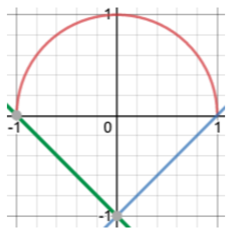
Esercizi sui seguenti argomenti:
Integrali doppi, integrali di supeficie, campi vettoriali:

Esercizio 1.
Calcolare l'integrale di $\mathbf{F}(x,y) = (3x^2+y,\ 2x+y^2)$ sulla curva $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$, dove

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = \cos(\theta), \\ y = \sin(\theta), \end{cases} \quad 0 \le \theta \le \pi; \qquad \gamma_2 : \begin{cases} x = t, \\ y = -1-t, \end{cases} \quad -1 \le t \le 0;$$

$$\gamma_3 : \begin{cases} x = t, \\ y = t-1, \end{cases} \quad 0 \le t \le 1;$$



[**R.** $\frac{14}{3} + \frac{\pi}{2}$]

Esercizio 2.
Verificare che il campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y) = (2xy^2 - y^3,\ 2x^2y - 3xy^2 + 2)$, definito su $\mathbb{R}^2$, è conservativo e calcolarne il potenziale generale.
[**R.** $U(x,y) = x^2y^2 - xy^3 + 2y + c$)]

Esercizio 3.
Mostrare che campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y) = (-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$, definito su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, non è conservativo.
[**Suggerimento:** calcolare l'integrale curvilineo di $\mathbf{F}$ sulla circonferenza unitaria di centro l'origine.]

Esercizio 4.
Calcolare il baricentro della regione $D \subseteq \mathbb{R}^2$ (il piano $\mathbb{R}^2$ è pensato in coordinate x, y) di densità costante $\boldsymbol{\varrho}(x,y) = k > 0$. Tale regione in coordinate polari è descritta come segue:

$$D = \{(\rho, \theta) \mid \rho \le \theta,\ 0 \le \theta \le \pi\}.$$

[**R.** $(x_G, y_G) = \left(\frac{6(4-\pi^2)}{\pi^3}, \frac{3(\pi^2-6)}{\pi^2}\right)$]

Esercizio 5.
Calcolare l'area della porzione di cono $z^2 = x^2 + y^2$ contenuta nella sfera (nel volume della sfera) descritta da $x^2 + y^2 + z^2 - 2y \le 0$.
[**R.** $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$]

Esercizio 6.
Calcolare l'integrale di superficie della funzione $f(x, y, z) = z|x|$ sulla superficie Σ parametrizzata come segue

$$\Sigma\,:\, S(\rho,\theta) = \big(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta), \theta\big),\ \text{con } (\rho,\theta) \in [1,2]\times[0,2\pi].$$

[**R.** $\frac{4}{3}(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2})\pi$]

Esercizi aggiunti dopo il 7/06/2019

Esercizio 7.
Assegnato il campo vettoriale $\mathbf{F} = (z-y)\mathbf{i} + (z+x)\mathbf{j} - (x+y)\mathbf{k}$, calcolare il flusso del rotore di $\mathbf{F}$ attraverso la porzione di parabolide

$$\Sigma = \big\{(x,y,z) \mid z = 9 - x^2 - y^2,\ 0 \le z \le 5\big\}.$$

Provare a risolvere l'esercizio sia con la definizione di flusso che con il teorema di Stokes.
[**Come procedere:** Se si usa la definizione di flusso, l'esercizio si riduce al calcolo di un integrale doppio su un dominio regolare.
Se invece si usa il teorema di Stokes, si deve osservare che la frontiera di questa superficie è formata da due curve semplici e chiuse, ovvero $\partial\Sigma = C_1 \cup C_2$, dove C_1 è la circonferenza $x^2 + y^2 = 9$ sul piano $z = 0$ e C_2 è la circonferenza $x^2 + y^2 = 4$ sul piano $z = 5$. La superficie Σ è orientabile e consideriamo l'orientazione legata al versore normale $\mathbf{n}$ che punta verso l'esterno del tronco di parabolide (che induce un'orientazione -positiva- sul bordo $\partial^+\Sigma$ e in particolare su C_1 e C_2). Quindi il teorema di Stokes ci dice che per calcolare il flusso $\Phi_\Sigma(\nabla \times \mathbf{F})$, possiamo calcolare gli integrali curvilinei di $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ su C_1 e su C_2 e poi prenderne la somma, ovvero:

$$\Phi_\Sigma(\nabla\times\mathbf{F}) = \iint_\Sigma (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dS = \oint_{\partial^+\Sigma} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \oint_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \oint_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r},$$

dove $\oint_{C_i} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \oint_{C_i} F_1dx + F_2dy + F_3dz = L_{C_i}(\mathbf{F})$, $i = 1, 2$, è l'usuale integrale curvilineo di seconda specie (si veda quanto fatto in classe riguardo il lavoro di un campo vettoriale). **Punto importante:** fare attenzione a scegliere opportunamente il verso di percorrenza di C_1 e C_2.]
[**R.** 10π]

Esercizio 8.
Assegnato il campo vettoriale $\mathbf{F} = (y^3, x^2, z^2)$, calcolare il flusso del rotore di $\mathbf{F}$ attraverso la superficie

$$\Sigma = \big\{(x,y,z) \mid z = 3\sqrt{x^2+y^2},\ 1 \le z \le 2\big\}.$$

Risolvere l'esercizio sia con il teorema di Stokes che senza questo risultato.
[**Suggerimento:** procedere come nel caso precedente]
[**R.** $-\frac{5\pi}{36}$]

Esercizi aggiunti il 12/06/2019

Esercizio 9.
Calcolare il seguente integrale curvilineo $\int_{\partial+A} 2ydx + 3xdy$ (si usi il teorema di Gauss-Green), dove A è il dominio:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}.$$

[**R.** 1]

Esercizio 10.
Calcolare il seguente integrale curvilineo $\int_{\partial+A} xydx + xydy$ (si usi il teorema di Gauss-Green), dove A è il dominio:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}.$$

[**R.** 0]

Esercizio 11.
Calcolare il seguente integrale curvilineo $\int_{\partial+A} x\sqrt{y}dx + \sqrt{x+y}dy$, dove A è il dominio:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2,\ 2x \leq y \leq 4\}.$$

[**R.** $(2\sqrt{3} - 10\sqrt{5} + 8\sqrt{6})/3 + 1/5 - 2\sqrt{2}/5$]