Registro delle lezioni di Analisi Matematica - a.a. 2008/09
Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

`Aggiornamento degli appunti: 31/12/2008.`

Lunedi 22 settembre 2008 - due ore

Il sistema numerico sul quale si basa l'analisi matematica oggetto del corso è l'insieme $\mathbb{R}$ dei *numeri reali.* L'insieme $\mathbb{R}$ è definito in modo assiomatico come un insieme di elementi in cui sono definite due operazioni: *addizione* (o *somma*) e *moltiplicazione* (o *prodotto*), e una *relazione di ordine* (o *ordinamento*) che godono delle seguenti proprietà:

S1) *Proprietà commutativa della somma*: $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a + b = b + a$;

S2) *Proprietà associativa della somma*: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a + b) + c = a + (b + c)$;

S3) *Esistenza dell'elemento neutro della somma*: $\forall a \in \mathbb{R}$, $a + 0 = a$ e 0 è detto elemento neutro della somma;

S4) *Esistenza dell'opposto*: $\forall a \in \mathbb{R}$ esiste un elemento di $\mathbb{R}$, $-a$, detto *opposto* di a, tale che $a + (-a) = 0$ ($a + (-a) = 0$ si puo' scrivere più semplicemente $a - a = 0$).

Analogamente abbiamo alcune proprietà del prodotto:

P1) *Proprietà commutativa del prodotto*: $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $ab = ba$;

P2) *Proprietà associativa del prodotto*: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $(ab)c = a(bc)$;

P3) *Esistenza dell'elemento neutro del prodotto*: $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \cdot 1 = a$ e 1 e' detto elemento neutro del prodotto;

P4) *Esistenza del reciproco*: $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, esiste un elemento di $\mathbb{R}$, $1/a$ tale che $a \cdot 1/a = 1$.

Esiste anche una importante proprietà che collega le due operazioni ed è la *proprietà distributiva* del prodotto rispetto alla somma:

SP) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, (a + b)c = ac + bc$.

L'ordinamento è legato alle operazioni di somma e prodotto da due proprietà.

OS) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, se $a \leq b$, allora $a + c \leq b + c$;

OP) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, con $c > 0$, se $a \leq b$, allora $ac \leq bc$.

L'ultima proprietà che difinisce $\mathbb{R}$ è un assioma detto
Assioma di continuità: ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$, limitato superiormente (inferiormente) ammette estremo superiore (inferiore).

Una definizione più intuitiva di numero reale, costruita a partire dai razionali, è la seguente: si dice *numero reale* un qualsiasi allineamento decimale, limitato o illimitato, periodico o non periodico, con segno.

Vedremo più avanti come si definiscono i numeri interi e i razionali a partire dalla definizione assiomatica dei reali.

Definizione di maggiorante e minorante di un insieme non vuoto contenuto in $\mathbb{R}$. Insieme limitato inferiormente, superiormente, insieme limitato.
Definizione di massimo e minimo. Estremi superiore e inferiore di un insieme.
Richiami di geometria analitica: retta dei numeri reali.

Proposizione 1 (con dimostrazione) *Non esiste nessun numero razionale il cui quadrato è uguale a* 2.

Dall'assioma di continuità segue l'esistenza della radice quadrata di ogni numero non negativo (lo vedremo in una delle prossime lezioni). L'unicità della radice quadrata è invece un facile esercizio.

Nell'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali valgono tutte le prime undici proprietà elencate, ma non vale l'assioma di continuità.

Esercizio. Provare, a partire dalle 11 proprietà della somma, del prodotto e dell'ordinamento, le seguenti ulteriori proprietà dei numeri reali:

1) $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \cdot 0 = 0$;

2) $\forall a \in \mathbb{R}$, $a > 0 \Rightarrow -a < 0$;

3) $\forall a, b \in \mathbb{R}$, con $a > 0$ e $b < 0$, si ha $ab < 0$;

4) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, con $c < 0$, se $a \leq b$, allora $ac \geq bc$.

Dato un numero reale a, si definisce *valore assoluto* di a il numero non negativo

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

Il valore assoluto di un numero gode di due proprietà dette *disuguaglianze triangolari*: per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, risulta

$$|x + y| \leq |x| + |y|, \qquad |x - y| \geq |x| - |y|.$$

La prima è dimostrata a lezione, la seconda è lasciata per esercizio.

Dati due numeri reali a e b, si chiama *intervallo* di *estremi* a e b uno dei seguenti quattro insiemi

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}, \qquad [a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\},$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}, \qquad (a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}.$$

Il primo e il quarto dei precedenti intervalli si dicono rispettivamente *chiuso* e *aperto*.
Esistono anche gli intervalli

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}, \qquad (a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\},$$

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}, \qquad (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}.$$

Si faccia attenzione al fatto che $= \infty$ e $-\infty$ non sono due numeri reali, ma due simboli che indicano di volta in volta il comportamento dei punti di un insieme oppure dei valori di una funzione o una successione, come vedremo poi. In altre parole indicano un "qualcosa" a cui tendono i numeri reali, sia nel verso positivo che in quello negativo.

Mercoledi 24 settembre 2008 - due ore

Lezione tenuta dal Professor Modica. Struttura della matematica. Teorie. Assiomi, Definizioni, Teoremi.
Deduzioni e Fatti.
Proposizioni, predicati. Logica delle proposizioni. Parole chiave: e, o, non, se... allora, per ogni esiste.
Negazione di proposizioni. Ambiguita' dell'articolo uno nel linguaggio comune. Formalismo della teoria degli insiemi. Insiemi dichiarati mediante un predicato. A_B e $A = B$ in termini di proposizioni.

Venerdi 26 settembre 2008 - due ore

Dall'assioma di continuità segue il *Principio di Archimede* (ne vedremo in seguito la dimostrazione): dato un qualsiasi numero reale x esiste un numero intero n maggiore di x.

Sempre dall'assioma di continuità segue (vedremo poi la dimostrazione come conseguenza del Principio di Archimede) il fatto che, dati due numeri razionali, esiste sempre un numero irrazionale compreso tra i due, mentre, dati due numeri reali, esiste sempre un numero razionale compreso tra i due.

Dall'esistenza della radice quadrata si prova (con dimostrazione a lezione) la formula risolutiva delle equazioni polinomiali di secondo grado.

Disequazioni: esercizi.

Esercizi su estremo superiore e inferiore.

*****

Funzioni. Definizione di funzione, dominio codominio, grafico. Definizione di immagine di una funzione e retroimmagine di un sottoinsieme del codominio.
Funzione iniettiva e surgettiva.
Funzioni reali di variabile reale. Primi esempi: funzioni polinomiali, segno, parte intera, radice quadrata.

Lunedi 29 settembre 2008 - due ore

Definizione di composizione di funzioni, funzione invertibile e funzione inversa. Esempi ed esercizi.
Definizione di funzione monotòna: crescente, strettamente crescente, decrescente, strettamente decrescente.
Definizione di funzione limitata, estremi superiore e inferiore di una funzione.

Esercizio. La somma di due funzioni crescente è una funzione crescente. Siano infatti $f, g : A \to \mathbb{R}$ due funzioni crescenti. Allora, dati $x_1, x_2 \in A$, tali che $x_1 \leq x_2$, segue

$$f(x_1) \leq f(x_2), \quad g(x_1) \leq g(x_2).$$

Segue immediatamente, grazie alla proprietà OS dei numeri reali, che $f(x_1)+g(x_1) \leq f(x_2)+g(x_2)$. La precedente disuguaglianza significa proprio la crescenza di $f+g$ e l'esercizio è concluso.
Si provi per esercizio che la composizione di due funzioni crescenti è crescente.

Richiami sulle funzione trigonometriche. Definizione descrittiva di seno, coseno e tangente.

Definizione di funzione continua. Esempi. Negazione della continuità in un punto (chiarimento sulla definizione).
Esercizio per casa: provare che le funzioni del tipo $f(x) = mx + q$ sono continue.

Mercoledi I ottobre 2008 - due ore

Proposizione 2 (algebra delle funzioni continue) *Dati un intervallo I e due funzioni $f, g : I \to \mathbb{R}$, continue in un punto $x_0 \in E$, allora sono continue in x_0 le seguenti funzioni: $f \pm g$, $f \cdot g$ e f/g (quest'ultima se $g(x_0) \neq 0$).*

La funzione $f(x) = x$ è continua su tutto $\mathbb{R}$ come si vede da una immediata applicazione della definizione (si veda anche l'esercizio finale della lezione del 29 settembre). Per l'algebra delle funzioni continue si ha come conseguenza che tutte le potenze a esponente intero e i polinomi sono funzioni continue in tutto il loro dominio, che è $\mathbb{R}$. Sono continui anche i rapporti di polinomi, ovviamente nei punti in cui il denominatore non si annulla.

Sono continue nei loro domini tutte le funzioni trigonometriche e le loro inverse.

Teoremi sulle funzioni continue.

Teorema 3 (della permanenza del segno per le funzioni continue – con dimostrazione a lezione) *Siano I un intervallo di $\mathbb{R}$ ed $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua in un punto $c \in E$. Se $f(c) > 0$ (risp. < 0), allora esiste un intervallo $J = (c - \delta, c + \delta)$ tale che $f(x) > 0$ (risp. < 0) per ogni $x \in J \cap I$.*

Il precedente risultato è una diretta conseguenza della definizione di continuità.

Teorema 4 (degli zeri – con dimostrazione a lezione) *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua e supponiamo $f(a) \cdot f(b) < 0$. Allora esiste $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$.*

Nel dimostrare il teorema si usano il precedente teorema della permanenza del segno e soprattutto l'assioma di continuità dei numeri reali.

Dai due precedenti teoremi si dimostra facilmente il seguente risultato.

Teorema 5 (dei valori intermedi) *Una funzione continua* $f : I \to \mathbb{R}$ *assume tutti i valori compresi tra* $\inf f$ *e* $\sup f$.

Altre conseguenze del teorema degli zeri.

Teorema 6 (esistenza e unicità della radice n-esima – dimostrazione a lezione) *Sia* y *un numero reale positivo e* n *un numero intero,* $n \geq 1$. *Esiste un unico numero reale positivo* x *tale che* $x^n = y$.

Il numero x è detto *radice n-esima – con dimostrazione a lezione* di y e si indica con il simbolo $\sqrt[n]{y}$ oppure $y^{1/n}$. La dimostrazione dell'unicità è facile e non richiede l'uso del teorema degli zeri.

Esercizio suggerito: si provi che una funzione continua $f : [0,1] \to [0,1]$ ammette un punto $c \in [0,1]$ tale che $f(c) = c$.

Venerdi 3 ottobre 2008 - due ore

Ancora sul concetto di continuità delle funzioni: continuità della composizione di due funzioni.
Continuità e invertibilità:
1) se una funzione è strettamente monotona è invertibile (dimostrazione facilissima, per esercizio)
2) se una funzione è invertibile non è detto che sia monotona (esempi). Tuttavia si ha il seguente risultato.

Proposizione 7 (con dimostrazione a lezione) *Se* $f : I \to \mathbb{R}$ *è continua (cioè è continua in tutti i punti del dominio) ed è invertibile, allora è strettamente monotona.*

Proposizione 8 (senza dimostrazione) *Se* $f : I \to \mathbb{R}$ *è continua e invertibile, allora la funzione inversa è continua.*

Quest'ultimo risultato ci permette di provare che la funzione radice ennesima, $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$ è continua.

Definizione di palla (della anche intorno) di centro $x \in \mathbb{R}$ e raggio $\delta > 0$. Definizione di intorno di $+\infty$ e $-\infty$. Definizione dell'insieme dei numeri reali estesi.
Definizione di limite. Confronto fra limiti e continuità.

Proposizione 9 (dimostrazione per esercizio) *Data una funzione* $f : I \to \mathbb{R}$, *sia* $c \in I$. *Allora* f *è continua in* c *se e soltanto se* $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Esempi. Calcolo di limiti per funzioni elementari, potenze.

Teorema 10 (unicità del limite – dimostrazione a lezione) *Una funzione* $f : I \to \mathbb{R}$ *può ammettere al più un solo limite per* $x \to c$.

Lunedi 6 ottobre 2008 - due ore

Definizione di limite destro e limite sinistro.

Proposizione 11 (dimostrazione lasciata per esercizio) *Data una funzione* $f : I \to \mathbb{R}$ *e dato un punto* $c \in I$, *interno a* I *(interno vuol dire che non può essere nessuno dei due estremi), risulta*

$$\lim_{x \to c} f(x) = l \quad \textit{se e solo se} \quad \lim_{x \to c^+} f(x) = l = \lim_{x \to c^-} f(x).$$

Teorema 12 (esistenza del limite di funzioni monotone – con dimostrazione a lezione del primo caso) *Data* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *risulta*

1. *se* f *è crescente, allora* $\lim_{x \to b} f(x) = \sup_{x \in (a,b)} f(x)$,
2. *se* f *è crescente, allora* $\lim_{x \to a} f(x) = \inf_{x \in (a,b)} f(x)$,
3. *se* f *è decrescente, allora* $\lim_{x \to b} f(x) = \inf_{x \in (a,b)} f(x)$,

4. se f è decrescente, allora $\lim_{x\to a} f(x) = \sup_{x\in(a,b)} f(x)$.

Proposizione 13 (algebra dei limiti) *Siano date due funzioni $f : I \to \mathbb{R}$ e $g : I \to \mathbb{R}$ e sia c reale esteso appartenente alla chiusura di I. Supponiamo che $\lim\limits_{x\to c} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to c} g(x) = b$, dove a e b sono reali. Allora valgono i seguenti risultati:*

1. $\lim\limits_{x\to c} (f(x) + g(x)) = a + b$;
2. $\lim\limits_{x\to c} f(x)g(x) = a \cdot b$;
3. $\lim\limits_{x\to c} f(x)/g(x) = a/b$, *se $g(x) \neq 0$ in un intorno di c e $b \neq 0$.*

L'algebra dei limiti si può estendere anche ad alcuni casi in cui uno dei due limiti precedenti vale $+\infty$ o $-\infty$. A tal fine si estendono ai reali estesi le operazioni di somma e prodotto. Si definisce:

1. $a + \infty = +\infty$, $a - \infty = -\infty$, per ogni a reale;
2. $+\infty + \infty = +\infty$, $-\infty - \infty = -\infty$;
3. $a \cdot (+\infty) = +\infty$, $a \cdot (-\infty) = -\infty$, se a è reale positivo;
4. $a \cdot (+\infty) = -\infty$, $a \cdot (-\infty) = +\infty$, se a è reale negativo;
5. $a/(\pm\infty) = 0$, per ogni a reale.

Per essere precisi dobbiamo dire che $+\infty$ e $-\infty$ non sono numeri, ma in questo caso li trattiamo come tali. In base alle precedenti operazioni, che sono del tutto astratte, ma si possono accettare come intuitive, la proposizione 16 può essere riscritta parola per parola includendo i precedenti casi e ottenendo quindi nuovi risultati sui limiti.

Nei reali estesi non sono definite le seguenti operazioni:

$$+\infty - \infty, \quad 0 \cdot (\pm\infty), \quad \pm\infty/\pm\infty, \quad 0/0.$$

Sono queste le cosiddette *forme indeterminate*. Non c'è la possibilità di scrivere un'algebra dei limiti per coppie di funzioni i cui limiti rientrano nei casi di cui sopra. Tali funzioni vanno trattate caso per caso.

Per esempio: se $f(x) = x^2$ e $g(x) = -x$, allora $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) + g(x)) = +\infty$, mentre se $f(x) = x^2$ e $g(x) = -x^3$, allora $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) + g(x)) = -\infty$. Con un po' di fantasia è come se dicessimo che nel primo caso $+\infty - \infty = +\infty$, mentre nel secondo $+\infty - \infty = -\infty$.

Teorema 14 (della permanenza del segno – senza dimostrazione) *Primo risultato. Sia data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ e sia c un numero reale esteso appartenente alla chiusura di I. Supponiamo $f(x) \geq 0$ (risp. $f(x) \leq 0$) in un intorno di c (escluso al più c) e sia $\lim\limits_{x\to c} f(x) = a$ con a reale esteso. Allora $a \geq 0$ (risp. $a \leq 0$).*

Secondo risultato. Se invece supponiamo che $\lim\limits_{x\to c} f(x) = a > 0$ (risp. $a < 0$), con a reale esteso, allora esiste un intorno U di c tale che $f(x) > 0$ (risp. $f(x) < 0$) per ogni $x \in U \cap E$, $x \neq c$.

Teorema 15 (confronto per i limiti di funzioni – con dimostrazione a lezione) *Primo caso. Siano date due funzioni $f, g : I \to \mathbb{R}$ e sia c un numero reale esteso appartenente alla chiusura di I. Supponiamo che $\lim\limits_{x\to c} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to c} g(x) = b$, dove a e b sono reali estesi. Se $f(x) \leq g(x)$ per ogni x (escluso al più c), allora risulta $a \leq b$ (dove si intende $-\infty < l < +\infty$ per ogni $l \in \mathbb{R}$).*

Secondo caso. Siano date tre funzioni $f, g, h : I \to \mathbb{R}$ e sia c un numero reale esteso esteso appartenente alla chiusura di I. Supponiamo che $\lim\limits_{x\to c} f(x) = a = \lim\limits_{x\to c} h(x)$, dove a è reale esteso. Se vale la relazione $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ per ogni x in un intorno di c (escluso al più c), allora vale $\lim\limits_{x\to c} g(x) = a$.

Definizione di asintoto.

Esempi ed esercizi sui risultati precedenti.

Mercoledi 8 ottobre 2008 - due ore

Proposizione 16 (cambiamento di variabili nei limiti – solo l'idea della dimostrazione) *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una data funzione I un intervallo. Sia*

$$\lim_{x \to c} f(x) = L.$$

Sia $x(t) \to c$ se $t \to t_0$. Sia valida almeno una delle seguenti condizioni (non è detto che siano alternative):

f è continua in c (e questo ci dice che c sta in I e non solo nella sua chiusura),

$x(t) \neq c$ per $t \neq t_0$.

Allora

$$\lim_{t \to t_0} f(x(t)) = L.$$

INIZIO DEL CALCOLO DIFFERENZIALE

Data $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione, definiamo: rapporto incrementale, retta secante il grafico.
Definizione di derivata e di funzione derivabile.
Definizione di retta tangente al grafico.

Proposizione 17 (con dimostrazione) *Una funzione derivabile in x_0 è continua in tale punto.*

Esempi immediati di funzioni derivabili $f(x) = mx + q$.
Esempi di funzioni non derivabili.

Proposizione 18 (sulla derivabilità di somme, prodotte, rapporti di funzioni derivabili) ***dimostrazione suggerita per esercizio del caso della somma***

Proposizione 19 (derivazione della composizione – con dimostrazione)

Giovedi 9 ottobre 2008 - due ore

Proposizione 20 (derivazione della funzione inversa – solo l'idea della dimostrazione) *Sia I un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ invertibile e chiamiamo $g : Im(f) \to \mathbb{R}$ l'inversa di f. Se f è derivabile in un punto x_0 e $f'(x_0) \neq 0$ allora g è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e risulta $g'(y_0) = 1/f'(x_0)$.*

La dimostrazione del precedente risultato sfrutta anche la proposizione 8.
Differenze qualitative tra retta tangente e retta secante il grafico di una funzione derivabile in un punto. Qualità dell'approssimazione.
Derivate seconde e derivate successive. Derivata seconda di una funzione inversa. Definizione di funzioni C^n.

Definizioni di punto di massimo e di minimo assoluto e relativo.

Teorema 21 (di Fermat – con dimostrazione)

Applicazioni ed esempi.

Venerdi 10 ottobre 2008 - due ore

Esercitazione scritta in aula.

Lunedi 13 ottobre 2008 - due ore

Teorema 22 (di Rolle – dimostrazione a lezione)

Teorema 23 (di di Lagrange, detto anche del valor medio – dimostrazione a lezione)

Teorema 24 (di Cauchy – dimostrazione a lezione)

Collegamento con la crescenza e decrenscenza delle funzioni

Proposizione 25 *Sia I un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ continua in I e derivabile in tutti i punti interni di I. Allora*

i) f è crescente se e solo se $f'(x) \geq 0$ per ogni x interno a I,

ii) f è decrescente se e solo se $f'(x) \leq 0$ per ogni x interno a I.

Si osservi che la proposizione precedente richiede esplicitamente che il dominio della funzione sia un intervallo, altrimenti il risultato è falso, in particolare non vale l'implicazione $\Leftarrow$. Basta prendere ad esempio $f(x) = 1/x$, definita in $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, la quale ha derivata negativa in ogni punto, ma non è decrescente.

Proposizione 26 *Sia I un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ continua in I e derivabile in tutti i punti interni di I. Allora*

i) se $f'(x) > 0$ per ogni x interno a I, segue che f è strettamente crescente,

ii) se $f'(x) < 0$ per ogni x interno a I, segue che f è strettamente decrescente.

Con lo stesso esempio precedente si vede che la proposizione non vale se il dominio di f non è un intervallo.
Il viceversa della proposizione non vale: infatti un controesempio è dato da $f(x) = x^3$ definita in $\mathbb{R}$ che è strettamente crescente ma vede annullarsi la derivata in zero.

Proposizione 27 *Sia I un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ continua in I e derivabile in tutti i punti interni di I. Allora f è costante se e solo se $f'(x) = 0$ per ogni x interno a I.*

In relazione alla proposizione precedente, un errore tipico è quello di dire che se una funzione g ha derivata nulla in ogni punto allora è costante. Se non ci si preoccupa di stabilire che il dominio è un intervallo si va incontro a errori grossolani. Per esempio potremmo avere $g : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 1$ se $x > 0$ e $g(x) = -1$ se $x < 0$ (cioè $g(x) = x/|x|$). Si vede subito che $g'(x) = 0$ per ogni x, ma la funzione non è costante.

Mercoledi 15 ottobre 2008 - due ore

Introduzione al CALCOLO INTEGRALE.
Idea sottostante al concetto di misura delle figure piane. Approssimazione mendiante polinomi.
Definizione di integrale di una funzione e di funzione integrabile. Si lavora su funzioni $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, limitate per ipotesi. Suddivisione (detta anche partizione) di $[a, b]$, somme inferiori e superiori, integrale superiore e inferiore.
Dalla definizione di integrale si ha la proposizione seguente.

Proposizione 28 (dimostrazione per esercizio) *$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è integrabile se e soltanto se per ogni $\epsilon > 0$ esiste una suddivisione σ di $[a, b]$ tale che $S(f, \sigma) - s(f, \sigma) < \epsilon$.*

Proprietà dell'integrale. Integrazione di somma, prodotto e rapporto di funzioni integrabili. Integrabilità delle funzioni valore assoluto, massimo e minimo di due funzioni.
Monotonia dell'integrale e additività dell'integrale rispetto al dominio.

Teorema 29 (proprietà dell'integrale – provare per esercizio la prima perché è facile) *Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ due funzioni integrabili e c un numero reale. Allora risulta:*

i) $f + g$ è integrabile e $\int_a^b (f + g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$ (additività),

ii) cf è integrabile e $\int_a^b (cf)(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$ (prodotto per uno scalare),

iii) se $r \in [a, b]$ $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^r f(x)\,dx + \int_r^b f(x)\,dx$ (additività rispetto al dominio),

iv) se $f \leq g$, $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$ (monotonia),

v) se $f \geq 0$, $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$ (monotonia, caso particolare del precedente), *vi)* $|f|$ *è integrabile e* $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$ *(monotonia, caso particolare del iv)).*

Integrale orientato: si definisce

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Si può dimostrare, per esempio, che le precedenti proprietà i), ii) e iii) valgono ancora per integrali indipendentemente da come sono ordinati gli estremi di integrazione, mentre le iv) v) e vi) non valgono più se si invertono gli estremi.

Esercizio: provare che è integrabile $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, definita come

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 1/2 \\ 1 & x = 1/2. \end{cases}$$

Dimostare che $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Teorema 30 (senza dimostrazione) *Se una funzione* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *è limitata e continua in tutti i punti tranne al più un numero finito, allora è integrabile.*

Corollario 31 (senza dimostrazione) *Una funzione* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continua è integrabile.*

Lunedi 20 ottobre 2008 - due ore

Riguardo a quali sono le funzioni integrabili vale anche il seguente risultato.

Proposizione 32 (con dimostrazione a lezione) *Una funzione* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *monotona è integrabile.*

Da notare, nel risultato precedente, che f è limitata perché monotona in un intervallo chiuso.

Suggerisco di fare l'esercizio di pag. 113 (libro Giaquinta-Modica)

Definizione di funzione integrale: siano dati un intervallo I e una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ integrabile. Fissiamo un qualsiasi punto $c \in I$. Per ogni $x \in I$ $f(x)$ è integrabile nell'intervallo di estremi c e x e l'integrale dipende ovviamente da x (si suppone c fissato). Abbiamo quindi definito una nuova funzione

$$F : I \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_c^x f(t)\,dt,$$

detta funzione integrale.

Teorema 33 (della media integrale – con dimostrazione a lezione) *Data* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continua, esiste* $c \in [a,b]$ *tale che*

$$\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} = f(c).$$

Teorema 34 (fondamentale del calcolo integrale – con dimostrazione a lezione) *Sia* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continua. Allora la funzione integrale* $F : [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt,$$

è derivabile in ogni punto di $[a,b]$ *e risulta*

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in [a,b].$$

Inoltre, se $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ *verifica*

$$G'(x) = f(x), \quad \forall x \in [a,b],$$

allora

$$G(b) - G(a) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Definizione 35 Data $f : I \to \mathbb{R}$, una funzione $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ è detta *primitiva* di f se

$$G'(x) = f(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

Il teorema fondamentale del calcolo integrale ci dà il risultato seguente.

Proposizione 36 *Se $f : I \to \mathbb{R}$ è continua allora ammette almeno una primitiva.*

Infatti ogni sua funzione integrale

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt,$$

(per ogni scelta di $c \in I$) è una primitiva di f.

Se una funzione f ammette una primitiva G allora ne ammette in realtà infinite, perché tutte le funzioni $H(x) = G(x) + k$, dove k è una costante, sono primitive di f. Infatti, essendo G primitiva di f, si ha $G'(x) = f(x)$ per ogni x. D'altra parte $H'(x) = G'(x)$, quindi $H'(x) = f(x)$, cioè H è una primitiva di f.

In altre parole se f ammette una primitiva G, tutte le funzioni "G + *costante*" sono primitive di f. Non ci sono altre primitive (se il dominio non fosse un intervallo non sarebbe vero).

Infatti sia L una qualsiasi primitiva di f. Se prendiamo la funzione $G - L$, si vede subito che

$$(G - L)'(x) = f(x) - f(x) = 0, \quad \forall x \in I.$$

Essendo I un intervallo, concludiamo che $G - L$ è costante.

Esercizi suggeriti:
dal libro Giaquinta-Modica: 14.8, 14.14, 14.16, 14.17.
Dal mio libro: cap. 5 n. 7, 11, 12, 107, 108.

Definizione di logaritmo e prime proprietà.

Lunedi 3 novembre 2008 - due ore

Derivazione e calcolo delle primitive delle potenze a esponente razionale (si usano le regole di derivazione delle funzioni inverse e composte).

Ancora sulle proprietà del logaritmo: la funzione è derivabile e strettamente crscente. Calcolo dei limiti per x che tende a zero e $+\infty$.

Definizione della funzione $exp(x)$ come inversa del logaritmo. Studio delle proprietà di $exp(x)$. Definizione di e come quell'unico numero, che risulta maggiore di 1, tale che $\log e = 1$. Si <u>prova</u> che $e^x = exp(x)$ se x è razionale, mentre si <u>*definisce*</u> $e^x = exp(x)$ se x è irrazionale.

Definizione di $\log_a x$ (logaritmo in base a) e conseguentemente delle funzioni a^x, con $a > 0,\ x \in \mathbb{R}$ e x^α, con $x > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$. Proprietà di queste funzioni.

La funzioni $c\,exp(kx)$, che ormai possiamo indicare con il simbolo $c\,e^{kx}$, dove c, k sono costanti, sono le uniche funzioni che risolvono le equazioni differenziali $y'(t) = k\,y(t)$.

Introduzione allo studio delle funzioni integrali. Studio di $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt$.

Mercoledi 5 novembre 2008 - due ore

Costruzione delle funzioni trigonometriche a partire dal teorema fondamentale del calcolo integrale. Dapprima si definisce

$$\pi = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - s^2}\,ds,$$

cioè l'area del cerchio di raggio 1.

Se $Q = (1, x)$ il punto P che sta sul cerchio unitario e sulla retta per l'origine e per Q ha coordinate $P = (1/\sqrt{1 + x^2}, x/\sqrt{1 + x^2})$.

Definiamo la funzione arcotangente,

$$\operatorname{arctg} x = 2\left(\int_0^{x/\sqrt{1+x^2}} \sqrt{1-s^2}\, ds - \frac{1}{2(1+x^2)}\right).$$

Cioè l'arcotangente è due volte l'area del settore circolare limitato dall'asse x e dalla retta per P. Vedremo poi il motivo del 2 davanti alla parentesi, cioè il perché si prende due volte l'area.

Si prova che

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt.$$

Quindi l'arcotangente è strettamente crescente. Si sa poi che è definito in $\mathbb{R}$ e

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \pi/2, \quad \lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x = -\pi/2.$$

L'arcotangente è derivabile e l'inversa si chiama tangente, è definita nell'immagine di $\operatorname{arctg} x$, cioè $(-\pi/2, \pi/2)$ e poi si prolunga in modo periodico a tutto $\mathbb{R}$ esclusi i punti del tipo $\pi/2 + k\pi$, k intero relativo.

Si definiscono poi, a partire dalla tangente, il seno e il coseno (si veda sul libro Giaquinta-Modica la formula esplicita). $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ sono, derivabili, definite in $\mathbb{R}$, periodiche di periodo 2π,

$$D(\operatorname{sen} x) = \cos x, \quad D(\cos x) = -\operatorname{sen} x.$$

Rispondiamo al problema precedente del 2 davanti alla formula che definisce l'arcotangente. Esso appare per due motivi: 1) se definiamo l'arcotangente come l'area del settore, e non il doppio, le successive funzioni seno e coseno, definite a partire dalla tangente, sarebbero diverse da quelle viste sopra; in particolare si perderebbe la forma della derivata, che è molto semplice e quindi preferibile; 2) il secondo motivo si vedrà nella seconda parte del corso e cioè con la teoria delle curve sarà provato che l'arcotangente è la misura dell'arco dalla quota zero fino a P (e a tal fine ci vuole proprio quel 2).

Le funzioni seno e coseno risolvono il problema del moto armonico. Precisamente si ha:

Proposizione 37 (con dimostrazione) *Dati $a, b \in \mathbb{R}$, c'è una e una sola funzione $y(t)$, derivabile due volte in $\mathbb{R}$ e con derivata seconda continua, che è soluzione del problema*

$$\begin{cases} y''(t) + \omega^2 y(t) = 0 & \forall t \in \mathbb{R} \\ y(0) = a \;\; y'(0) = b, \end{cases}$$

e tale soluzione è la funzione $y(t) = a\cos(\omega t) + (b/\omega)\, sen\,(\omega t)$.

Venerdi 7 novembre 2008 - due ore

Formule di duplicazione del seno e coseno (senza dimostrazione).

Introduzione alle funzioni seno e coseno iperbolici e loro proprietà.

Limiti notevoli: $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$, $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x)}{x} = 1$. Questi tre sono immediati, perché di fatto sono limiti di rapporti incrementali.

$\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^b}{a^x} = 0$, se $b > 0$, $a > 1$ e $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\log x}{x} = 0$ sono invece conseguenza dei teoremi di de l'Hôpital.

Teorema 38 (di de l'Hôpital – senza dimostrazione) *Siano dati un intervallo I e un numero reale esteso x_0 in modo che sia verificato uno dei casi seguenti:*

i) $x_0 \in I$, oppure x_0 è estremo di I,

ii) I illimitato superiormente e $x_0 = +\infty$, *iii) I illimitato inferiormente e $x_0 = -\infty$.*

Siano date due funzioni $f, g : I \to \mathbb{R}$ derivabili in I tranne al più x_0, e siano g e g' diverse da zero in un intorno di x_0 tranne al più x_0. Supponiamo che il limite $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ si presenti in una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Supponiamo anche che esita il limite

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Allora risulta

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Attenzione: se le ipotesi del teorema non sono tutte osservate con cura si va incontro a errori: per esempio è facile vedere che

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x+1} = 0.$$

Se applichiamo il teorema di de l'Hôpital e passiamo alle derivate risulta $\lim_{x\to 0} 1/1 = 1$. L'errore è consistito nel non aver visto che il limite di partenza *non è una forma indeterminata*, cosa che *impedisce* l'uso del teorema.

Convessità e concavità.

Definizione 39 *Sia I un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione data. Diremo che f è* convessa *se per ogni coppia di punti x_0 e x_1 di I e per ogni $t \in [0,1]$ risulta*

$$f(tx_0 + (1-t)x_1) \le tf(x_0) + (1-t)f(x_1). \tag{1}$$

Diremo che f è concava *se per ogni $x_0, x_1 \in I$ e per ogni $t \in [0,1]$ risulta*

$$tf(x_0) + (1-t)f(x_1) \le f(tx_0 + (1-t)x_1). \tag{2}$$

Consideriamo un punto c interno a I e siano $[a,c]$ e $[c,b]$ contenuti in I. Il punto c è detto flesso *se f è convessa in $[a,c]$ e concava in $[c,b]$ oppure se f è concava in $[a,c]$ e convessa $[c,b]$.*

Come si vede dalla definizione 39, la convessità o concavità di una funzione è indipendente dalla sua derivabilità. Se tuttavia una funzione è derivabile, la derivata prima e seconda (se esiste) danno informazioni sulla convessità o concavità della funzione stessa.

Proposizione 40 *(***senza dimostrazione***) Dati un intervallo I e una funzione derivabile $f : I \to \mathbb{R}$, f è convessa se e solo se per ogni coppia di punti x_0 e x_1 di I risulta*

$$f(x_1) \ge f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0). \tag{3}$$

Invece f è concava se e solo se per ogni coppia di punti x_0 e x_1 di I risulta

$$f(x_1) \le f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0). \tag{4}$$

Il significato geometrico del precedente teorema è che la convessità di f equivale al fatto che il suo grafico sta sempre sopra (o al più coincide con) il grafico di una qualsiasi delle sue rette tangenti. Infatti nella formula (3) il secondo membro della disuguaglianza è l'ordinata del punto di ascissa x_1 della retta tangente in $(x_0, f(x_0))$ al grafico di f.

Analogamente f è concava se e solo se il suo grafico sta sempre sotto (o al più coincide con) il grafico di una qualsiasi delle sue rette tangenti.

Proposizione 41 *(***senza dimostrazione***) Dati un intervallo I e una funzione $f : I \to \mathbb{R}$, derivabile due volte, f è convessa (risp. concava) se e solo se $f''(x) \ge 0$ (risp. $f''(x) \le 0$) per ogni $x \in I$.*

Studio di funzioni e in particolare di funzioni integrali.

Lunedi 10 novembre 2008 - due ore

Esercitazione scritta in aula.

Mercoledi 12 novembre 2008 - due ore

Esercitazione su studi di funzioni e in particolare su alcune funzioni integrali.

Problemi di massimo e di minimo.

Lunedi 17 novembre 2008 - due ore

Integrali indefiniti e primitive (cap. 17 del libro).
Tecniche di ricerca delle primitive. Integrazione di funzioni razionali, per parti e per sostituzione. Calcolo di integrale definito con sostituzione.
La sostituzione speciale dei polinomi trigonometrici.

Mercoledi 19 novembre 2008 - due ore

Integrale generalizzato. Introduzione al problema dell'integrazione di funzioni non necessariamente limitate in intervalli non necessariamente limitati.

Definizione di funzione misurabile, integrabile e sommabile in senso generalizzato. Definizione di integrale generalizzato di una funzione.

Esempi: $1/\sqrt{x}$, $1/x$ $1/x^2$ in intervalli $(0, a)$ e $(b, +\infty)$.

Venerdi 21 novembre 2008 - due ore

Tra le proprietà dell'integrale solo la monotonia ($f \leq g$, entrambe integrabili – non necessariamente sommabili – implica $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$) e l'additività rispetto al dominio (entrambe senza dimostrazione).

Teorema 42 (criterio del confronto per gli integrali generalizzati – con dimostrazione)

Proposizione 43 (integrabilità di $1/x^\alpha$ in $(0, 1)$ e $(1, +\infty)$ – con dimostrazione)

Proposizione 44 (criteri di sommabilità: proposizioni 18.11 e 18.12 – con dimostrazione)

Integrale improprio: definizione e confronto con l'integrale generalizzato. $\operatorname{sen} t/t$ è integrabile in senso improprio, ma non è sommabile in senso generalizzato in $(0, +\infty)$.

Lunedi 24 novembre 2008 - due ore

Formula di Taylor. Introduzione al problema delle approssimazioni di funzioni mediante polinomi. Richiami riguardanti la retta tangente come migliore approssimazione rispetto al resto delle secanti.

Calcolo approssimato di π.

Dati una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ di classe C^n e un punto $x_0 \in I$, definizione di polinomio di Taylor di $f(x)$ di ordine n e centrato in x_0.

(definizione di fattoriale di un numero intero)

Teorema 45 (Formula di Taylor con resto in forma integrale – con dimostrazione)

Teorema 46 (Formula di Taylor con resto in forma di Lagrange – con dimostrazione)

Mercoledi 26 novembre 2008 - due ore

Calcolo approssimato di e usando la formula di Taylor con il resto nella forma di Lagrange.

Esercizio svolto: e è irrazionale (si sfrutta ancora la formula di Taylor con il resto nella forma di Lagrange).

Teorema 47 (Formula di Taylor con resto in forma di Peano – con dimostrazione)

Si faccia attenzione al fatto che il precedente teorema è importante anche perché dà l'unicità del polinomio di Taylor (fissato l'ordine) di una data funzione.

Venerdi 28 novembre 2008 - due ore

Definizione di o piccolo e di O grande. Algebra degli o piccoli

Calcolo degli sviluppi di Taylor (centrati in zero) di alcune funzioni elementari: esponenziali, logaritmi, trigonomentriche, ecc.

Calcolo di alcuni limiti (espressi in forme indeterminate) con l'aiuto della Formula di Taylor e resto in forma di Peano.

Calcolo delle derivate di funzioni grazie al polinomio di Taylor.

Lunedi I dicembre 2008 - due ore

Introduzione alle equazioni differenziali ordinarie.

Alcuni esempi di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine: raffreddamento, leggi a potenza ed equazione logistica

Definizione precisa e formale di equazione differenziale ordinaria di ordine n nell'incognita $y(x)$ che è una funzione (appunto incognita) definita in un intervallo I.
Forma normale di un'equazione differenziale.

Definizione di soluzione di un'equazione differenziale.

Definizione di equazione differenziale lineare e di integrale generale.

Principio di sovrapposizione.

Mercoledi 3 dicembre 2008 - due ore

Equazioni differenziali lineari del primo ordine, omogenee e complete. Formula di calcolo dell'integrale generale. Metodo di variazione della costante

Equazioni differenziali lineari del secondo ordine. Caso omogeneo. Equazione caratteristica associata.

Teorema 48 (con dimostrazione del solo caso in cui le soluzioni dell'equazione caratteristica sono reali e diverse) *Forma generale delle soluzioni di un'equaione omogenea del secondo ordine.*

Venerdi 5 dicembre 2008 - due ore

Equazioni del secondo ordine: caso non omogeneo. Ricerca delle soluzioni. Metodo di variazione della costante.

Numeri naturali definiti a partire dal concetto assiomatico di insieme $\mathbb{R}$. Definizione di insieme induttivo e di $\mathbb{N}$. Proprietà di base di $\mathbb{N}$.

Mercoledi 10 dicembre 2008 - due ore

Principio di induzione.

Proposizione 49 (con dimostrazione) *$A \subseteq \mathbb{N}$ è limitato se e solo se ammette massimo.*

Proposizione 50 (24.6 del libro, con dimostrazione.)

Definizione di $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ a partire da $\mathbb{N}$.

Definizione di insieme denso e dimostrazione della densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$.

Definizione di successione. Definizione esplicite e ricorsive.

Esercizio svolto: si prova per induzione che $2^n \geq 2$ per ogni n naturale.

Lunedi 15 dicembre 2008 - tre ore

Definizione di successione. Definizione di limite finito e infinito di una successione. Esempi: $1/n$ converge a zero grazie al principio di Archimede.

Il processo di somma: significato di $\sum_{k=1}^{n} a_k$

Successioni definite in modo ricorsivo.

Definizione di serie, di successione delle somme parziali degli elementi di una successione assegnata. Serie convergenti, divergenti e indeterminate.

Serie e integrali impropri: dimostrazione della convergenza di $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ e della divergenza di $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$.

Esercizio assegnato: dimostrare la formula del binomio di Newton.

Proposizione 25.4, pag. 213 - senza dimostrazione.

Martedi 16 dicembre 2008 - un'ora

Proposizione 51 (con dimostrazioen a lezione) *Data una serie convergente $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, si ha che a_k convege a zero.*

Esempi: serie geometrica, armonica, armonica generalizzata e telescopica. La serie di Mengoli.

Stima della crescita della successione delle somme parziali della serie armonica e delle armoniche genralizzate (esercizio).

Mercoledi 17 dicembre 2008 - due ore

Ancora sui limiti di successioni e sulle serie. Definizioni di successione limitata, crescente, decrescente.

Proposizione 52 (26.1, pag. 221 - con dimostrazione)

Proprietà delle successioni: unicità del limite (dimostrazione nel caso di limite reale), limitatezza, due criteri di confronto e due teoremi di permanenza del segno.

Esistenza del limite di successioni monotone.

Teorema di collegamento (con dimostrazione).

Venerdi 19 dicembre 2008 - due ore

Esempi: $\operatorname{sen} x$ non ha limite per $x \to +\infty$.

Sottosuccessioni. Proposizione 26.16 pag. 225 (con dimostrazione).

Esercizi:limiti notevoli di alcune successioni: q^n, $\sqrt[n]{n}$.