Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica e Ingegneria Gestionale
A.A. 2017/2018
Compito di Analisi Matematica (test-Provvisorio), O–Z

Esercizio 1

Assegnata la funzione

$$f(x,y) = (2x-1)\ln(3+y)$$

1. precisarne il dominio e rappresentarlo graficamente.
2. determinare (se presenti) punti critici, punti di massimo e minino relativo e punti di sella.
3. determinare massimi e minimi assoluti nell'insieme:

$$A = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x| \leq 1,\ |y| \leq 1\Big\}$$

Esercizio 2

Calcolare lintegrale della funzione $f(x,y) = \cos(x+y)e^{x-y}$ sul dominio

$$D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ |x-y| \leq 1,\ |x+y| \leq \frac{\pi}{2}\Big\}$$

Esercizio 1

a) $\mathrm{Dom}\, f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > -3\}$

b) Cerchiamo i punti stazionari (ovvero quelli che annullano il ∇f). Si ha che:

$$f_x = 2\ln(3+y) \quad \text{e} \quad f_y = \frac{2x-1}{3+y}$$

quindi $\nabla f = 0 \iff \begin{cases} 2\ln(3+y) = 0 \\ \dfrac{2x-1}{3+y} = 0 \end{cases}$

$$\iff (x,y) = \left(\frac{1}{2}, -2\right) = P$$

Studiamo la matrice Hessiana in P

$$f_{xx} = 0 \quad f_{yx} = f_{xy} = \frac{2}{3+y} \quad \text{e} \quad f_{yy} = \frac{2x-1}{(3+y)^2}$$

Allora $\det H\left(\frac{1}{2}, -2\right) = \det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -4 < 0$

da cui possiamo concludere che P è un punto di sella.

c) L'insieme A è un quadrato di lato 2. Essendo chiuso e limitato, ed essendo f continua su A, possiamo concludere che f ammette max e min assoluti in A.

Dato che in $\mathring{A}$ (interno di A) non ci sono punti di massimo o di minimo relativo, allora possiamo restringerci ai lati del quadrato che formano la frontiera di A stesso.

(1.) $\underset{|y|\leq 1}{x=1} \Rightarrow f(1,y) = \ln(3+y)$ ivi crescente

(2.) $\underset{|y|\leq 1}{x=-1} \Rightarrow f(-1,y) = -3\ln(3+y)$ decrescente

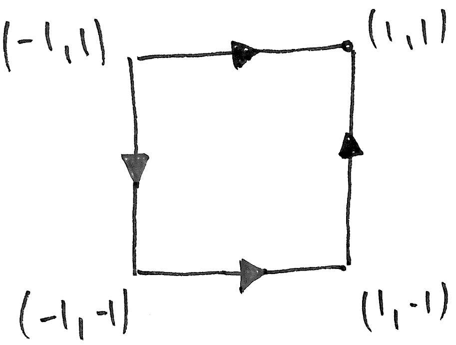
(3.) $\underset{|x|\leq 1}{y=1} \Rightarrow f(x,1) = (2x-1)\ln(4)$ crescente

(4.) $\underset{|x|\leq 1}{y=-1} \Rightarrow f(x,-1) = (2x-1)\ln(2)$ crescente

(Allora la funzione ha max e min sui vertici)

Graficamente (le frecce indicano il verso in cui la funzione cresce):

Punto di minimo $\rightarrow$



$\leftarrow$ Punto di max assoluto

$f(1,1) = \ln(4)$ max

$f(1,-1) = \ln(2)$

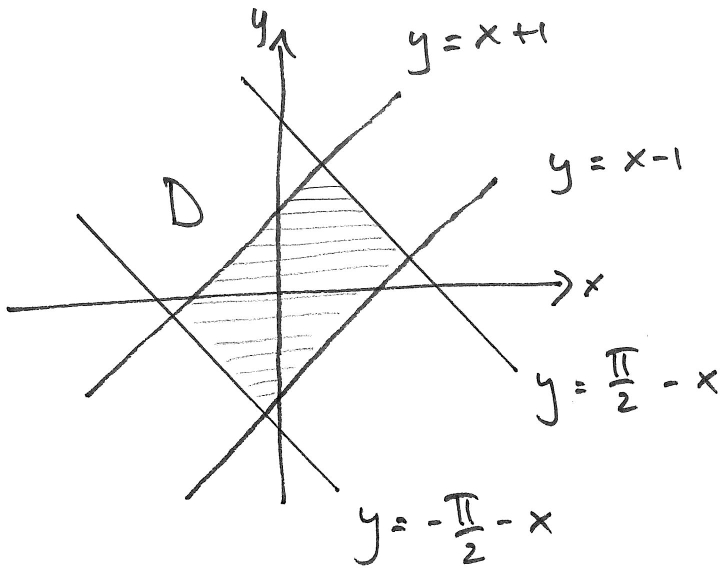
$f(-1,-1) = -3\ln(2)$

$f(-1,1) = -3\ln(4)$ min

Esercizio 2

Il dominio $D = \{(x,y) : -1 \leq x-y \leq 1 \,,\, -\frac{\pi}{2} \leq x+y \leq \frac{\pi}{2}\}$

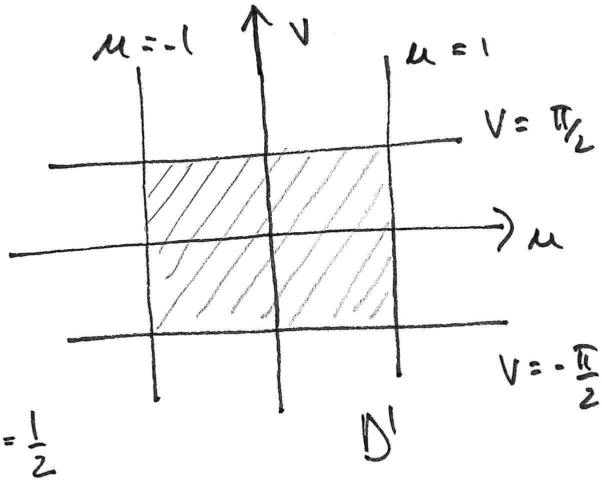
graficamente è dato da:



Con il cambiamento di variabili $\begin{cases} u = x-y \\ v = x+y \end{cases}$

esso diventa $D' = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq u \leq 1 \,,\, -\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}\}$

$= \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : |u| \leq 1 \,,\, |v| \leq \frac{\pi}{2}\}$



Inoltre $\begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{v-u}{2} \end{cases}$

$\det J = \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

Allora con questo cambio di variabili si ha che:

$$\iint_D \cos(x+y)\, e^{x-y}\, dx\, dy = \iint_{D'} \cos(v)\, e^{u}\, |\det J|\, du\, dv$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} du \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(v)\, e^{u}\, dv = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{u} \left[\operatorname{sen} v\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} du$$

$$= \int_{-1}^{1} e^{u}\, du = e - e^{-1} = \frac{e^2-1}{e}$$

$\blacksquare$