

Esercizi sui seguenti argomenti:
**Moltiplicatori di Lagrange, superfici di rotazione, integrali doppi
e integrali tripli.**

Esercizio 1.

Assegnato l'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$,
calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D (x^2 + 1) dx dy.$$

Esercizio 2.

Assegnato l'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y \leq 1, x^2 + y^2 \leq 1\}$, calcolare
l'integrale doppio

$$\iint_D y dx dy.$$

Esercizio 3.

Calcolare l'integrale della funzione $f(x, y) = xy$ sull'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq 5 - x \leq y^2 \leq 4x, y \geq 0\}.$$

Esercizio 4.

Assegnato $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x - y \leq 1\}$, calcolare

$$\iint_D x e^y dx dy.$$

Esercizio 5.

Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D \left(\frac{9}{2} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} + \sin(x^2 y^3) \right) dx dy,$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1/2 \leq x^2 + y^2 \leq 2, |y| \leq x\}$.

Esercizio 6.

Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\iiint_C z dx dy dz,$$

dove l'insieme C è definito da

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < 2, x^2 + y^2 < z^2\}.$$

Esercizio 7.

Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\iiint_C x^2 + y^2 \, dx dy dz,$$

dove l'insieme C è definito da

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < 2, x^2 + y^2 < z\}.$$

Esercizio 8.

Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\iiint_C (x-2)^2 \, dx dy dz,$$

dove l'insieme C è definito da

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \leq 4x - 12y, z \geq x^2 + y^2\}.$$

Esercizio 9.

Determinare i punti stazionari (e il massimo e minimo assoluto) della funzione $f(x, y, z) = x + 2y$ sul vincolo

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 1/2\}.$$

Esercizio 10.

Determinare i punti stazionari (e il massimo e minimo assoluto) della funzione $f(x, y, z) = x + z$ sul vincolo

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}, 0 \leq z \leq 1\}.$$

Esercizio 11.

Determinare i punti di massimo e di minimo assoluto della funzione $f(x, y, z) = x + y - z$ sulla superficie $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Esercizio 12.

Determinare i punti di massimo e di minimo assoluto della funzione $f(x, y) = (x-1)^2 y + (y-2)^2 - 4$ sull'insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 9 - (x-1)^2\}.$$

Esercizio 13.

Sia S la superficie del toro ottenuta attraverso la rotazione della circonferenza $(x-3)^2 + z^2 = 1$ attorno all'asse z . Determinare l'equazione del piano tangente a S nel punto $P \in S$ di coordinate $P = (0, 7/2, \sqrt{3}/2)$.

Esercizio 14.

Si consideri la superficie di rotazione $S \subseteq \mathbb{R}^3$ definita dalla seguente equazione $2z^2 + 2y^2 - x^2 - 2x - 2 = 0$. Determinare l'equazione del piano tangente a S nel punto $P \in S$ di coordinate $P = (0, 0, 1)$.