.
[**Suggerimento:** calcolare l'integrale curvilineo di $\mathbf{F}$ sulla circonferenza unitaria di centro l'origine.]

Esercizio 4.
Calcolare il baricentro della regione $D \subseteq \mathbb{R}^2$ (il piano $\mathbb{R}^2$ è pensato in coordinate x, y) di densità costante $\boldsymbol{\varrho}(x,y) = k > 0$. Tale regione in coordinate polari è descritta come segue:

$$D = \{(\rho, \theta) \mid \rho \le \theta,\ 0 \le \theta \le \pi\}.$$

[**R.** $(x_G, y_G) = \left(\frac{6(4-\pi^2)}{\pi^3}, \frac{3(\pi^2-6)}{\pi^2}\right)$]

Esercizio 5.
Calcolare l'area della porzione di cono $z^2 = x^2 + y^2$ contenuta nella sfera (nel volume della sfera) descritta da $x^2 + y^2 + z^2 - 2y \le 0$.
[**R.** $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$]

Esercizio 6.
Calcolare l'integrale di superficie della funzione $f(x, y, z) = z|x|$ sulla superficie Σ parametrizzata come segue

$$\Sigma \, : \, S(\rho, \theta) = \big(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta), \theta\big), \ \text{ con } (\rho, \theta) \in [1, 2] \times [0, 2\pi].$$

[**R.** $\frac{4}{3}(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2})\pi$]