Esercizi sui seguenti argomenti: Moltiplicatori di Lagrange, superfici di rotazione, integrali doppi e integrali tripli.

Esercizio 1.
Assegnato l'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$, calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D (x^2+1)\,dxdy.$$

[**R.** $\frac{5\pi}{32}$]

Esercizio 2.
Assegnato l'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y \leq 1,\ x^2 + y^2 \leq 1, \}$, calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D y\,dxdy.$$

[**R.** $\frac{2}{15}$]

Esercizio 3.
Calcolare l'integrale della funzione $f(x,y) = xy$ sull'insieme

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq 5 - x \leq y^2 \leq 4x,\ y \geq 0\}.$$

[**R.** $\frac{5}{2}\int_1^5 (x^2 - x)dx = \frac{220}{3}$]

Esercizio 4.
Assegnato $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq x - y \leq 1\}$, calcolare

$$\iint_D xe^y\,dxdy.$$

[**R.** $\frac{1}{2}(e+1)$]

Esercizio 5.
Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D \Big(\frac{9}{2}\frac{xy^2}{x^2+y^2} + \sin(x^2y^3)\Big)\,dxdy,$$

dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1/2 \leq x^2 + y^2 \leq 2,\ |y| \leq x\}$.
[**R.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}\big(2^{\frac{3}{2}} - 2^{-\frac{3}{2}}\big) = \frac{7}{8}$]

Esercizio 6.
Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\iiint_C z\, dxdydz,$$

dove l'insieme C è definito da

$$C = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 < 2,\ x^2+y^2 < z^2\Big\}.$$

[**R.** 0]

Esercizio 7.
Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\iiint_C (x^2+y^2)\, dxdydz,$$

dove l'insieme C è definito da

$$C = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 < 2,\ x^2+y^2 < z\Big\}.$$

[**R.** $\frac{\pi}{15}\big(16\sqrt{2}-19\big)$]

Esercizio 8.
Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\iiint_C (x-2)^2\ dxdydz,$$

dove l'insieme C è definito da

$$C = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \leq 4x-12y,\ z \geq x^2+y^2\Big\}.$$

[**Suggerimento**: effettuare una integrazione per fili (dominio z-semplice) e per descrivere la proiezione D_{xy} di C sul piano $z=0$, usare le coordinate polari $x = 2+\rho\cos(\theta)$, $y = -6+\rho\sin(\theta)$, con $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq \rho \leq \sqrt{40}$.
R. $\pi\left[10\rho^4 - \rho^6/6\right]_0^{\sqrt{40}}$]

Esercizio 9.
Determinare i punti stazionari (e il massimo e minimo assoluto) della funzione $f(x,y,z) = x+2y$ sul vincolo

$$A = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ x^2+y^2+z^2 = 1,\ \ z \geq 1/2\big\}.$$

Esercizio 10.
Determinare i punti stazionari (e il massimo e minimo assoluto) della funzione $f(x, y, z) = x + z$ sul vincolo

$$A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = 1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}, \ \ 0 \leq z \leq 1\right\}.$$

[**R.** punto di minimo assoluto $(-2, 0, 0)$, punto di massimo assoluto $(2, 0, 0)$]

Esercizio 11.
Determinare i punti di massimo e di minimo assoluto della funzione $f(x, y, z) = x + y - z$ sulla superficie $A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$.

Esercizio 12.
Determinare i punti di massimo e di minimo assoluto della funzione $f(x, y) = (x - 1)^2 y + (y - 2)^2 - 4$ sull'insieme

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 9 - (x - 1)^2\right\}.$$

[**R.** punto di minimo assoluto $(1, 2)$, punto di massimo assoluto $(1, 9)$]

Esercizio 13.
Sia S la superficie del toro ottenuta attraverso la rotazione della circonferenza $(x-3)^2+z^2 = 1$ attorno all'asse z. Determinare l'equazione del piano tangente a S nel punto $P \in S$ di coordinate $P = (0, 7/2, \sqrt{3}/2)$.
[**R.** vettore normale: $\mathbf{n} = (0, 1/2, \sqrt{3}/2)$, eq. piano tangente: $y+z\sqrt{3}-5 = 0$]

Esercizio 14.
Si consideri la superficie di rotazione $S \subseteq \mathbb{R}^3$ definita dalla seguente equazione $2z^2 + 2y^2 - x^2 - 2x - 2 = 0$. Determinare l'equazione del piano tangente a S nel punto $P \in S$ di coordinate $P = (0, 0, 1)$.

Esercizio 15.
Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\iiint_C 6xyz \, dxdydz,$$

dove l'insieme C è definito da

$$C = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z \leq 1, \ 0 \leq x, \ 0 \leq y, \ 0 \leq z\Big\}.$$

[**R.** $\frac{1}{120}$]

Esercizi aggiunti il 7/06/2019

Esercizio 16.
Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\iiint_A z \, dxdydz,$$

dove l'insieme A è definito da

$$A = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z^2, \ (x-1)^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \ 0 \leq z\Big\}.$$

[**R.** $\frac{\pi}{32}$]

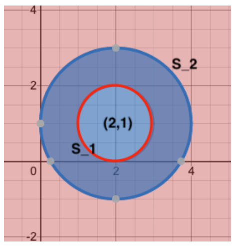
Esercizio 17.
Si consideri l'insieme $D = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, \ xy \geq 0\big\} \cup T$, dove T è il triangolo di vertice i punti $(0, -1)$, $(0, 0)$ e $(1, 0)$. Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D xy \, dxdy.$$

[**R.** $\frac{5}{24}$]

Esercizio 18.
Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D (x^2 + y^2 - 2y - 3) \, dxdy,$$



dove D è la corona circolare compresa fra le due circonferenze S_1 e S_2, entrambe di centro $(2, 1)$, e di raggio rispettivamente 1 e 2.
[**R.** $\frac{15\pi}{2}$]

Esercizi aggiunti il 10/06/2019

Esercizio 19.
Assegnata la funzione $f(x, y) = (2x - 1) \ln(3 + y)$. Determinarne il dominio. Trovarne i punti stazionari. Determinarne massimi e minimi assoluti nell'insieme:

$$D = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1, \ |y| \leq 1\big\}$$

[**R.** $(1/2, 0)$ punto di sella, $(1, 1)$ punto di massimo assoluto, $(1, -1)$ punto di minimo assoluto]

Esercizio 20.
Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D |xy| \cos(y^2) \sin(x^2)\, dxdy,$$

dove D è il dominio

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le \sqrt{\pi/2},\ -\sqrt{\pi/2} \le y \le \sqrt{\pi/2 - x^2},\right\}$$

[**R.** 3/8]

Esercizio 21.
Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\iiint_C \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}\, dxdydz,$$

dove l'insieme C è definito da

$$C = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 < x^2+y^2+z^2 < 2,\ x^2+y^2 < z^2, z \ge 0\Big\}.$$

[**R.** $\frac{\pi(2\sqrt{2}-1)(4-\sqrt{2})}{18}$]