Recenti sviluppi nella teoria del grado topologico

Pierluigi Benevieri

October 27, 2003

La tesi si è proposta l'obiettivo di approfondire ed estendere alcuni recenti risultati di teoria del grado topologico. Prima di esporre i contenuti del lavoro ritengo utile una premessa sugli aspetti principali di tale teoria. Essa rientra nel più vasto campo dei metodi topologici in analisi non lineare che hanno avuto un notevole sviluppo nel corso di questo secolo.

Sia data una funzione $f : X \to Y$ e un sottoinsieme $D \subset X$ (per il momento non discutiamo le ipotesi su f e su D). Dato inoltre un punto $y \in Y$, il grado è un intero associato alla terna (f, D, y) che consente di ricavare informazioni sulle soluzioni dell'equazione $f(x) = y$.

La prima idea di grado compare nel 1912 in un lavoro di L. Brouwer in cui l'autore studia applicazioni continue tra varietà differenziabili di dimensione finita. Le sue intuizioni sono state in seguito sviluppate e formalizzate in modo analitico da altri autori fino a una definizione compiuta di un concetto di grado in dimensione finita, che è oggi comunemente chiamato *grado di Brouwer*.

Di tale grado esistono diverse versioni, che si distinguono per le classi di applicazioni prese in esame (il lettore può ad esempio consultare [4] o [5]). Di seguito riportiamo una traccia della costruzione del grado in una versione dovuta a Nirenberg (si veda [6]).

Siano M ed N due varietà differenziabili, reali, della stessa dimensione finita e orientate. Sia Ω un sottoinsieme aperto, relativamente compatto di M e sia $f : \overline{\Omega} \to N$ di classe C^1. Dato $x \in M$, con T_xM si denota lo spazio tangente a M in x, mentre $Df(x) : T_xM \to T_{f(x)}N$ indica il differenziale di f in x. Dato un punto regolare x di f, si definisce $\mathrm{sgn} Df(x) = +1$ se $Df(x)$ preserva le orientazioni di T_xM e $T_{f(x)}N$, mentre $\mathrm{sgn} Df(x) = -1$ altrimenti. Consideriamo $y \in N$, valore regolare per f, tale che $f^{-1}(y) \cap \partial\Omega = \emptyset$. Il grado di Brouwer relativo alla terna (f, Ω, y) è definito dalla formula seguente:

$$deg_B(f, \Omega, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \mathrm{sgn} Df(x). \tag{1}$$

Utilizzando metodi di approssimazione, tale definizione si estende al caso in cui y sia un valore critico e in quello più generale in cui f sia continua.

Ciò che fa del grado un utile strumento nello studio dell'equazione $f(x) = y$ sono le proprietà di cui gode. Elenchiamone alcune:

d1) Normalizzazione. $\deg_B(I, \Omega, y) = 1$ dove I è l'identità di Ω e $y \in \Omega$.

d2) Additività. Sia (f, Ω, y) una terna ammissibile per il grado di Brouwer. Dati due sottoinsiemi aperti Ω_1 e Ω_2 di Ω, disgiunti, tali che $f^{-1}(y) \subset \Omega_1 \cup \Omega_2$, risulta

$$\deg_B(f, \Omega, y) = \deg_B(f, \Omega_1, y) + \deg_B(f, \Omega_2, y). \tag{2}$$

d3) Invarianza per omotopia. Sia $H : \overline{\Omega} \times [0, 1] \to N$ un'omotopia continua e sia $y \in N \backslash H(\partial\Omega \times [0, 1])$. Allora

$$\deg_B(H(\cdot, 0), \Omega, y) = \deg_B(H(\cdot, 1), \Omega, y). \tag{3}$$

Le proprietà *d1)-d3)* vengono dette *proprietà fondamentali* del grado.

La prima definizione di grado in dimensione infinita compare in un ormai celebre lavoro del 1934 di J. Leray e J. Schauder ([3]) in cui due autori introducono un grado per perturbazioni compatte dell'identità di spazi normati reali. Negli anni successivi numerosi autori hanno sviluppato la costruzione originaria di Leray e Schauder.

In generale il tentativo di estendere il grado di Brouwer in dimensione infinita incontra difficoltà non facili da superare. Una di queste è legata all'orientazione. Precisamente, a dimensione finita sono ben definiti il concetto di orientazione di uno spazio vettoriale e più in generale di una varietà. Di conseguenza si può assegnare un segno a un isomorfismo tra gli spazi tangenti di due varietà orientate. Questi concetti non si estendono naturalmente in dimensione infinita e questo fatto pone un ostacolo alla costruzione di un grado.

Questa tesi ha preso spunto da alcuni lavori di Elworthy, Tromba, Fitzpatrick, Pejsachowicz e Rabier che in anni recenti hanno esteso il grado di Leray-Schauder nel campo delle applicazioni di Fredholm tra varietà modellate su spazi di Banach (si vedano [1], [2] e i riferimenti bibliografici in essi contenuti).

L'idea che sta alla base della tesi, con la quale si affronta il problema sopra ricordato dell'orientazione, è l'introduzione di un concetto puramente algebrico di orientazione per operatori lineari di Fredholm di indice zero tra spazi vettoriali reali.

Consideriamo due spazi vettoriali reali E ed F e un operatore lineare $L : E \to F$, di Fredholm di indice zero. Un operatore lineare $A : E \to F$ è detto *correttore* di L se Range$A$ ha dimensione finita e $L + A$ è un isomorfismo. La famiglia dei correttori di L, indicata con $\mathcal{C}(L)$, è non vuota. In tale famiglia si induce una relazione di equivalenza. Dati $A, B \in \mathcal{C}(L)$, l'operatore $(L+B)^{-1}(L+A)$, che è un automorfismo di E, è della forma

$$(L + B)^{-1}(L + A) = I - K, \tag{4}$$

dove K ha immagine finito-dimensionale. Dato un qualsiasi sottospazio E_0 di E, di dimensione finita, contenente Range$K$, la restrizione $(I - K)|_{E_0} : E_0 \to E_0$ è ben definita ed è un automorfismo di E_0. Di conseguenza il determinante, $\det(I - K)|_{E_0}$, è ben definito e non nullo. Si prova inoltre che tale determinante non dipende dalla scelta di E_0. Diremo allora che A e B sono equivalenti, se $\det(I - K)|_{E_0} > 0$.

L'insieme $\mathcal{C}(L)$ risulta in tal modo composto da due classi di equivalenza, la scelta di una delle quali viene detta *orientazione* di L.

Siano ora E ed F due spazi di Banach. Indichiamo con $\Phi_n(E,F)$ la classe degli operatori di Fredholm di indice n da E in F. È noto che, per ogni n, $\Phi_n(E,F)$ è aperto nello spazio degli operatori lineari e continui da E in F.

Dal momento che, dati $L \in \Phi_0(E,F)$ e $A \in \mathcal{C}(L)$, A è correttore di un qualsiasi operatore $L' \in \Phi_0(E,F)$, sufficientemente vicino a L, un'orientazione di L induce un'orientazione in un opportuno intorno di L. Questa nozione di "trasporto continuo dell'orientazione" è alla base della seguente definizione di *applicazione orientabile.*

Definizione **1** *Siano* Λ *uno spazio topologico e* $h : \Lambda \to \Phi_0(E,F)$ *un'applicazione continua. Un'orientazione di* h *è una scelta continua di un'orientazione* $\alpha(\lambda)$ *di* $h(\lambda)$ $\forall\lambda \in \Lambda$, *dove per continua s'intende che* $\forall\lambda \in \Lambda$ *esistono un correttore* $A \in \alpha(\lambda)$ *e un intorno* V *di* λ *per cui* $A \in \alpha(\lambda')$, $\forall\lambda' \in V$. *Diremo che* h *è orientabile se ammette un'orientazione e orientata quando assume un'orientazione.*

Siamo ora in grado di definire un concetto di orientazione per applicazioni di classe C^1, di Fredholm di indice zero tra spazi di Banach.

Definizione **2** *Siano* E *ed* F *due spazi di Banach,* Ω *un aperto di* E *e* $f : \Omega \to F$ *un'applicazione di classe* C^1, *di Fredholm di indice zero. Diremo che* f *è orientabile se è orientabile l'applicazione* $Df : \Omega \to \Phi_0(E,F)$ *che a ogni* $x \in \Omega$ *associa il differenziale di* f *in* x. *Un'orientazione di* f *è un'orientazione di* Df *ed* f *è detta orientata quando assume un'orientazione.*

La definizione precedente può essere estesa in modo da ottenere una nozione di orientazione per applicazioni di classe C^1, di Fredholm di indice zero tra varietà differenziabili, modellate su spazi di Banach.

Sulla base del concetto di orientazione che ho ricordato, si definisce una nozione di grado topologico per la classe delle applicazioni orientabili tra spazi di Banach e tra varietà modellate su spazi di Banach. Per ragioni di brevità e semplicità riporterò soltanto il caso delle applicazioni tra spazi di Banach.

Sia Ω un sottoinsieme aperto di E e consideriamo un'applicazione $f : \Omega \to F$ di classe C^1, di Fredholm di indice zero, dotata di un'orientazione α. In corrispondenza di ogni punto regolare x di f definiamo $\mathrm{sgn} Df(x) = +1$, se l'operatore nullo appartiene ad $\alpha(x)$, mentre $\mathrm{sgn} Df(x) = -1$ altrimenti.

Sia ora $y \in F$ un valore regolare di f, tale che $f^{-1}(y)$ sia compatto (in tal caso $f^{-1}(y)$ è un insieme finito). In analogia con il caso finito-dimensionale, il grado relativo alla terna (f,Ω,y) è definito dalla formula

$$\deg(f,\Omega,y) = \sum_{x\in f^{-1}(y)} \mathrm{sgn} Df(x). \tag{5}$$

Si prova che il grado di una terna (f,Ω,y), con y valore regolare, può essere calcolato come grado di Brouwer della restrizione di f a una opportuna varietà finito-dimensionale, orientata, contenuta in Ω. Questo procedimento suggerisce l'idea di definire il grado nel caso in cui y sia valore critico, ferma restando l'ipotesi che $f^{-1}(y)$ sia compatto. Il grado ottenuto verifica le proprietà fondamentali e altre che da esse derivano.

Nella tesi sono confrontati i risultati ottenuti con quelli degli autori sopra citati. Elworthy e Tromba, mediante il grado di Leray-Schauder, definiscono una nozione di orientazione per varietà differenziabili modellate su spazi di Banach e un conseguente grado per una classe di applicazioni dette ammissibili. L'orientazione e il grado definiti in questo lavoro sono più generali rispetto alla costruzione di Elworthy e Tromba e fanno uso esclusivamente del grado di Brouwer.

Sempre basandosi sul grado di Leray-Schauder, Fitzpatrick, Pejsachowicz e Rabier definiscono un concetto di orientazione per applicazioni di Fredholm di indice zero tra spazi di Banach e tra varietà modellate su spazi di Banach, che risulta non equivalente a quello sopra esposto. I tre autori definiscono successivamente una nozione di grado che coincide con quella presentata nella tesi nel caso che le applicazioni siano di classe C^2 e orientabili per entrambe le teorie.

BIBLIOGRAFIA

[1] Elworthy K. D. e Tromba A. J., *Differential structures and Fredholm maps on Banach manifolds*, Global Analysis (S. S. Chern and S. Smale Eds.) Proc. Symp. Pure Math, **15**, (1970), 45–94.

[2] Fitzpatrick M. P., Pejsachowicz J. e Rabier P. J., *Orientability of Fredholm Families and Topological Degree for Orientable Nonlinear Fredholm Mappings*, Journal of Functional Analysis, **124**, (1994), 1–39.

[3] Leray J. e Schauder J., *Topologie et équations fonctionnelles*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., **51**, (1934), 45–78.

[4] Lloyd N. G., *Degree Theory*, Cambridge, Univ. Press, (1978).

[5] Milnor J., *Topology from the Differentiable Viewpoint*, University of Virginia Press, Charlottesville, (1966).

[6] Nirenberg L., *Topics in Nonlinear Functional Analysis*, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, (1974).

Pierluigi Benevieri
Indirizzo di casa: Via F. Sacchetti 4, 50133, Firenze.
Università: Dipartimento di Matematica Applicata "Giovanni Sansone",
Via S. Marta 3, 50139, Firenze.
E-mail: benevieri@dma.unifi.it
sede del dottorato: Firenze.
Ciclo del dottorato: VIII.
Direttore della ricerca: Prof. Massimo Furi.