UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FIRENZE

Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Matematica

La teoria dell'indice di punto fisso dal punto di vista della topologia differenziale

Marco Spadini

Anno Accaremico 1991–1992

Relatore della tesi: Chiar.mo Prof. **Massimo Furi**
Co-relatore della tesi: Chiar.mo Prof. **Gabriele Villari**

Indice

Introduzione

L'indice di punto fisso, come il grado topologico, è uno strumento utile in analisi non lineare; ed è stato studiato da molti autori in modi e contesti diversi, spesso basandosi sulla topologia algebrica. Esso può essere presentato sinteticamente nel modo seguente: ad ogni terna (X, W, f), dove X è un opportuno spazio topologico, W un suo aperto, ed f un'applicazione di tipo appropriato da W in X; associamo un intero che chiamiamo indice di punto fisso. Questo intero è, in un certo senso, un calcolo algebrico del numero dei punti fissi di f in W.

Gli spazi topologici e le funzioni considerati variano a seconda degli autori; il caso più classico è quello delle applicazioni compatte sugli ANR.

Lo scopo di questo lavoro di tesi, è offrire un'ulteriore interpretazione dell'indice di punto fisso sulle varietà differenziabili immerse in $\mathbb{R}^n$, fondata sui mezzi della topologia differenziale.

Lo strumento principale utilizzato è la teoria dell'intersezione. Concetto chiave di questa teoria è la trasversalità. Siano M ed N varietà differenziabili, Z una sottovarietà chiusa di M di dimensione opportuna; un'applicazione f, da N in M, si dice trasversale a Z se l'immagine del differenziale di f in ogni punto $x \in f^{-1}(Z)$ e lo spazio tangente a Z, generano tutto lo spazio tangente ad M in $f(x)$.

Quello che rende così importante questa proprietà è la sua genericità, nel senso che, se la f non è trasversale a Z, è sempre possibile renderla tale, modificandola, in modo continuo, poco quanto si vuole.

Sebbene i mezzi offerti dalla topologia algebrica siano in molti casi più potenti, abbiamo scelto di utilizzare la teoria dell'intersezione perché riteniamo che permetta un approccio più intuitivo all'indice di punto fisso. Dobbiamo però riconoscere che, nonostante questa immediatezza, i particolari tecnici, e, in generale, l'apparato teorico che abbiamo dovuto costruire, non risultano altrettanto evidenti.

La trattazione può essere divisa in due parti indipendenti tra loro, la prima corrispondente al primo capitolo e la seconda agli altri due. Nella prima parte, seguendo un'impostazione classica, attraverso la teoria del grado topologico, viene presentata la teoria dell'indice di punto fisso nel caso delle applicazioni compatte sugli ANR, e vengono illustrati i principali risultati ottenuti con essa. Il metodo seguito è simile, nella sostanza, a quello originale di Leray e Schauder del 1930 ([33]). Nella seconda parte, forniamo una diversa definizione di indice di punto fisso nel caso di funzioni continue su varietà differenziabili. Per raggiungere questo scopo abbiamo esteso l'indice di intersezione al caso delle varietà orientabili, non necessariamente compatte.

A questo punto sarebbe stato possibile introdurre l'indice di punto fisso (per varietà orientabili) come caso particolare di indice di intersezione; abbiamo preferito fornire una definizione diversa, valida anche nel caso non orientabile. Per fare questo è stato necessario fornire una definizione originale di orientabilità, basata sulla teoria dei rivestimenti. Abbiamo poi dimostrato alcune proprietà dell'indice e provato che queste lo determinano in modo univoco (teorema di unicità dell'indice), facendo così vedere che l'indice definito con tali metodi, coincide con quello classico. Il risultato di unicità ci ha quindi permesso di definire, ma soltanto nel caso particolare delle varietà compatte e senza bordo, due concetti caratteristici della topologia algebrica: il numero di Lefshetz e la caratteristica di Eulero.

Capitolo 1

Teoria classica dell'Indice di Punto Fisso

1.1 Il grado topologico

In questa parte vogliamo presentare la teoria classica dell'indice di punto fisso; prima è però necessario parlare del grado topologico. Quest'ultimo concetto, spesso introdotto con i metodi della topologia algebrica (vedi per esempio [16, 10, 20, 24, 34]), è molto importante ed è stato sviluppato da numerosi autori in diversi contesti (vedi [36, 37, 38, 39, 40]). Noi ci limiteremo ad introdurlo in $\mathbb{R}^n$ e negli spazi di Banach, soltanto per alcune classi di funzioni.

Cominciamo con il caso più semplice. Supponiamo che U sia un aperto, limitato di $\mathbb{R}^n$ ed $f : \overline{U} \to \mathbb{R}^n$ sia un'applicazione C^1. Ricordiamo che se C è un chiuso di $\mathbb{R}^n$, un'applicazione $g : C \to \mathbb{R}^n$ è detta di classe C^r se esiste un intorno aperto U di C, ed una $G \in C^r(U, \mathbb{R}^n)$ tale che $G|_C = g$.

Se $0 \in \mathbb{R}^n$ è un valore regolare per f, e $0 \notin f\big(\mathrm{Fr}(U)\big)$, ("$\mathrm{Fr}(U)$" indica la frontiera di U), si ha che $f^{-1}(0)$ è compatto e, per il teorema della funzione inversa, si ha che $f^{-1}(0)$ è un insieme finito, $\{x_1 \dots, x_k\}$.

Denotiamo con $\mathrm{J}_p(f)$ lo jacobiano di f nel punto $p \in \overline{U}$. Siccome 0 è un valore regolare, abbiamo

$$\mathrm{J}_p(f) \neq 0 \quad \forall p \in f^{-1}(0).$$

Definizione 1.1.1. Poniamo

$$\deg\big(f, U\big) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{sign}\Big(\mathrm{J}_{x_i}(f)\Big),$$

dove "sign$(\cdot)$" indica la consueta funzione segno. $\deg\big(f, U\big)$ sarà detto grado di f.

Prima di indicare alcune proprietà del grado, vediamo un'altra definizione.

Definizione 1.1.2. Un'applicazione continua $h : \overline{U} \times [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ sarà detta un'*omotopia* tra $f = h(\cdot, 0)$ e $g = h(\cdot, 1)$.

Vediamo due proprietà del grado che scriviamo sotto forma di teoremi.

Teorema 1.1.3. *Siano f e g due funzioni C^1 dalla chiusura di un aperto limitato U di $\mathbb{R}^n$, in $\mathbb{R}^n$ stesso; e supponiamo che 0 sia un loro comune valore regolare, e che $0 \notin f\big(\mathrm{Fr}(U)\big)$, ricordiamo che con $\mathrm{Fr}(U)$ indichiamo la frontiera di U. Supponiamo che esista un'omotopia h, di classe C^1, tra f e g, tale che l'insieme*

$$S = \big\{x \in \overline{U} : h(x,t) = 0 \text{ per qualche } t \in [0,1]\big\}$$

non contenga punti della frontiera di U; allora $\deg(f,U) = \deg(g,U)$.

Dimostrazione. La dimostrazione di questo teorema ricalca quella di Milnor [35], tenendo però presente che $h^{-1}(0)$ è, per le ipotesi fatte, un compatto contenuto in $U \times [0,1]$. □

Teorema 1.1.4. *Se f è una funzione come nel teorema 1.1.3, ed a è un suo valore regolare non appartenente all'immagine della frontiera di U, poniamo*

$$\delta = \min_{x\in \mathrm{Fr}\,(U)} \|f(x) - a\|.$$

Se b è un altro valore regolare di f tale che $\|b - a\| < \delta$, allora

$$\deg\big(f - a, U\big) = \deg\big(f - b, U\big).$$

Prima di dimostrare il teorema 1.1.4, è necessario fare alcune osservazioni.

Osservazione 1.1.5. Se a è un valore regolare per un'applicazione C^1, $f : \overline{U} \to \mathbb{R}^n$, con U aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, tale che $a \notin f\big(\mathrm{Fr}(U)\big)$, allora 0 è un valore regolare per l'applicazione $F \equiv f - a : \overline{U} \to \mathbb{R}^n$, tale che $0 \notin F\big(\mathrm{Fr}\, U\big)$.

Osservazione 1.1.6. Supponiamo che $f : \overline{U} \to \mathbb{R}^n$, con U aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, sia di classe C^1, ed a sia un suo valore regolare tale che $a \notin f\big(\mathrm{Fr}(U)\big)$. Poniamo

$$\delta = \min_{x\in\mathrm{Fr}(U)} \|f(x) - a\|.$$

Se $g : \overline{U} \to \mathbb{R}^n$ è C^1 e $\|g(x) - f(x)\| < \delta$ per ogni $x \in Fr(U)$, otteniamo che a non appartiene a $g\big(\mathrm{Fr}(U)\big)$. Infatti, per ogni x di $\mathrm{Fr}(U)$, si ha

$$\|g(x) - a\| \geq \|f(x) - a\| - \|g(x) - f(x)\| > 0.$$

Inoltre l'omotopia $h : \overline{U}\times[0,1] \to \mathbb{R}^n$, tra f e g, data da $h(x,t) = tf(x)+(1-t)g(x)$, è tale che l'insieme

$$S = \{x \in \overline{U} : h(x,t) = a \text{ per qualche } t \in [0,1]\},$$

non contiene punti di $\mathrm{Fr}(U)$. Infatti, per un qualunque $x \in \mathrm{Fr}(U)$, si ha

$$\|h(x,t) - a\| \geq t\|f(x) - a\| + (1-t)\|g(x) - a\| > 0.$$

In particolare se a è un valore regolare anche per g, dal teorema 1.1.3 si ha che

$$\deg\big(f - a, U\big) = \deg\big(g - a, U\big).$$

Dimostrazione del teorema 1.1.4. Per l'osservazione 1.1.5, 0 è un valore regolare per le applicazioni $F \equiv f - a : \overline{U} \to \mathbb{R}^n$ e $G \equiv f - b : \overline{U} \to \mathbb{R}^n$.

Notiamo che F e G sono omotope, con omotopia soddisfacente le condizioni del teorema 1.1.3; questo segue dall'osservazione 1.1.6 e dal fatto che

$$\|G(x) - F(x)\| = \|a - b\| < \delta.$$

Per il teorema 1.1.3, otteniamo

$$\deg\big(f - a, U\big) = \deg\big(f - b, U\big).$$

□

Il teorema 1.1.4 ci permette di rimuovere l'ipotesi, necessaria nella prima definizione di grado, che 0 sia un valore regolare per f.

Definizione 1.1.7. Se 0 **non** è un valore regolare per f, per il lemma di Sard (vedi [41] oppure [35]), esiste un valore regolare a, tale che $\|a\| < \delta$. Poniamo

$$\deg\big(f, U\big) = \deg\big(f - a, U\big).$$

Vogliamo eliminare anche l'ipotesi che f sia una funzione C^1.

Osservazione 1.1.8. Consideriamo due applicazioni f e g, di classe C^1, dalla chiusura di un aperto limitato U di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$ stesso. Supponiamo che $a \in \mathbb{R}^n$ non appartenga ad $f\big(\mathrm{Fr}(U)\big)$, e che

$$\|f(x) - g(x)\| < \delta \quad \forall x \in \mathrm{Fr}(U),$$

dove si è posto

$$\delta = \min_{x \in \mathrm{Fr}(U)} \|f(x) - a\|.$$

Dall'osservazione 1.1.6 e dalla definizione 1.1.7 segue immediatamente che

$$\deg\big(f - a, U\big) = \deg\big(g - a, U\big).$$

Supponiamo adesso che $f : \overline{U} \to \mathbb{R}^n$, con U aperto, limitato di $\mathbb{R}^n$, sia un'applicazione continua. Per il teorema di Weierstrass (vedi ad esempio [31]), esiste una funzione $g : \overline{U} \to \mathbb{R}^n$, di classe C^∞ tale che $\|f(x) - g(x)\| < {}^{\delta}\!/_{2}$ su tutto $\overline{U}$.

Definizione 1.1.9. Data un'applicazione continua $f : \overline{U} \to \mathbb{R}^n$, U aperto, limitato di $\mathbb{R}^n$, se $0 \notin f\big(\mathrm{Fr}(U)\big)$, scegliamo g come sopra e poniamo

$$\deg\big(f, U\big) = \deg\big(g, U\big).$$

L'osservazione 1.1.8 ci garantisce che questa è una buona definizione.

Dalla definizione di grado segue che se $U_1 \subseteq U$ è un intorno aperto dell'insieme

$$T = \big\{x \in U : f(x) = 0\big\},$$

allora

$$\deg\big(f, U_1\big) = deg\big(f, U\big). \tag{1.1.1}$$

Ricordiamo che avevamo assunto $f(x) \neq 0$ per x appartenente alla frontiera di U, così T risulta compatto. A causa di questo fatto possiamo dare una comoda generalizzazione del grado.

Se W è un aperto, anche illimitato, di $\mathbb{R}^n$, ed $f : W \to \mathbb{R}^n$ è un'applicazione continua tale che T risulti compatto (anche vuoto) allora definiamo

$$\deg\big(f, W\big) = \deg\big(f, W_1\big),$$

dove $W_1 \subseteq W$ è un intorno aperto e limitato di T. Usando l'equazione (1.1.1) si può vedere che questa definizione è indipendente dall'aperto W_1 scelto.

È conveniente definire $\deg\big(f, W\big) = 0$ quando W è l'insieme vuoto.

Dalle definizioni date segue immediatamente che il grado soddisfa le seguenti tre proprietà.

Normalizzazione. Se W è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$, $\mathrm{Id} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ indica l'identità, allora $\deg\big(\mathrm{Id}, W\big)$ è uguale ad 1 se $0 \in W$, e a 0 altrimenti.

Additività. Supponiamo che W sia un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$, $f : W \to \mathbb{R}^n$ sia un'applicazione continua, e che l'insieme $T = \big\{x \in W : f(x) = 0\big\}$ sia compatto (anche vuoto). Siano W_1 e W_2 sottoinsiemi aperti, disgiunti di W (anche vuoti) tali che $T \subseteq W_1 \cup W_2$. Si ha che

$$\deg\big(f, W\big) = \deg\big(f, W_1\big) + deg\big(f, W_2\big).$$

Omotopia. Supponiamo che W sia un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$, e che $h : W \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ sia un'applicazione continua tale che l'insieme

$$S = \big\{x \in W : h(x,t) = 0 \text{ per qualche } t \in [0,1]\big\},$$

sia compatto. Allora, denotando con $h_t : W \to \mathbb{R}^n$ l'applicazione $x \mapsto h(x,t)$, $\deg\big(h_t, W\big)$ è definito e costante per $t \in [0,1]$.

Queste proprietà determinano in modo univoco il grado. Più precisamente, consideriamo una funzione che ad ogni ogni coppia ordinata $\big(f, W\big)$ associa un intero, dove W è un aperto di $\mathbb{R}^n$, $f : W \to \mathbb{R}^n$ è un'applicazione continua e l'insieme $\{x \in W : f(x) = 0\}$ è compatto. Ammettiamo inoltre che tale funzione soddisfi le proprietà di cui sopra; L. Führer, H. Amann e S. Weiss hanno provato che è unica (vedi [21, 3]).

Dalla definizione di grado si ottiene immediatamente il seguente risultato, spesso denotato come proprietà di contrazione.

Data $f : U \to \mathbb{R}^n$, con U aperto di $\mathbb{R}^n$, tale che $\{x \in U : f(x) = x\}$ sia compatto, se $f(U) \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$, si ha

$$\deg\big(\mathrm{Id} - f, U\big) = \deg\big(F_1, U \cap \mathbb{R}^{n-1}\big),$$

dove $F_1 \equiv \big(\mathrm{Id} - f\big)\big|_{U \cap \mathbb{R}^{n-1}}$.

Leray e Schauder osservarono nel 1930, che le definizioni precedenti di grado possono essere estese agli spazi di Banach, purchè si restringa la classe delle funzioni permesse.

Premettiamo una definizione.

Definizione 1.1.10. Sia X uno spazio topologico ed $f : X \to Y$ un'applicazione continua tra spazi topologici; f sarà detta compatta se la chiusura di $f(X)$ in Y è compatta. Se, per ogni $x \in X$ esiste un suo intorno aperto N_x tale che $f|_{N_x}$ è compatta, allora diremo che f è localmente compatta.

Sussiste il seguente teorema

Teorema 1.1.11. *Se X è un sottoinsieme di uno spazio lineare normato Y, ed $f : X \to Y$ è un'applicazione compatta, esiste una successione di applicazioni continue $f_n : X \to Y_n$, dove Y_n è un sottospazio di Y con dimensione finita e si ha*

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\sup_{x \in X} \|f(x) - f_n(x)\| \Big) = 0.$$

Dimostrazione. Vedi [33]. □

Supponiamo adesso che W sia un sottoinsieme aperto di uno spazio di Banach X, e che $f : W \to X$ sia un'applicazione continua tale che l'insieme $S = \{x \in W : x - f(x) = 0\}$, sia compatto (anche vuoto). Una tale f sarà detta *ammissibile.*

Supponiamo che esista un intorno aperto V di S tale che $\overline{V} \subseteq W$ ed $f|_{\overline{V}}$ sia compatta. Osserviamo che un tale V esiste sempre se f è localmente compatta.

La compattezza di f e il fatto che $f(x) \neq x$ per $x \in \mathrm{Fr}(V)$ implica che

$$\inf_{x \in \mathrm{Fr}(V)} \|x - f(x)\| = \delta > 0.$$

Quanto detto sopra implica che esiste un'applicazione compatta, continua $g : \overline{V} \to X$ tale che $g(V)$ è contenuto in un sottospazio Y di dimensione finita di X, e che

$$\sup_{x \in V} \|f(x) - g(x)\| < \delta. \tag{1.1.2}$$

Definizione 1.1.12. Posto $F \equiv \mathrm{Id} - f$, Definiamo

$$\deg\big(F, W\big) = \deg\big(G, V \cap Y\big),$$

dove $G \equiv \mathrm{Id} - g$.

Come si vede applicando le proprietà di contrazione, di omotopia, e di additività, questa definizione è indipendente dall'aperto V e dall'applicazione g scelta. In questo caso deg sarà detto *grado di Leray-Schauder*.

Le seguenti proprietà seguono direttamente da quelle omonime del grado a dimensione finita.

Normalizzazione. Se W è un sottoinsieme aperto di uno spazio di Banach X, $\mathrm{Id} : X \to X$ indica l'identità, allora $\deg\big(\mathrm{Id}, W\big)$ è uguale ad 1 se $0 \in W$, e a 0 altrimenti.

Additività. Supponiamo che W sia un sottoinsieme aperto di uno spazio di Banach X, $f : W \to X$ sia un'applicazione continua tale che $S = \{x \in W : x - f(x) = 0\}$ sia compatto (anche vuoto). Se esiste un intorno aperto V di S tale che $(\mathrm{Id} - f)|_V$ è compatta e se W_1 e W_2 sono sottoinsiemi aperti, disgiunti di W (anche vuoti) tali che $S \subseteq W_1 \cup W_2$, si ha

$$\deg\big(\mathrm{Id} - f, W\big) = \deg\big(\mathrm{Id} - f, W_1\big) + \deg\big(\mathrm{Id} - f, W_2\big).$$

Omotopia. Sia X uno spazio di Banach, W un suo sottoinsieme aperto. Consideriamo un'applicazione $h : W \times [0,1] \to X$. Supponiamo che l'insieme

$$S = \big\{(x,t) \in W \times [0,1] : x - h(x,t) = 0\big\},$$

sia compatto, e che esista un intorno V, aperto in $W \times [0,1]$, di S, tale che $(\mathrm{Id} - h)|_V$ sia compatta. Si ha che, denotata con $h_t : W \to X$ l'applicazione $x \mapsto h(x,t)$, $\deg\big(\mathrm{Id} - h_t, W\big)$ è definito e costante per $t \in [0,1]$.

Analogamente a quel che accade nel caso a dimensione finita, le tre proprietà viste sopra determinano in modo univoco il grado di Leray-Schauder.

1.2 L'indice di punto fisso

In questa parte definiremo il concetto di indice di punto fisso, dapprima in $\mathbb{R}^n$ e negli spazi di Banach, poi nei retratti assoluti d'intorno (ANR).

Sia X uno spazio di Banach (eventualmente con dimensione finita), e W un suo aperto. Consideriamo un'applicazione continua $f : W \to X$ tale che l'insieme $\{S = \{x \in W : f(x) = x\}$ sia compatto (applicazioni che soddisfano questa condizione saranno dette *ammissibili*. Se la dimensione di X non è finita, supporremo inoltre che esista un intorno aperto V di S, tale che $f|_V$ sia compatta. Per descrivere sinteticamente questa situazione, diremo che f è *buona*.

Notiamo che la seconda condizione è automaticamente verificata, per le applicazioni continue ed ammissibili, quando X ha dimensione finita.

Definizione 1.2.1. Un'omotopia $h : W \times [0,1] \to X$, dove W è un aperto dello spazio di Banach X, sarà detta *ammissibile* se l'insieme

$$\big\{(x,t) \in W \times [0,1] : x - h(x,t) = 0\big\},$$

è compatto.

Definizione 1.2.2. Sia f un'applicazione ammissibile da un aperto W di uno spazio di Banach X in X. Se X ha dimensione infinita, supponiamo che esista un aperto V, contenente S, tale che $f|_V$ sia compatta (cioè supponiamo f buona); poniamo

$$\operatorname{ind}\big(f, W\big) = \deg\big(\operatorname{Id} - f, W, 0\big).$$

$\operatorname{ind}\big(f, W\big)$ sarà detto indice di punto fisso (o di Leray-Schauder) di f.

Per come è stato definito (come caso particolare di grado) l'indice di punto fisso gode delle stesse proprietà del grado che, come avevamo visto, lo determinano in modo univoco. Abbiamo quindi l'interessante risultato che tale indice coincide con quello omonimo, definito (per esempio in [16]) con i metodi della topologia algebrica.

Quello che segue è un elenco delle più importanti proprietà dell'indice di Leray-Schauder. Per la loro dimostrazione vedi [24].

Chiamiamo X uno spazio di Banach ed U un suo sottoinsieme aperto.

(1) Taglio. Sia f un'applicazione buona da U in X. Consideriamo un aperto $U_1 \subseteq U$ tale che $\{x \in U : f(x) = x\} \subseteq U_1$, allora

$$\operatorname{ind}\big(f, U\big) = \operatorname{ind}\big(f, U_1\big).$$

(2) Additività. Consideriamo una famiglia finita di aperti a due a due disgiunti $U_i \subseteq U$ con $1 \leq i \leq k$. Supponiamo che

$$\{x \in U : f(x) = x\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} U_i.$$

Allora

$$\operatorname{ind}\big(f, U\big) = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{ind}\big(f, U_i\big).$$

(3) Esistenza. Se $\operatorname{ind}\big(f, U\big) \neq 0$ allora l'applicazione f ha almeno un punto fisso.

(4) Omotopia. Sia $h : U \times [0,1] \to X$ un'omotopia ammissibile. Allora

$$\operatorname{ind}\big(h(\cdot, 0), U\big) = \operatorname{ind}\big(h(\cdot, 1), U\big).$$

(5) Moltiplicatività. Siano U_1 ed U_2 sottoinsiemi aperti rispettivamente degli spazi di Banach X_1 ed X_2. Supponiamo che $f_1 : U_1 \to X_1$ ed $f_2 : U_2 \to X_2$ siano buone; allora l'applicazione prodotto $f_1 \times f_2 : U_1 \times U_2 \to X_1 \times X_2$, data da $(x, y) \mapsto \big(f_1(x), f_2(y)\big)$, è buona, e

$$\operatorname{ind}\big(f_1 \times f_2, U_1 \times U_2\big) = \operatorname{ind}\big(f_1, U_1\big) \cdot \operatorname{ind}\big(f_2, U_2\big).$$

(6) Commutatività. Siano U_1 ed U_2 sottoinsiemi aperti rispettivamente degli spazi di Banach X_1 ed X_2. Supponiamo che $f : U_1 \to X_2$ e $g : U_2 \to X_1$ siano applicazioni continue. Se una delle composizioni

$$g \circ f : f^{-1}(U_2) \to X_1 \quad \text{oppure} \quad f \circ g : g^{-1}(U_1) \to X_2,$$

è buona, allora lo è anche l'altra e, in tale caso,

$$\operatorname{ind}\big(g \circ f, f^{-1}(U_2)\big) = \operatorname{ind}\big(f \circ g, g^{-1}(U_1)\big).$$

(7) Normalizzazione. Se U coincide con X ed $f : X \to X$ è costante, allora $\operatorname{ind}\big(f, X\big) = 1$.

Notiamo che la proprietà di normalizzazione qui compare in una forma leggermente diversa da quella che avevamo visto.

Nella seguente definizione richiamiamo le nozioni di retratto assoluto d'intorno (ANR) e di retratto assoluto (AR).

Definizione 1.2.3. Uno spazio metrizzabile X è detto un *retratto assoluto d'intorno* (ANR) se, ogni volta che esso è omeomorfo ad un sottoinsieme chiuso X_1 di uno spazio metrico M, esiste un intorno aperto U di X_1 in M ed una retrazione continua r di U sopra X_1 (cioè un'applicazione continua $r : U \to X_1$ tale che $r(y) = y$, $\forall y \in X_1$).

Uno spazio metrizzabile X è detto un *retratto assoluto* (AR), se, tutte le volte che X è omeomorfo ad un sottoinsieme chiuso X_1 di uno spazio metrico M, esiste una retrazione continua r di M sopra X_1.

Possiamo scrivere la definizione precedente in modo più semplice ricordando che uno spazio topologico X si dice r-dominato da un aperto V di un altro spazio topologico Y quando X è omoeomorfo ad un chiuso $X_1 \subseteq V$ ed esiste una retrazione continua $\rho : V \to X_1$. Si ha dunque il seguente teorema.

Teorema 1.2.4. *Affinchè Y sia un ANR (rispettivamente AR), è necessario e sufficiente che Y sia r-dominato da un insieme aperto di uno spazio normato (rispettivamente da uno spazio normato).*

Dimostrazione. Segue immediatamente dalla definizione 1.2.2. □

Osservazione 1.2.5. Notiamo che, se X è r-dominato da un aperto V di Y, allora esistono due applicazioni $r : V \to X$ ed $s : X \to V$ tali che $r \circ s$ è l'identità di X, infatti se $\phi : X \to \phi(X) \subseteq V$ è un omoeomorfismo, basta prendere $r = \phi^{-1} \circ \rho$, dove ρ è una retrazione continua di V su $\phi(X)$, ed $s = \phi$.

Qui di seguito elenchiamo alcune delle proprietà degli AR ed ANR; per una panoramica più completa vedi [7, 5] oppure [26, 27].

1) Se X è r-dominato da Y, ed Y è un ANR allora X lo è.

2) Se U è aperto in X, ed X è un ANR, allora U è un ANR.

3) Se X è un sottoinsieme convesso di uno spazio lineare normato, allora X è un AR.

4) Uno spazio metrizzabile che è localmente un ANR, è un ANR. In particolare le varietà differenziabili sono ANR.

5) Y è un ANR (rispettivamente un AR) se per ogni coppia (X, C), con X uno spazio metrizzabile e C un suo chiuso, e, per ogni applicazione continua $f : C \to Y$, esiste una sua estensione continua $F : U \to Y$, ad un intorno U di C in X (rispettivamente un'estensione continua $F : X \to Y$ a tutto X).

Finalmente siamo in grado di dare la definizione di indice di punto fisso sugli ANR.

Definizione 1.2.6. Sia X un ANR ed U un suo aperto, $f : U \to X$ un'applicazione buona. Prendiamo un insieme aperto V, in uno spazio normato E, che r-domini X. Siano $s : X \to V$ ed $r : V \to X$ due applicazioni come nell'osservazione 1.2.5. La composizione $s \circ f \circ r : r^{-1}(U) \to V$ è buona. Infatti, per come sono definite r ed s, si ha

$$s\big(\{x \in U : f(x) = x\}\big) = \{y \in r^{-1}(U) : s \circ f \circ r(y) = y\}.$$

Porremo

$$\operatorname{ind}\big(f, U\big) = \operatorname{ind}\big(s \circ f \circ r, r^{-1}(U)\big).$$

Utilizzando la proprietà di commutatività per l'indice negli spazi di Banach, si prova che questa definizione è indipendente dalle scelte di r, s e V (vedi [24]).

Le proprietà seguenti sono semplici riformulazioni, per gli ANR, di quelle viste nel caso di applicazioni in spazi di Banach. Per la loro dimostrazione si veda [24]. Supponiamo che X sia un ANR, e che U sia un suo aperto.

(1) Taglio. Sia f un'applicazione buona da U in X. Consideriamo un aperto $U_1 \subseteq U$ tale che $\{x \in U : f(x) = x\} \subseteq U_1$, allora

$$\operatorname{ind}\big(f, U\big) = \operatorname{ind}\big(f, U_1\big).$$

(2) Additività. Consideriamo una famiglia finita di aperti a due a due disgiunti $U_i \subseteq U$ con $1 \leq i \leq k$. Supponiamo che

$$\{x \in U : f(x) = x\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} U_i.$$

Allora

$$\text{ind}\,\big(f, U\big) = \sum_{i=1}^{k} \text{ind}\,\big(f, U_i\big).$$

(3) Esistenza. Se ind $\big(f, U\big) \neq 0$ allora l'applicazione f ha almeno un punto fisso.

(4) Omotopia. Sia $h : U \times [0,1] \to X$ un'omotopia ammissibile. Allora

$$\text{ind}\,\big(h(\cdot, 0), U\big) = ind\big(h(\cdot, 1), U\big).$$

(5) Moltiplicatività. Siano U_1 ed U_2 sottoinsiemi aperti rispettivamente degli ANR X_1 ed X_2. Supponiamo che $f_1 : U_1 \to X_1$ e $f_2 : U_2 \to X_2$ siano ammissibili; allora l'applicazione prodotto $f_1 \times f_2 : U_1 \times U_2 \to X_1 \times X_2$, data da $(x, y) \mapsto \big(f_1(x), f_2(y)\big)$, è ammissibile, e

$$\text{ind}\,\big(f_1 \times f_2, U_1 \times U_2\big) = \text{ind}\,\big(f_1, U_1\big) \cdot \text{ind}\,\big(f_2, U_2\big).$$

(6) Commutatività. Siano U_1 ed U_2 sottoinsiemi aperti di due ANR X_1 ed X_2, rispettivamente. Supponiamo che $f : U_1 \to X_2$ e $g : U_2 \to X_1$ siano applicazioni continue. Se una delle composizioni

$$g \circ f : f^{-1}(U_2) \to X_1 \quad \text{oppure} \quad f \circ g : g^{-1}(U_1) \to X_2,$$

è buona, allora lo è anche l'altra e, in tale caso,

$$\text{ind}\,\big(g \circ f, f^{-1}(U_2)\big) = \text{ind}\,\big(f \circ g, g^{-1}(U_1)\big).$$

(7) Normalizzazione. Se U coincide con X e $f : X \to X$ è compatta, allora f è un'applicazione di Lefshetz, ed ind $\big(f, X\big) = \Lambda(f)$, dove $\Lambda(f)$ indica il numero di Lefshetz di f.

Notiamo che la proprietà di normalizzazione compare in una forma più generale di quella che avevamo visto. Le nozioni di numero e di applicazione di Lefshetz si possono trovare in un qualunque testo di topologia algebrica, si veda in particolare [14, 15, 32].

Sottolineiamo che le varietà differenziabili che incontreremo nel prossimo capitolo sono dei casi particolari di ANR, quindi la definizione che abbiamo dato di indice di punto fisso si applica anche in quel caso.

Quello che faremo sarà fornirne una diversa interpretazione, che comunque porterà agli stessi risultati.

Capitolo 2

L'Indice di Intersezione

2.1 Definizioni preliminari

In questa parte introduciamo brevemente alcuni dei concetti fondamentali della topologia differenziale ed i risultati ad essi collegati che ci serviranno in seguito. Nella nostra esposizione sfrutteremo principalmente quelli che sono riportati da V. Guillelmin e A. Pollak nel loro libro "Differential Topology" e da M. W. Hirsh nell'opera omonima, nonché in "Topology from the differentiable viewpoint" di J. W. Milnor.

Sia U un aperto di $\mathbb{R}^n$, diremo che un'applicazione $f : U \to \mathbb{R}^m$ è di classe C^r in U se, per ogni x appartenente ad U, esistono e sono continue tutte le derivate parziali r-sime $\frac{\partial^r f_i}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_r}}$; scriveremo $f \in C^r(U)$. Inoltre, se f è di classe C^r per ogni r, diremo che f è di classe C^∞.

Quanto detto fino qui vale solo se U è aperto, estendiamolo ad un insieme qualunque. Sia $f : X \to M \subseteq \mathbb{R}^m$ un'applicazione con $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ed $M \subseteq \mathbb{R}^m$ sottoinsiemi qualunque, dato $x \in X$ diremo che f è di classe C^r (r può anche valere ∞) in x se esiste un intorno U di x, ed una funzione C^r $F : U \to \mathbb{R}^m$ che soddisfa: $F|_{U \cap X} \equiv f|_{U \cap X}$. Una tale F è detta un'estensione di f in $X \cap U$; se ciò è vero per ogni $x \in X$, allora scriveremo $f \in C^r(X, M)$. Osserviamo che la composizione di due applicazioni C^r è ancora C^r.

Definizione 2.1.1. Un'applicazione C^r $f : X \to Y$ è detta un C^r-diffeomorfismo se è un omeomorfismo e se $f^{-1} : Y \to X$ è ancora C^r. Nel seguito, salvo avviso contrario, useremo il termine "diffeomorfismo" per indicare un ∞-diffeomorfismo.

Definizione 2.1.2. Un sottoinsieme M di $\mathbb{R}^m$, è detto una *r-varietà differenziabile n-dimensionale* ($1 \leq r \leq \infty$), se per ogni $x \in M$ esiste un aperto U in $\mathbb{R}^n$ ed un C^r-diffeomorfismo $g : U \to g(U) = W \cap M$, con W un intorno aperto di x in $\mathbb{R}^m$. Un tale diffeomorfismo è detto una *parametrizzazione* di $W \cap M$, mentre l'applicazione inversa $g^{-1} : W \cap M \to U$ è detta un *sistema di coordinate* in $W \cap M$ e la coppia $(W \cap M, g^{-1})$ una *carta locale* di M.

Definizione 2.1.3. Diremo che Γ costituisce un *atlante* della r-varietà M; se $\Gamma = \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in \Lambda}$ è un insieme di carte locali tale che $\{U_i\}$ sia un ricoprimento aperto di M.

Nel seguito, salvo indicazioni contrarie, con il termine varietà, ci riferiremo sempre a ∞-varietà.

Alcuni esempi molto semplici di varietà differenziabili n-dimensionali sono: $\mathbb{R}^n$ stesso e i suoi aperti, la sfera $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$, ed i grafici delle funzioni C^∞ su aperti di $\mathbb{R}^n$.

Proposizione 2.1.4. *Se U, V, W sono aperti rispettivamente di $\mathbb{R}^k$, $\mathbb{R}^l$, $\mathbb{R}^m$ e se $f : U \to V$ e $g : V \to W$ sono C^1, con $f(x) = y$; si ha:*

$$d_x(f \circ g) = d_y g \circ d_x f.$$

Questa proposizione va sotto il nome di *regola di composizione dei differenziali.*

Osservazione 2.1.5. Se con $\mathrm{Id} : U \to U$ si indica l'identità sull'aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, si ha che Id è differenziabile e $d_x \mathrm{Id} \equiv \mathrm{Id} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ con $x \in U$.

Osservazione 2.1.6. Se $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è un'applicazione lineare allora, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, si ha $L \equiv d_x L$.

Vogliamo estendere il concetto di differenziale alle applicazioni tra varietà differenziabili, prima però è necessario definire ciò che si intende per spazio tangente ad una varietà.

Definizione 2.1.7. Sia $M \subseteq \mathbb{R}^k$ una varietà differenziabile n-dimensionale, dato $x \in M$, sia $g : U \to M \subseteq \mathbb{R}^k$ una parametrizzazione di un intorno $g(U)$ di x, con U aperto di $\mathbb{R}^n$ e $g(u) = x$. Si ha $d_u g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$; definiamo $T_x M = d_u g(\mathbb{R}^n)$. $T_x M$ è detto spazio tangente ad M in x.

Osservazione 2.1.8. La definizione 2.1.7 è buona perché, come si deduce dalla proposizione 2.1.4, non dipende dalla scelta della parametrizzazione g (vedi [35]).

Osservazione 2.1.9. $T_x M$ è uno spazio vettoriale n-dimensionale (vedi [35]).

Definizione 2.1.10. Siano $M \subseteq \mathbb{R}^l$ ed $N \subseteq \mathbb{R}^k$ due varietà differenziabili, $f : N \to M$ un'applicazione differenziabile tra di esse. Dato $x \in N$, per la definizione 2.1.1 esiste un'estensione F di f ad un intorno aperto $U \subseteq \mathbb{R}^k$ di x. Per ogni $v \in T_x N$ definiamo $d_x f(v) = d_x F(v)$.

Osservazione 2.1.11. La definizione 2.1.10 ha senso in quanto non dipende dalla scelta della particolare estensione F, inoltre $d_x f$ porta vettori di $T_x N$ in $T_{f(x)} M$ (vedi [35]).

Proposizione 2.1.12. *Siano M, N, P varietà differenziabili. Sono vere le seguenti affermazioni.*

1) Se $f : M \to N$ e $g : N \to P$ sono differenziabili con $f(x) = y$ si ha: $d_x(f \circ g) = d_y g \circ d_x f$.

2) Se $M \subseteq N$, indichiamo con $i : M \to N$ l'inclusione, allora $T_x M \subseteq T_x N$ con l'inclusione $d_x i$.

3) Se $f : N \to M$ è un diffeomorfismo allora $d_x f : T_x M \to T_y N$, con $f(x) = y$, è un isomorfismo di spazi vettoriali. Ne segue che $\dim M = \dim N$.

La definizione data di varietà non contiene alcuni degli oggetti più comunemente studiati dalla topologia differenziale come, per esempio, la palla unitaria chiusa di $\mathbb{R}^n$. Vogliamo quindi estendere quanto visto finora ad una classe più grande di oggetti: le cosiddette *varietà con bordo*. Per semplicità di notazione poniamo $H^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}$ e $\partial H^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$; chiameremo ∂H^n *bordo* di H^n e $H^n \setminus \partial H^n$ l'*interno*.

Definizione 2.1.13. Sia $M \subseteq \mathbb{R}^k$. Diremo che M è una *varietà con bordo n-dimensionale* se per ogni punto $x \in$M esiste un intorno U di x in M ed un diffeomorfismo $\phi : U \to V$ con V aperto di H^n. Come nella definizione 2.1.2 le coppie $\big(U, \phi\big)$ saranno indicate con il nome di carte locali.

Definizione 2.1.14. Sia M una varietà. Un punto $x \in M$ è un *punto del bordo* se $x \in \phi^{-1}(\partial H^n)$ per qualche carta locale (W, ϕ).

Tale definizione non dipende dalla carta scelta. Infatti, per il teorema della funzione inversa locale (vedi [35]), un cambiamento di coordinate non può portare un punto interno di H^n in un punto del bordo.

Definizione 2.1.15. L'insieme dei punti del bordo è detto *bordo* di M e si indica con ∂M.

Notiamo che può accadere che $\partial M = \emptyset$, in tale caso la definizione 2.1.13 coincide con la 2.1.2.

Sia x un punto del bordo della varietà differenziabile n-dimensionale M, lo spazio tangente ad M in x è dato, come nella definizione 2.1.10, da $d_u g(\mathbb{R}^n)$, dove g è una parametrizzazione C^∞ di un intorno di x e $g(u) = x$ con $u \in \partial H^n$. Naturalmente $d_u g$ è da considerare come il differenziale di una estensione C^∞ ad un intorno di u. In questo modo $T_x M$ è ancora uno spazio vettoriale n-dimensionale.

Proposizione 2.1.16. *Sia M una varietà differenziabile con bordo e* $\dim M = n$*, si ha che ∂M è una varietà $n-1$ dimensionale C^1 priva di bordo.*

Definizione 2.1.17. Date due varietà differenziabili N ed M, consideriamo due applicazioni continue f e g da N in M. Diremo che f e g sono *omotope* se esiste una $H : N \times [0,1] \to M$ continua, tale che $H(x,0) = f(x)$ e $H(x,1) = g(x)$. La H sarà detta una *omotopia*. Se f e g sono di classe C^∞ ha senso chiedersi se esista un'omotopia C^∞, in tale caso diremo che esse sono *omotope* C^∞.

Proposizione 2.1.18. *Sia la relazione di omotopia, sia la relazione di omotopia C^∞, sono di equivalenza.*

Un concetto molto importante è quello di orientazione di una varietà. Cominciamo col parlare dell'orientazione di uno spazio vettoriale di dimensione finita.

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e siano $B_1 = (v_1, \dots, v_n)$, $B_2 = (\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n)$ due basi di V, possiamo scrivere $\hat{v}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j$. Diremo che B_1 è in relazione con B_2 se $\det\big(a_{ij}\big) > 0$. Questa è una relazione di equivalenza.

Definizione 2.1.19. Nelle notazioni precedenti, un'orientazione per V è una classe di equivalenza di basi di V; una base B, appartenente a tale classe, sarà detta "positivamente orientata". Scriveremo convenzionalmente

$$\operatorname{sign}(B) = \begin{cases} +1 & \text{se } B \text{ è positivamente orientata} \\ -1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

In particolare diremo che le basi B_1 e B_2 determinano la stessa orientazione se $\det\big(a_{ij}\big) > 0$ (basi concordi) o, viceversa una opposta, se $\det\big(a_{ij}\big) < 0$.

Definizione 2.1.20. Sia $\tau : V \to W$ un isomorfismo di spazi vettoriali orientati, fissate due basi B_V e B_W positivamente orientate rispettivamente di V e W, diremo che τ inverte o preserva l'orientazione se $\tau(B_V)$ è una base concorde con B_W.

Osservazione 2.1.21. Siano V e W spazi vettoriali di dimensione finita, posto $U = V \times W$, se V e W sono orientati, allora U riceve un'orientazione naturale nel modo seguente: siano $B_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $B_2 = \{w_1, \dots, w_m\}$ basi rispettivamente di V e W, scegliamo come base di $V \times W$ quella data da $B = \{(v_1, 0), \dots, (v_n, 0), (0, w_1), \dots, (0, w_m)\}$ e poniamo $\operatorname{sign}(B) = \operatorname{sign}(B_1) \cdot \operatorname{sign}(B_2)$.

Definizione 2.1.22. Si definisce l'orientazione standard per lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ come quella determinata dalla base

$$\{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)\}.$$

Adesso siamo in grado di definire il concetto di orientazione per una varietà.

Definizione 2.1.23. Una varietà differenziabile si dice orientabile se esiste un atlante C^1: $\big\{U_i, \phi_i\big\}_i \in \Lambda$ tale che, per ogni i e j e per ogni $x \in U_i \cap U_j$, l'isomorfismo $d_{\phi_i(x)}\big(\phi_j \circ \phi_i^{-1}\big) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ conservi l'orientazione. Un atlante siffatto è detto *atlante orientato*.

Notiamo che non tutte le varietà sono orientabili. Un esempio classico di varietà non orientabile è il *nastro di Möbius* (vedi e.g., [25]).

Osservazione 2.1.24. Orientare una varietà differenziabile n-dimensionale M significa assegnare un'orientazione per ogni spazio tangente, in modo tale che, per ogni punto x appartenente ad M, esista un intorno aperto U di M ed un diffeomorfismo ψ che mandi U in un aperto di H^n, il cui differenziale porti l'orientazione specificata per T_zM, con $z \in U$, in quella standard di $\mathbb{R}^n$.

Proposizione 2.1.25. *Una varietà differenziabile, connessa, orientabile, ammette esattamente due orientazioni.*

Osservazione 2.1.26. Se M ed N sono varietà differenziabili, rispettivamente m ed n dimensionali, ed almeno una di esse è priva di bordo, allora $M \times N$ è una varietà differenziabile di dimensione $m+n$. Inoltre se per esempio supponiamo $\partial M = \emptyset$, allora $\partial(M \times N) = M \times \partial N$. Infatti fissato $(x, y) \in M \times N$, siano $\phi : U \to \mathbb{R}^m$ e $\psi : V \to H^n$ sistemi di coordinate, rispettivamente intorno a $x \in M$ e ad $y \in N$, definiamo $\sigma : U \times V \to \mathbb{R}^m \times H^n \equiv H^{n+m}$ in questo modo: $\sigma(x, y) = \big(\phi(x), \psi(y)\big)$. Come si verifica immediatamente, se M ed N sono orientate, allora $M \times N$ può essere orientato in modo naturale nel modo seguente: sia $(x, y) \in M \times N$ e siano $B_1 = (v_1 \dots v_m)$ e $B_2 = (w_1 \dots w_n)$ basi rispettivamente di T_xM e T_yN, dal momento che $T_{(x,y)}(M \times N) = T_xM \times T_yN$, l'insieme $B = \{a(v_1, 0) \dots (v_m, 0), (0, w_1) \dots (0, w_n)\}$ costituisce una base di $T_{(x,y)}(M \times N)$; poniamo $\mathrm{sign}(B) = \mathrm{sign}(B_1) \cdot sign(B_2)$.

Facendo una scelta siffatta per ogni coppia di punti $(x, y) \in M \times N$, per l'osservazione 2.1.26, determiniamo un'orientazione di $M \times N$; essa prende il nome di *orientazione prodotto.*

Osservazione 2.1.27. Usando la notazione dell'osservazione precedente, notiamo che se M è una varietà orientabile, l'orientazione prodotto di $M \times M$ non cambia al variare di quella di M. Infatti si ottiene sempre $\mathrm{sign}(B) = +1$.

La proposizione 2.1.8 ci dice che il bordo ∂M di una varietà differenziabile n-dimensionale M è a sua volta una varietà differenziabile con $\dim \partial M = n-1$. Se M è orientata, l'orientazione di M ne induce, nel modo che vedremo, una sul bordo. Questa verrà in seguito indicata con il nome di *orientazione bordo.* Per poter procedere è necessaria una definizione preliminare:

Definizione 2.1.28. Sia M una varietà differenziabile e x un punto di ∂M. Ovviamente $T_x(\partial M)$ ha codimensione 1 in T_xM, quindi in T_xM ci sono precisamente due vettori unitari normali a $T_x(\partial M)$. Sia u uno di essi. Diremo che u è *interno* se, data una carta locale $\phi : V \to U$ (V è un intorno aperto di x e U aperto di H^n) tale che $\phi(u) = 0$, allora $d_x\phi : T_xM \to \mathbb{R}^n$ porta u in H^n. Diremo che u è *esterno* altrimenti. Notiamo che questa distinzione non dipende dalla carta locale scelta.

Sia M una varietà orientabile con $\partial M \neq \emptyset$, definiamo che cosa si intende per *orientazione bordo*. Sia $x \in \partial M$, chiamiamo n_x il vettore normale unitario esterno della definizione 2.1.28; supponiamo che $B = (v_1 \dots v_{n-1})$ sia una base di $T_x(\partial M)$; diciamo che B è positivamente orientata secondo l'orientazione bordo, se $\{n_x, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ è una base positivamente orientata per $T_x M$. Notiamo che questa definizione non è canonica, perché dipende dalla scelta di n_x.

Definizione 2.1.29. Sia $f : N \to M$ un'applicazione differenziabile tra varietà differenziabili, f è detta una *sommersione* se, $\forall x \in N$, $d_x f : T_x N \to T_{f(x)} M$ è suriettivo, *immersione* se è iniettivo. Un'immersione che manda N omeomorficamente nella sua immagine è detta *incastramento*. L'immagine in M di un incastramento C^r è detta sottovarietà C^r di M.

Osservazione 2.1.30. Sia M una varietà differenziabile. Se $N \subseteq M$ è a sua volta una varietà differenziabile, allora N è una sottovarietà C^r di M.

Proposizione 2.1.31. *Ogni sottovarietà N della varietà differenziabile M è localmente ritagliata da funzioni indipendenti. Più precisamente, se k è la sua codimensione in M, allora, per ogni punto x di N, esiste un intorno W in M e k funzioni $g_1, \dots, g_k$ da W in $\mathbb{R}$ indipendenti (cioè tali che, posto $g \equiv (g_1, \dots, g_k)$, g è una sommersione), tali che $W \cap N$ è l'insieme degli zeri comuni di $g_1, \dots, g_k$.*

Osservazione 2.1.32. La proposizione 2.1.31 può essere riscritta nel modo seguente: se N è una sottovarietà di M con codimensione k, allora, per ogni $x \in N$ esiste un intorno W di x in M ed una sommersione $\phi : W \to \mathbb{R}^k$, tale che $\phi^{-1}(0) = W \cap N$.

Definizione 2.1.33. Sia $f : N \to M$ un'applicazione C^r, $r \geq 1$, tra varietà differenziabili. Diremo che $x \in N$ è un *punto regolare* se $d_x f$ è suriettivo, un *punto critico* altrimenti. In quest'ultimo caso $f(x)$ sarà detto *valore critico*. Un elemento $y \in M$ sarà detto *valore regolare* se non è un valore critico.

Osserviamo che la regolarità per f, di un punto x, può essere espressa dicendo che la matrice rappresentante $d_{\psi(x)} \phi \circ f \circ \psi^{-1}$ (ψ e ϕ sono carte locali in un intorno rispettivamente di x e di $f(x)$) è a rango pieno. Questo fatto, unito a considerazioni sulla continuità della funzione determinante (del minore che determina il rango), ci dice che, se x è un punto regolare per f, allora esiste un intorno aperto U di x tutto fatto di punti di questo tipo.

L'importantissimo *lemma di Sard* stabilisce che "quasi tutti" gli y, appartenenti alla varietà m-dimensionale M, sono valori regolari per f, cioè che l'insieme dei valori critici ha misura nulla in M. Per rendere preciso quanto detto è necessario definire il significato dell'espressione "insieme di misura nulla" su una varietà.

Un insieme $X \subseteq M$ è detto di misura nulla in M, se per ogni carta locale (U, ϕ), si ha che $\phi(U \cap X) \subseteq \mathbb{R}^m$ ha misura (m-dimensionale) nulla. Si prova facilmente che questa definizione non dipende dall'atlante scelto.

Proposizione 2.1.34 (Lemma di Sard). *Siano M, N varietà di dimensione rispettivamente m ed n e sia $f : N \to M$ un'applicazione C^r. Se $r > \max\{0, n - m\}$, l'insieme dei valori critici ha misura nulla e, di conseguenza, i valori regolari formano un insieme denso.*

Vale inoltre la seguente proposizione:

Proposizione 2.1.35. *Sia $f : N \to M$ un'applicazione C^∞ tra varietà differenziabili, rispettivamente n e m dimensionali. Se $y \in M$ è un valore regolare per f e per $\partial f = f|_{\partial N}$, allora $f^{-1}(y)$ è una varietà C^∞ di dimensione $n - m$, il cui bordo è $f^{-1}(y) \cap \partial N$.*

Un'estensione importante del concetto di regolarità è quello di trasversalità.

Definizione 2.1.36. Sia $f : N \to M$ un'applicazione C^1 tra varietà differenziabili, diremo che f è trasversale alla sottovarietà $Z \subseteq M$, nel punto $x \in N$, quando $x \notin f^{-1}(Z)$ oppure, se $x \in f^{-1}(Z)$, quando è soddisfatta

$$T_y Z + d_x f(T_x N) = T_y M, \quad \text{dove } y = f(x).$$

Se questo accade per ogni x appartenente ad $f^{-1}(Z)$ si dice che f è trasversale a Z e si scrive $f \pitchfork Z$.

Proposizione 2.1.37. *Consideriamo un'applicazione $f : N \to M$ di classe C^∞ tra due varietà differenziabili N ed M, di cui M priva di bordo. Se sia f, sia la sua restrizione a ∂N, sono trasversali ad una sottovarietà $Z \subseteq M$ priva di bordo, allora $f^{-1}(Z)$ è una sottovarietà C^∞ di N con $\partial f^{-1}(Z) = \partial N \cap f^{-1}(Z)$. Inoltre $\dim N - \dim f^{-1}(Z) = \dim M - \dim Z$.*

La trasversalità è una proprietà generica, in altre parole, fissata la sottovarietà Z, "quasi tutte" le applicazioni da N in M sono trasversali a Z. Il significato di questa affermazione sarà chiarito dal *teorema di trasversalità* che vedremo nel prossimo paragrafo.

2.2 L'indice di intersezione

Siano M, N varietà differenziabili senza bordo, modellate rispettivamente su $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$, sia inoltre $f : N \to M$ un'applicazione C^∞. Supponiamo Z sia una sottovarietà chiusa di M, modellata su $\mathbb{R}^{m-n}$, e $f \pitchfork Z$; allora possiamo dire che $f^{-1}(Z)$ è un insieme discreto (perché $f^{-1}(Z)$ è una varietà di dimensione 0). Se aggiungiamo l'ipotesi che N sia compatta, oppure che $f^{-1}(Z)$ sia contenuta in un compatto, allora $\#f^{-1}(Z)$ è un numero finito.

Supponiamo adesso che tutte le varietà siano orientate. Per la scelta delle dimensioni e per la trasversalità, dato $x \in f^{-1}(Z)$, si ha che $d_x f\big(T_x N\big) \oplus T_z Z = T_z M$ (dove $z = f(x)$), e $d_x f$ è iniettiva. Notiamo che $T_x N$ è orientato e quindi anche $d_x f\big(T_x N\big)$ lo è; la somma diretta stabilisce un'orientazione per $T_z M$ che può anche non coincidere con quella dovuta all'orientazione di M.

Definizione 2.2.1. Se M, N ,Z ,f sono come sopra poniamo:

$$I_x(f, Z) = \begin{cases} +1 & \text{se } d_x f\big(T_x N\big) \oplus T_z Z \text{ è concorde con } T_z M \\ -1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Osservazione 2.2.2. Se invertiamo l'orientazione di uno solo tra M, N e Z, allora $I_x(f, Z)$ cambia di segno. Con questa operazione, o $d_x f\big(T_x N\big) \oplus T_z Z$, o $T_z M$, ottengono orientazioni opposte a quelle di partenza, in questo modo essi diventano concordi tra loro se erano discordi, e viceversa.

Applicando due volte questo ragionamento, si ha che, invertendo due di quelle orientazioni, il segno di $I_x(f, Z)$ rimane costante.

Definizione 2.2.3. Se tutte le varietà sono come sopra e $f^{-1}(Z)$ è compatto (in questo caso diremo che f è Z*-ammissibile*), il numero:

$$I(f, Z) = \sum_{x \in f^{-1}(Z)} I_x(f, Z)$$

Si chiama *indice di intersezione di* f *con* Z.

L'usuale nozione di omotopia tra applicazioni è troppo vasta per gli scopi che ci proponiamo; per questo motivo con la seguente definizione isoliamo una classe particolare di omotopie che chiameremo Z-ammissibili.

Definizione 2.2.4. Sia $H : N \times [0, 1] \to M$ un'omotopia, con N ed M varietà differenziabili, $\partial N = \emptyset$, Z sottovarietà di M; H è detta *ammissibile relativamente a* Z o, più semplicemente, Z*-ammissibile*, se l'insieme $\{x \in N : H(x, t) \in Z \text{ per qualche } t \in [0, 1]\}$ è compatto.

Definizione 2.2.5. Siano M, N, Z come nella definizione 2.2.4, le applicazioni f e g da N in M si dicono *omotope in modo ammissibile relativamente a* Z, se esiste un'omotopia H, Z-ammissibile, tale che $H(\cdot, 0) = f$ e $H(\cdot, 1) = g$.

Notiamo che la relazione di omotopia Z-ammissibile tra applicazioni è di equivalenza.

L'indice di intersezione è, per adesso, definito soltanto per applicazioni trasversali a Z. Per poter definire l'indice di funzioni C^∞ arbitrarie abbiamo bisogno di alcuni risultati.

Data un'applicazione $f : N \to M$ tra due varietà, talvolta scriveremo per brevità ∂f in luogo di $f|_{\partial N}$.

Teorema 2.2.6 (di trasversalità). *Sia $F : N \times S \to M$ un'applicazione C^∞ tra varietà differenziabili di cui soltanto N può avere bordo, sia Z una sottovarietà di M priva di bordo. Se F e ∂F sono trasversali a Z, allora anche $f_s = F(\cdot, s)$ e ∂f_s lo sono eccetto al più per s in un sottoinsieme di misura nulla di S.*

Dimostrazione. Vedi [25, pag. 68]. □

In realtà quello di cui abbiamo bisogno è il risultato più forte riportato nel teorema 2.2.9; prima però vediamo un teorema ed alcuni lemmi preliminari.

Teorema 2.2.7 (ε-intorni). *Sia M una varietà C^∞ compatta e senza bordo immersa in $\mathbb{R}^m$, indichiamo con M_ε l'insieme aperto dei punti di $\mathbb{R}^m$ distanti meno di ε da M. Se ε è sufficientemente piccolo allora, ad ogni punto $w \in M_\varepsilon$ corrisponde un unico punto $\pi(w) \in M$ di minima distanza. Inoltre $\pi : M_\varepsilon \to M$ è una sommersione. Se M non è compatta, allora esiste una funzione C^∞, $\varepsilon : M \to (0, +\infty)$ per la quale vale la stessa conclusione relativamente ad*

$$M_\varepsilon = \big\{ w \in \mathbb{R}^m : \|w - x\| < \varepsilon(x) \text{ con } x \in M \big\}.$$

Dimostrazione. Vedi [25, pag 68]. □

Lemma 2.2.8. *Siano M, N varietà differenziabili, con M contenuta in $\mathbb{R}^m$ e $\partial M = \emptyset$; poniamo $S = \{s \in \mathbb{R}^m : \|s\| < 1\}$; sia $f \in C^\infty(N, M)$, fissiamo un compatto $K \subseteq N$ ed un numero positivo ν; allora esiste una funzione $F \in C^\infty(N \times S, M)$ tale che:*

1) $F(x, 0) = f(x)$;

2) *Fissato $x \in N$ l'applicazione $s \mapsto F(x, s)$ è una sommersione di S in M;*

3) $\|F(x, s) - f(x)\| < \nu \ \forall x \in K$ *e* $\forall s \in S$.

Dimostrazione. Definiamo $\Phi(x, s) = \pi\Big(f(x) + \varepsilon\big(f(x)\big)s\Big)$, dove π e $\varepsilon(\cdot)$ sono come nel teorema precedente. Siccome $\pi|_M$ è l'identità si ha: $\Phi(x, 0) = f(x)$. Inoltre, fissato x, l'applicazione $s \mapsto f(x) + s\,\varepsilon\big(f(x)\big)$ è una sommersione di S in $\mathbb{R}^m$. Quindi la funzione $s \mapsto \Phi(x, s)$, con x fissato, è a sua volta una sommersione, in quanto composizione di due sommersioni. Per l'uniforme continuità di Φ sul compatto K, fissato ν, esiste $\tau > 0$ tale che $\|\Phi(x, s) - \Phi(x, 0)\| < \nu$ per ogni $\|s\| < \tau$ e per ogni $x \in K$. Poniamo $F(x, s) = \Phi(x, \tau s)$; si ha che F è una sommersione e che $\|F(x, s) - f(x)\| < \nu \ \forall x \in K$ e $\forall s \in S$. □

Teorema 2.2.9 (Approssimazione con applicazioni trasversali). *Siano M, N ed $\hat{N}$ varietà differenziabili, di cui M priva di bordo, e sia Z una sottovarietà chiusa di $N \times M$ con $\partial Z = \emptyset$. Date due applicazioni C^∞, $\phi : \hat{N} \to N$ ed $f : \hat{N} \to M$, dove ϕ è una sommersione, definiamo $\Gamma[f] : \hat{N} \to N \times M$ ponendo $x \mapsto$*

$\big(\phi(x), f(x)\big)$. *Supponiamo che* $\Gamma[f]^{-1}(Z)$ *sia compatto e* $\Gamma[f]|_{\partial\hat{N}}$ *sia trasversale a* Z. *Fissata una funzione continua* $\lambda : \hat{N} \to (0, +\infty)$. *Esiste un'applicazione* C^∞, $g : \hat{N} \to M$, *coincidente con* f *sul bordo di* $\hat{N}$, *tale che l'applicazione* $\Gamma[g]$ *definita da* $x \mapsto \big(\phi(x), g(x)\big)$ *risulta trasversale a* Z *e* $\|f(x) - g(x)\| < \lambda(x)$ $\forall x \in \hat{N}$. *Inoltre esiste un'omotopia* h *tra* f *e* g *tale che l'insieme*

$$\big\{x \in \hat{N} : \big(\phi(x), h(x,t)\big) \in Z, \ \textit{per qualche } t \in [0,1]\big\}$$

è compatto.

Dimostrazione. Osserviamo dapprima che in un intorno U_0 di $\partial\hat{N}$ si ha $\Gamma[f] \pitchfork Z$. Infatti, se $x \in \partial\hat{N}$, ci sono due possibilità:

1) $x \notin \Gamma[f]^{-1}(Z)$. Allora, dal momento che Z è chiusa, $\hat{N} \setminus \Gamma[f]^{-1}(Z)$ è un intorno di x su cui $\Gamma[f] \pitchfork Z$.

2) $x \in \Gamma[f]^{-1}(Z)$. Per l'osservazione 2.1.32, esiste un intorno W di $\Gamma[f](x)$ in $N \times M$ ed una sommersione $\psi : W \to \mathbb{R}^k$ (k è la codimensione di Z in $N \times M$) tale che $\psi^{-1}(0) = W \cap Z$. Si ha che $\Gamma[f] \pitchfork Z$, in un punto $\hat{x} \in \Gamma[f]^{-1}(Z \cap W)$, esattamente quando $\hat{x}$ è regolare per $\psi \circ \Gamma[f]$ (ricordiamo che $\operatorname{Ker} d_{\Gamma[f](\hat{x})}\psi = T_{\Gamma[f](\hat{x})}Z$); ma x è regolare per $\psi \circ \Gamma[f]$, allora esiste un intorno di x tutto composto di punti di questo tipo. Ne segue che $\Gamma[f]$ è trasversale a Z in un intorno di x.

Possiamo trovare un compatto $K \subseteq \hat{N}$, tale che $\Gamma[f]^{-1}(Z) \setminus U_0$, sia contenuto nel suo interno $\mathring{K}$, poniamo $\nu = \min_{x \in K} \lambda(x)$. Poniamo $C = \hat{N} \setminus \mathring{K}$, C è un chiuso. Chiaramente $\Gamma[f] \pitchfork Z$ in C (si osservi che $\Gamma[f]^{-1}(Z) \cap C \subseteq U_0$). Sia $\gamma : N \to [0,1]$ una funzione C^∞ che vale identicamente 0 in C ed è non nulla su $\mathring{K}$ (per l'esistenza di una tale funzione vedi ad esempio [19, §2]). Se S ed F sono scelte come nel lemma 2.2.8 (quindi $\|f(x) - F(x,s)\| < \nu$ per ogni $x \in K$ e $s \in S$), poniamo

$$\sigma(x) = \big(\gamma(x)\big)^2 \quad \text{e} \quad H(x,s) = \Big(\phi(x), F\big(x, \sigma(x)s\big)\Big).$$

Notiamo che H è definita su tutto $\hat{N} \times S$; proviamo che H è trasversale a Z. Preso $(x,t) \in H^{-1}(Z)$ ci sono due possibilità:

1) $\sigma(x) \neq 0$. In questo caso l'applicazione $r \mapsto F\big(x, \sigma(x)r\big)$ è una sommersione (è composizione del diffeomorfismo $r \mapsto \sigma(x)r$ con la sommersione $r \mapsto F(x,r)$), cioè $d_{(x,t)}F\big(T_{(x,t)}\hat{N} \times S\big) = T_{F(x,t)}M$. Tenendo presente la definizione di H ed il fatto che ϕ è una sommersione, abbiamo

$$\begin{aligned} d_{(x,t)}H\big(T_{(x,t)}\hat{N} \times S\big) &= d_x\phi\big(T_x\hat{N}\big) \times d_{(x,t)}F\big(T_{(x,t)}\hat{N} \times S\big) \\ &= T_xN \times T_{F(x,t)}M = T_{H(x,t)}N \times M. \end{aligned}$$

da cui segue $H \pitchfork Z$ in (x,t).

2) $\sigma(x) = 0$. Definiamo un'applicazione $m : \hat{N} \times S \to \hat{N} \times S$ data da $m(\xi, \eta) = (\xi, \sigma(\xi)\eta)$. Per $(v, w) \in T_{(x,t)}\hat{N} \times S$, si ha:

$$d_{(x,t)}m(v, w) = \big(v, \sigma(x)w + d_x\sigma(v)t\big),$$

ma, per la definizione di σ, abbiamo $d_x\sigma \equiv 2\gamma(x)d_x\gamma$; dunque $\sigma(x) = 0$ implica $d_x\sigma = 0$. Otteniamo $m(x, t) = (x, 0)$ e $d_{(x,t)}m(v_1, v_2) = (v_1, 0)$. Ne segue che, fissato $(v, w) \in T_{(x,t)}\hat{N} \times S$,

$$d_{(x,t)}\big(F \circ m\big)(v, w) = d_{m(x,t)}F\big(d_{(x,t)}m(v, w)\big) = d_{(x,0)}F(v, 0),$$

Inoltre, siccome $F(\cdot, 0) = f$, si ha $d_{(x,0)}F(v, 0) = d_xf(v)$. Possiamo scrivere $H = \big(\phi, F \circ m\big)$, dunque

$$d_{(x,t)}H(v, w) = \big(d_x\phi(v), d_{(x,0)}F(v, 0)\big) = \big(d_x\phi(v), d_xf(v)\big) = d_x\Gamma[f](v).$$

Abbiamo provato che $\operatorname{Im} d_{(x,t)}H = \operatorname{Im} d_x\Gamma[f]$. D'altra parte $\sigma(x) = 0$ implica $x \in C$ dunque, come già abbiamo visto, $\Gamma[f]$ è trasversale a Z in x, quindi $H \pitchfork Z$.

Per il teorema di trasversalità, possiamo scegliere $\bar{s}$ in S tale che $H(\cdot, \bar{s})$ sia trasversale a Z. Poniamo $\bar{H}(x, t) = H(x, t\bar{s})$; se indichiamo con $g(x)$ l'applicazione $\bar{H}(x, 1)$, otteniamo che $\Gamma[g]$ è trasversale a Z e g risulta omotopa mediante l'omotopia $h = \pi_2 \circ \bar{H}$ ad f in modo ammissibile (π_2 è la proiezione sul secondo fattore nel prodotto cartesiano $N \times M$). Osserviamo inoltre che $\|f(x) - g(x)\|$ risulta minore di $\lambda(x)$ per ogni x di $\hat{N}$, infatti, in $\mathring{K}$, si ha $\|f(x) - g(x)\| < \nu = \min_{x \in K} \lambda(x)$ e, fuori di $\mathring{K}$, $\|f(x) - g(x)\| = 0$. □

Poniamo $N = \{0\}$ (varietà 0-dimensionale formata dal solo elemento $0 \in \mathbb{R}$) e identifichiamo $\{0\} \times M$ con M. Se $\phi : \hat{N} \to \{0\}$ è l'applicazione costante, otteniamo subito che possiamo identificare $\Gamma[f]$ con f. Sostituendo nella tesi del teorema 2.2.9, si ha il seguente, importante, risultato.

Corollario. *Siano M, $\hat{N}$, varietà differenziabili con $\partial M = \emptyset$, Z una sottovarietà chiusa di M e $\partial Z = \emptyset$. Consideriamo $f \in C^\infty(\hat{N}, M)$ tale che $f^{-1}(Z)$ sia compatto e $\partial f \pitchfork Z$. Allora esiste una funzione $g \in C^\infty(\hat{N}, M)$ omotopa C^∞ ad f tale che $g \pitchfork Z$ e $\partial f = \partial g$. Inoltre l'omotopia $G : \hat{N} \times [0, 1] \to M$ tra f e g può essere scelta in modo tale che l'insieme $\{x \in \hat{N} : G(x, t) \in Z$ per qualche $t \in [0, 1]\}$ sia compatto e che, fissata una funzione continua $\lambda : \hat{N} \to (0, +\infty)$, si abbia $\|G(x, t) - f(x)\| < \lambda(x)$ $\forall x \in \hat{N}$ e $\forall t \in [0, 1]$.*

Vogliamo estendere il concetto di indice di intersezione alle funzioni che non godono della proprietà di trasversalità richiesta nella definizione 2.2.3. Per poter fare ciò è necessario provare che se f e g sono due applicazioni trasversali a Z, omotope C^∞ in modo Z-ammissibile, allora esse hanno lo stesso indice di intersezione.

Definizione 2.2.10. Siano M, N varietà differenziabili, Z una sottovarietà chiusa di M, tali che $\dim N + \dim Z = \dim M$; sia data $f : N \to M$ di classe C^∞, con $f^{-1}(Z)$ compatto. Consideriamo un'applicazione g, omotopa in modo Z-ammissibile ad f e trasversale a Z. Porremo: $I(f, Z) = I(g, Z)$.

Notiamo che l'esistenza di una tale g è garantita dal teorema 2.2.9; vediamo quindi il seguente teorema che garantisce l'indipendenza di tale definizione dalla scelta di g.

Teorema 2.2.11 (proprietà di invarianza per omotopie C^∞). *Siano M, Z ed N varietà differenziabili prive di bordo, Z una sottovarietà di M tale che $\dim N + \dim Z = \dim M$. Date f, g applicazioni in $C^\infty(N, M)$ trasversali a Z ed omotope C^∞ in modo Z-ammissibile tra loro, si ha $I(f, Z) = I(g, Z)$.*

Prima della dimostrazione è necessario un lemma:

Lemma 2.2.12. *Sia $f : N \to M$ un'applicazione C^∞ tra varietà differenziabili prive di bordo, $f \pitchfork Z$, con Z una sottovarietà chiusa di M tale che $\dim Z + \dim N = \dim M$. Supponiamo che esista un'estensione C^∞, F di f ad una varietà W orientata, di cui N è il bordo, tale che $F^{-1}(Z)$ compatto. Allora $I(f, Z) = 0$.*

Dimostrazione. Sia K un compatto contenente $F^{-1}(Z)$ nel suo interno. Per il corollario del teorema 2.2.9 possiamo supporre $F \pitchfork Z$ (ricordiamo che in tale teorema la funzione approssimante coincide sul bordo con quella di partenza). In questo caso $F^{-1}(Z)$ è una varietà compatta 1-dimensionale tale che $\partial\big(F^{-1}(Z)\big) = F^{-1}(Z) \cap N = f^{-1}(Z)$. Per il teorema di classificazione (Vedi ad esempio [35]), ogni componente connessa è diffeomorfa alla sfera unitaria di dimensione 1 oppure ad un segmento chiuso (arco), quindi tale varietà ha un numero pari di punti del bordo. Le sue componenti connesse, inoltre, sono un numero finito, per la compattezza e la locale connessione di $F^{-1}(Z)$.

Sia A uno degli archi che compongono $F^{-1}(Z)$ e sia $\partial A = \{a\} \cup \{b\}$; le orientazioni di W ed M ne determinano una di A in questo modo: per ogni punto x di A, sia $\{v_1(x), \ldots, v_{n+1}(x)\}$ una base positivamente orientata di T_xW, con v_1 tangente ad A e tale che $\|v_1(x)\| = 1$ $\forall x \in A$. Diremo che v_1 determina l'orientazione positiva di A, se $d_xF[(v_2, \ldots, v_{n+1})]$ è una base positivamente orientata di M.

Naturalmente v_1 è una funzione C^∞ della x e, punta esternamente a W in un estremo, chiamiamolo a, e internamente nell'altro; ne segue che $I_a(f, Z) = 1$ e $I_b(f, Z) = -1$; dunque $I(f, Z) = \sum_{x \in f^{-1}(Z)} I_x(f, Z) = 0$. □

Il risultato che ci interessa segue immediatamente.

Dimostrazione del teorema 2.2.11. Consideriamo $F : N \times [0, 1] \to M$ un'omotopia C^∞ Z-ammissibile tra f e g, per il lemma precedente abbiamo che $I(\partial F, Z) = 0$.

D'altra parte $N \times [0,1]$ può essere orientato come un prodotto. Dal momento che $\partial\big(N \times [0,1]\big) = N \times \{0\} \cup N \times \{1\}$, $N \times \{0\}$ ed $N \times \{1\}$ risultano entrambi orientati come bordo, inoltre le loro orientazioni risultano una coerente ed una opposta rispetto a quella fornita dall'identificazione naturale con N.

Osserviamo che ∂F vale f su $N \times \{0\}$ e g su $N \times \{1\}$, allora $I(\partial F, Z) = I(f,Z) - I(g,Z) = 0$. □

Osserviamo che l'ammissibilità dell'omotopia è una condizione essenziale per la validità del teorema 2.2.11, appena dimostrato).

Siano $M = \mathbb{R}^2$, $N = \mathbb{R}$ e $Z = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2\}$. Consideriamo le applicazioni f e g, da N in M, rispettivamente definite da $x \mapsto (x,x)$ e $x \mapsto (x,-x)$. f e g sono entrambe Z-ammissibili e C^∞, inoltre sono omotope C^∞ con la seguente omotopia (*non* Z-ammissibile): $h(x,t) = t\,f(x) + (1-t)\,g(x)$. Nonostante ciò, si ha

$$I(f,Z) = +1 \quad \text{e} \quad I(g,Z) = -1.$$

Dalla proprietà di invarianza per omotopie C^∞ (teorema 2.2.11), tenendo conto della definizione 2.2.5, si ha subito il seguente risultato.

Proposizione 2.2.13. *Supponiamo che M ed N siano varietà differenziabili prive di bordo, che Z sia una sottovarietà chiusa di M, con $\partial Z = \emptyset$, e che $\dim N + \dim Z = \dim M$. Se f e g sono applicazioni da N in M, di classe C^∞, omotope C^∞ in modo Z-ammissibile, allora $I(f,Z) = I(g,Z)$.*

Estendiamo l'indice all'intersezione di due sottovarietà. Consideriamo N e Z sottovarietà di M, con $\partial N = \partial Z = \emptyset$ e $\dim N + \dim Z = \dim M$; con $i : N \to M$ indichiamo l'inclusione di N.

Definizione 2.2.14. Se $N \cap Z$ è compatta poniamo $I(N,Z) = I(i,Z)$.

Nel paragrafo seguente vedremo alcune ulteriori estensioni del concetto di indice di intersezione.

2.3 L'indice di intersezione per applicazioni continue

Nel paragrafo precedente l'indice di intersezione è stato definito solamente per applicazioni C^∞; vogliamo estendere questo concetto anche a quelle solamente continue. Per fare ciò utilizzeremo un teorema di approssimazione sulle varietà; più precisamente proveremo che un'applicazione continua è, sotto opportune ipotesi, approssimabile con un'altra C^∞. Per una diversa dimostrazione di questo fatto si veda [28]. Cominciamo con due risultati notevoli.

Teorema 2.3.1 (approssimazione di Weierstrass). *Sia S un compatto di $\mathbb{R}^k$. Ogni funzione continua, reale, su S, può essere approssimata uniformemente da funzioni polinomiali in k variabili.*

Dimostrazione. Vedi e.g, [31]. □

Nel seguito utilizzeremo un teorema di approssimazione per funzioni a valori in $\mathbb{R}^n$, che si può ottenere applicando il teorema di Weierstrass a tutte le componenti.

Corollario. *Sia S un insieme compatto di $\mathbb{R}^k$ e sia data una funzione continua $f : S \to \mathbb{R}^n$. Fissato un numero positivo ε, esiste un'applicazione $g : S \to \mathbb{R}^n$, di classe C^∞, tale che $\|f(x) - g(x)\| < \varepsilon \ \forall x \in S$. (In questo caso la norma è quella di $\mathbb{R}^n$)*

Teorema 2.3.2 (esistenza delle partizioni dell'unità). *Sia X un sottoinsieme arbitrario di $\mathbb{R}^n$. Per ogni ricoprimento di X, mediante suoi aperti $\{U_\alpha\}$, esiste una famiglia di funzioni C^∞ $\{\theta_i\}$ su X, chiamata una partizione C^∞ dell'unità subordinata ad $\{U_\alpha\}$, con le seguenti proprietà:*

1) $0 \le \theta_i(x) \le 1 \ \forall x \in X$ *e per ogni i.*

2) Ogni $x \in X$ ha un intorno in cui tutte le θ_i, eccetto al più un numero finito di esse, sono nulle.

3) Ogni θ_i è identicamente nulla, eccetto su qualche insieme chiuso contenuto in un U_α.

4) Per ogni $x \in X$, $\sum_i \theta_i(x) = 1$ (per il punto 2 è sempre una somma finita).

Dimostrazione. Vedi e.g., [25]. □

Teorema 2.3.3 (approssimazione sulle varietà). *Data un'applicazione f continua da N in M, fissata una funzione continua $\tau : N \to (0, +\infty)$, esiste una $g : N \to M$ di classe C^∞, tale che $\|f(x) - g(x)\| < \tau(x)$ per ogni x appartenente ad N. (La norma è quella dello spazio $\mathbb{R}^k$ in cui si suppone immersa M).*

Dimostrazione. Consideriamo $\{U_\alpha\}$ un ricoprimento di N mediante aperti relativamente compatti. Sia $\{\theta_i\}$ la partizione C^∞ dell'unità subordinata ad $\{U_\alpha\}$, per la proprietà 3 del teorema di esistenza delle partizioni dell'unità 2.3.2, per ogni i esiste un chiuso C_i, contenuto in un U_α, tale che θ_i è nulla fuori di C_i. Notiamo che i C_i sono compatti e che ricoprono N. Con ε e π indichiamo le applicazioni del teorema degli ε-intorni. Poniamo

$$\varepsilon_i = \min_{x \in C_i} \varepsilon(x), \quad \tau_i = \min_{x \in C_i} \tau(x), \quad \mu_i = \min\{\varepsilon_i, \tau_i\}.$$

Per il corollario al teorema di Weierstrass 2.3.1, è possibile trovare un'applicazione $\hat{g}_i : C_i \to \mathbb{R}^k$ di classe C^∞ tale che $\|\hat{g}_i(x) - f(x)\| < \mu_i/2 \ \forall x \in C_i$.

Definiamo $g_i(x) = \pi\big(\hat{g}_i(x)\big)$. Ricordando che $\pi\big(\hat{g}_i(x)\big)$ è un punto di M di minima distanza da $\hat{g}_i(x)$, possiamo scrivere

$$\|g_i(x) - \hat{g}_i(x)\| = \|\pi\big(\hat{g}_i(x)\big) - \hat{g}_i(x)\| \le \|\hat{g}_i(x) - f(x)\| < \frac{\mu_i}{2}.$$

Per la disuguaglianza triangolare

$$\|f(x) - g_i(x)\| \leq \|g_i(x) - \hat{g}_i(x)\| + \|\hat{g}_i(x) - f(x)\| < \mu_i;$$

in particolare $\|f(x) - g_i(x)\| < \tau(x)$ per $x \in C_i$.

Finalmente poniamo

$$g(x) = \sum_i \theta_i(x) g_i(x).$$

Osserviamo che g, in quanto somma localmente finita di funzioni C^∞, è di classe C^∞. Inoltre, comunque fissato $x \in N$, si ha

$$\|g(x) - f(x)\| = \left\| \sum_i \theta_i(x) g_i(x) - f(x) \right\| = \left\| \sum_i \theta_i(x) \big(g_i(x) - f(x) \big) \right\|$$

da cui, per la disuguaglianza triangolare, otteniamo

$$\|g(x) - f(x)\| \leq \sum_i \theta_i(x) \|g_i(x) - f(x)\| < \sum_i \theta_i(x) \tau(x) = \tau(x).$$

□

Proposizione 2.3.4 (stabilità delle soluzioni). *Data $f \in C^0(N, M)$ e, fissato un intorno U di $T = f^{-1}(Z)$ (Z è una sottovarietà chiusa di M), comunque scelta $g : N \to M$ che soddisfi*

$$0 \leq \|f(x) - g(x)\| < d\big(f(x), Z\big) \tag{2.3.1}$$

fuori di U, si ha $g^{-1}(Z) \subseteq U$.

Dimostrazione. Usando la disuguaglianza triangolare, abbiamo

$$d\big(g(x), Z\big) \geq d\big(f(x), Z\big) - d\big(f(x), g(x)\big) > 0,$$

fuori di U. Da cui segue immediatamente la tesi. □

Osservazione 2.3.5. Osserviamo che, data f, è possibile trovare una funzione continua $\tau_f : N \to (0, +\infty)$ tale che $\tau_f(x)$ risulti minore, sia di $d\big(f(x), Z\big)$ fuori di U, sia di $\varepsilon\big(f(x)\big)$ su tutto N (ε è la funzione del teorema degli ε-intorni relativa ad M).

Questo risultato può essere dimostrato utilizzando una partizione dell'unità, oppure mediante il potente teorema di estensione di Dugundji (si veda [17, cap.IX 6.1]).

Per la sua maggiore semplicità preferiamo seguire la seconda strada. Secondo il teorema citato, esiste una funzione positiva g, definita su tutto N, coincidente con $d\big(f(x), Z\big)$ fuori di U. È allora sufficiente porre

$$\tau_f(x) = \min\{g(x), \varepsilon\big(f(x)\big)\}.$$

Si noti che, con il procedimento sopra illustrato, è possibile provare un risultato più generale. Dato un numero finito di funzioni continue, positive, definite su sottoinsiemi chiusi di N, ne esiste un'altra, continua su N, minore di tutte le precedenti.

Teorema 2.3.6 (deformazione). *Se due applicazioni Z-ammissibili, f e g sono "sufficientemente vicine" allora risultano omotope in modo Z-ammissibile. Più precisamente, sia U un intorno relativamente compatto in N di $T_f = f^{-1}(Z)$ e supponiamo che f e g soddisfino le seguenti condizioni:*

1) $\|f(x) - g(x)\| < d\big(f(x), Z\big)\ \forall x \in N \setminus U$;

2) $\|f(x) - g(x)\| < \varepsilon\big(f(x)\big)\ \forall x \in N$,

dove ε è la funzione del teorema degli ε-intorni relativa ad M. Allora esiste un'omotopia (di classe C^∞ se f e g lo sono) Z-ammissibile $H : N \times [0,1] \to M$, tale che $H(\cdot, 0) = f$ ed $H(\cdot, 1) = g$.

Dimostrazione. Indichiamo con π l'applicazione del teorema degli ε-intorni, per $t \in [0,1]$, si ha

$$\Big\|f(x) - \big(t\,f(x) + (1-t)\,g(x)\big)\Big\| = (1-t)\|f(x) - g(x)\| < \varepsilon\left(f(x)\right). \tag{2.3.2}$$

Dunque $t\,f(x) + (1-t)\,g(x)$ appartiene a $B\Big(f(x), \varepsilon\big(f(x)\big)\Big)$; dal momento che π è ivi definita, ha senso porre $H(x,t) = \pi\big(t\,f(x) + (1-t)\,g(x)\big)$.

Consideriamo l'insieme

$$T_H = \big\{x \in N : H(x,t) \in Z,\ \text{per qualche } t \in [0,1]\big\}.$$

Se con pr_1 indichiamo la proiezione sul primo fattore nel prodotto cartesiano $N \times [0,1]$, abbiamo $T_H = \mathrm{pr}_1\big(H^{-1}(Z)\big)$. Inoltre $H^{-1}(Z)$ è chiuso in $N \times [0,1]$, perché Z è chiuso in M. Poiché $H^{-1}(Z)$ è chiuso e, per la (2.3.2) e la proposizione di stabilità delle soluzioni 2.3.4, contenuto in $\overline{U} \times [0,1]$ (compatto in $N \times [0,1]$), è compatto. Siccome pr_1 è continua, abbiamo che T_H è compatto, dunque H è un'omotopia Z-ammissibile. □

Sfruttando la proposizione 2.2.13 otteniamo subito il seguente corollario

Corollario. *Se due applicazioni C^∞ sono sufficientemente vicine (nel senso del teorema di deformazione), allora hanno lo stesso indice di intersezione con la medesima sottovarietà.*

Definizione 2.3.7. Data $f \in C^0(N,M)$ Z-ammissibile, dove Z è una sottovarietà chiusa di M tale che $\dim N + \dim Z = \dim M$ e $\partial M = \partial N = \partial Z = \emptyset$, scegliamo un intorno relativamente compatto U di $f^{-1}(Z)$. Procedendo, per esempio, come nell'osservazione 2.3.5; costruiamo una funzione τ_f continua e positiva, tale che

1) $\tau_f(x) < d\big(f(x), Z\big)$ fuori di U.

2) $\tau_f(x) < \varepsilon\big(f(x)\big)$ $\forall x \in N$ (ε è la funzione del teorema degli ε-intorni relativa ad M).

Determiniamo una funzione g, di classe C^∞, che soddisfa

$$\|f(x) - g(x)\| < \frac{\tau_f(x)}{2} \quad \forall x \in N.$$

Usando il teorema di deformazione, abbiamo che g è Z-ammissibile (perché è omotopa in modo Z-ammissibile ad f). Poniamo $I(f,Z) = I(g,Z)$.

Perché la definizione 2.3.7 abbia senso, è necessario che non dipenda dalla scelta dell'applicazione approssimante g e dell'intorno U. Dato un altro intorno, relativamente compatto, $\hat{U}$ di $f^{-1}(Z)$, ed un'altra funzione approssimante $\hat{g}$, che soddisfa le ipotesi della definizione 2.3.7 relative ad $\hat{U}$, abbiamo che, $\|g(x) - f(x)\|$ e $\|\hat{g}(x) - f(x)\|$ sono minori di ${}^1\!/_2 d\big(f(x), Z\big)$ fuori di $U \cup \hat{U}$, e, su tutto N, sono minori di ${}^1\!/_2\varepsilon\big(f(x)\big)$. Ne segue che

$$\|g(x) - \hat{g}(x)\| < \begin{cases} d\big(f(x), Z\big) & \text{fuori di } U \cup \hat{U}, \\ \varepsilon\big(f(x)\big) & \text{su tutto } N. \end{cases}$$

Applicando il teorema di deformazione 2.3.6, otteniamo che, $g(x)$ e $\hat{g}(x)$ sono omotope in modo ammissibile e, dunque, $I(g,Z) = I(\hat{g}, Z)$.

Lemma 2.3.8. *Data un'omotopia Z-ammissibile $h : N \times [0,1] \to M$, fissata una funzione continua $\zeta : N \times [0,1] \to (0,+\infty)$, esiste un'omotopia Z-ammissibile h_1 di classe C^∞ tale che $\|h(x,t) - h_1(x,t)\| < \zeta(x,t)$.*

Dimostrazione. Fissato un intorno aperto e relativamente compatto U di $h^{-1}(Z)$, procedendo come nell'osservazione 2.3.5, scegliamo la funzione continua $\zeta_1 : N \times [0,1] \to (0,+\infty)$ tale che

1) $\zeta_1(x,t) < d\big(h(x,t), Z\big)$ fuori di U;

2) $\zeta_1(x,t) < \zeta(x,t)$ in $N \times [0,1]$.

Possiamo trovare un'omotopia C^∞, h_1 tale che $\|h(x,t) - h_1(x,t)\| < \zeta_1(x,t)$.

Per la proposizione di stabilità delle soluzioni 2.3.4, abbiamo $h_1^{-1}(Z) \subseteq U$, ma $h_1^{-1}(Z)$ è chiuso in $N \times [0,1]$ dunque, per la relativa compattezza di U, è anche compatto. Indicando con pr_1 la proiezione sul primo fattore, abbiamo

$$T_h = \big\{x \in N : h_1(x,t) = x,\ t \in [0,1]\big\} = \mathrm{pr}_1\big(h_1^{-1}(Z)\big).$$

Per la continuità di pr_1, T_h è compatto. In definitiva h_1 è Z-ammissibile e soddisfa $\|h(x,t) - h_1(x,t)\| < \zeta(x,t)$. $\square$

Vediamo alcune proprietà dell'indice di intersezione.

Proposizione 2.3.9 (invarianza per omotopie). *Siano f e g due applicazioni continue Z-ammissibili da N in M; dove Z una sottovarietà chiusa, priva di bordo di M. Se f e g sono omotope in modo ammissibile relativamente a Z, allora $I(f, Z) = I(g, Z)$.*

Dimostrazione. Sia h un'omotopia Z-ammissibile tra f e g. Fissiamo un intorno U di $h^{-1}(Z)$. Esiste una funzione continua $\zeta : N \times [0, 1] \to (0, +\infty)$ tale che

1) $\zeta(x, t) < d\big(h(x, t), Z\big)$ fuori di U;

2) $\zeta(x, t) < \varepsilon\big(h(x, t)\big)$ in $N \times [0, 1]$ (ε è la funzione del teorema degli ε-intorni relativa ad M).

Poniamo $U_0 = U \cap N \times \{0\}$ e $U_1 = U \cap N \times \{1\}$. Osserviamo che U_0 e U_1 sono aperti rispettivamente di $N \times \{0\}$ e di $N \times \{1\}$. Per il lemma 2.3.8, possiamo trovare un'omotopia Z-ammissibile, di classe C^∞, h_1 tale che $\|h(x, t) - h_1(x, t)\| < {}^1\!/_2\zeta(x, t)$.

Notiamo che

$$\|h_1(x, 0) - f(x)\| = \|h_1(x, 0) - h(x, 0)\| < \frac{1}{2}\zeta(x, 0)$$

e

$$\|h_1(x, 1) - g(x)\| = \|h_1(x, 1) - h(x, 1)\| < \frac{1}{2}\zeta(x, 1).$$

Inoltre $\zeta(x, 0)$ e $\zeta(x, 1)$ soddisfano la 1) e 2) della definizione 2.3.7 relativamente a U_0 ed ad U_1, per cui

$$I(f, Z) = I\big(h_1(\cdot, 0), Z\big) \quad \text{e} \quad I(g) = I\big(h_1(\cdot, 1), Z\big).$$

Dalla proposizione 2.2.13, abbiamo $I\big(h_1(\cdot, 0), Z\big) = I\big(h_1(\cdot, 1), Z\big)$. Da cui segue immediatamente la tesi. $\square$

Proposizione 2.3.10 (additività). *Consideriamo $f \in C^0(N, M)$ ammissibile, con N aperto di M, sia Z una sottovarietà chiusa di M. Se $f^{-1}(Z) \subseteq V_1 \cup V_2$ con V_1 e V_2 aperti disgiunti di N, si ha $I(f, Z) = I(f|_{V_1}, Z) + I(f|_{V_2}, Z)$.*

Dimostrazione. Consideriamo due aperti disgiunti U_1 ed U_2, relativamente compatti, contenuti in N tali che $\overline{U}_i \subseteq V_i$.

Applicando il teorema di approssimazione sulle varietà 2.3.3, ed il corollario del teorema di approssimazione mediante applicazioni trasversali 2.2.9, si ha che esiste una $g : N \to M$ di classe C^∞, trasversale a Z, tale che

$$\|f(x) - g(x)\| < d\big(f(x), Z\big) \quad \forall x \in N \setminus \big(U_1 \cup U_2\big), \tag{2.3.3}$$

e

$$\|f(x) - g(x)\| < \varepsilon\big(f(x)\big) \quad \forall x \in N \tag{2.3.4}$$

(ε indica la funzione del teorema degli ε-intorni relativa ad M). La (2.3.3) e la (2.3.4) implicano rispettivamente

$$\begin{aligned} \|f(x)-g(x)\| <& d\big(f(x),Z\big) \quad \forall x \in V_i \setminus U_i \ (i=1,2), \\ \|f(x)-g(x)\| <& \varepsilon\big(f(x)\big) \quad \forall x \in V_i \ (i=1,2). \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

Per il teorema di deformazione 2.3.6 si ha che $f \simeq g$ e $f|_{V_i} \simeq g|_{V_i}$ $(i=1,2)$, dove il simbolo $\simeq$ indica un'omotopia Z-ammissibile.

Usando la proposizione 2.3.9 (invarianza per omotopie) si ha

$$I(f,Z) = I(g,Z), \qquad I\big(f|_{V_i},Z\big) = I\big(g|_{V_i},Z\big) \ (i=1,2);$$

inoltre per la proposizione di stabilità delle soluzioni 2.3.4 e l'equazione (2.3.5) si ha

$$g|_{V_i}^{-1}(Z) \subseteq U_i \quad (i=1,2).$$

Siccome g è C^∞ e trasversale a Z, dalla definizione 2.2.3, si ha

$$I\big(g|_{U_i},Z\big) = I\big(g|_{V_i},Z\big) \quad (i=1,2),$$

da cui

$$I(g,Z) = I\big(g|_{V_1},Z\big) + I\big(g|_{V_2},Z\big).$$

La tesi segue immediatamente. □

Dalla definizione 2.3.7 e dalla proposizione di invarianza per omotopie 2.3.9 ricaviamo immediatamente un'altra importante proprietà dell'indice di intersezione.

Proposizione 2.3.11 (locale costanza). *Se due applicazioni continue, da N in M, sono sufficientemente vicine (nel senso del teorema di deformazione), allora hanno lo stesso indice di intersezione con la medesima sottovarietà chiusa di M.*

Possiamo utilizzare l'indice di intersezione per definire un altro concetto interessante: *l'indice di coincidenza.*

Definizione 2.3.12. Consideriamo due funzioni f_1 e f_2 in $C^0(N,M)$ con N un aperto di una varietà orientata M. Sia $G(x) = \big(f_1(x), f_2(x)\big)$. Definiamo l'indice di coincidenza di f_1 e f_2, in questo modo: $\mathfrak{C}(f_1,f_2) = I(G,\Delta)$, dove $\Delta = \big\{(x,y) \in M \times M : x = y\big\}$ si suppone ricevere l'orientazione da M mediante il diffeomorfismo naturale $x \mapsto (x,x)$.

Una classe molto importante di applicazioni di questo tipo è quella dei *grafici*, cioè, se f è un'applicazione, il grafico $G[f]$ è definito da $x \mapsto \big(x, f(x)\big)$. Nel seguito, parlando di indice di punto fisso, utilizzeremo spesso i grafici; **infatti l'insieme $G[f]^{-1}(\Delta)$ risulta composto dai punti fissi di f**.

Capitolo 3

La Teoria dell'indice di punto fisso con i metodi della topologia differenziale

3.1 L'indice di punto fisso

Nel capitolo precedente abbiamo visto le definizioni ed i principali teoremi della teoria dell'indice di intersezione. In questo svilupperemo le tecniche ed i risultati ottenuti per giungere alla definizione di indice di punto fisso, per varietà C^∞ anche non orientabili, ed applicazioni continue.

Come avevamo preannunciato faremo uso del grafico di un'applicazione, perchè questo artificio ci permetterà di utilizzare direttamente alcuni dei risultati del capitolo precedente. Nel seguito considereremo, ove non specificato diversamente, M una varietà differenziabile con $\partial M = \emptyset$ ed N un suo aperto.

Definizione 3.1.1. : Sia $f : N \to M$, f è detta *ammissibile per la teoria dell'indice*, o più brevemente *ammissibile*, se $T_f = \{x \in N : f(x) = x\}$ è compatto in N. Un'omotopia $H : N \times [0,1] \to M$ sarà detta ammissibile, se l'insieme

$$\{x \in N : H(x,t) = x \text{ per qualche } t \in [0,1]\}$$

è compatto. Nel seguito, se f e g sono due applicazioni ammissibilmente omotope, scriveremo per brevità, $f \simeq g$.

Osserviamo che la relazione di omotopia ammissibile è di equivalenza.

Ricordiamo che se $f : N \to M$ è un'applicazione, con il simbolo $G[f]$ abbiamo indicato il grafico di f, cioè l'applicazione $G[f] : N \to M \times M$ definita da $x \mapsto (x, f(x))$. Nel paragrafo 2.2 abbiamo dato la nozione di applicazione Z-ammissibile. Osserviamo che una $f : N \to M$ è ammissibile se e soltanto se il suo grafico $G[f] : N \to M \times M$ è Δ-ammissibile.

Sia M una varietà differenziabile ed N un suo aperto, sia data $f \in C^\infty(N, M)$ ammissibile, tale che $G[f] \pitchfork \Delta$. Osserviamo che la condizione di trasversalità e la scelta delle dimensioni implicano che $T = G[f]^{-1}(\Delta)$ è un insieme discreto. Dunque, per l'ammissibilità di f, è un insieme finito; inoltre, si ha che $\forall x \in T$ l'endomorfismo $(\mathrm{Id}_x - d_x f) : T_x M \to T_x M$ è non singolare. Infatti la condizione $G[f] \pitchfork \Delta$ ci dice che, per $x \in T$, possiamo scrivere:

$$d_x G[f]\big(T_x M\big) \oplus T_{(x,x)}\Delta = T_{(x,x)}(M \times M).$$

Se $\{v_1, \dots, v_m\}$ è una base di $T_x M$, gli insiemi:

$$A = \{(v_1, 0), \dots, (v_m, 0), (0, v_1), \dots, (0, v_m)\}, \tag{3.1.1}$$

$$B = \{\big(v_1, d_x f(v_1)\big), \dots, \big(v_m, d_x f(v_m)\big), (v_1, v_1), \dots, (v_m, v_m)\}, \tag{3.1.2}$$

costituiscono due basi di $T_{(x,x)}(M \times M)$. La matrice del cambiamento di base da A a B, scritta a blocchi, è la seguente:

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{Id}_x & d_x f \\ \hline \mathrm{Id}_x & \mathrm{Id}_x \end{array}\right)$$

dove con Id_x indichiamo l'identità di $T_x M$.

Osserviamo che

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Id}_x & d_x f \\ \mathrm{Id}_x & \mathrm{Id}_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_x & d_x f \\ 0 & \mathrm{Id}_x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_x - d_x f & 0 \\ \mathrm{Id}_x & \mathrm{Id}_x \end{pmatrix}$$

dunque

$$0 \neq \det \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_x & d_x f \\ \mathrm{Id}_x & \mathrm{Id}_x \end{pmatrix} = \det\big(\mathrm{Id}_x - d_x f\big). \tag{3.1.3}$$

Notiamo che percorrendo al contrario i passi compiuti, si prova che

$$\det\big(\mathrm{Id}_x - d_x f\big) \neq 0 \quad \forall x \in G[f]^{-1}(\Delta),$$

implica $G[f] \pitchfork \Delta$.

Definizione 3.1.2. Sia $T = \{x_1, \dots, x_n\}$, poniamo

$$\mathfrak{I}(f) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sign}\big(\det(\mathrm{Id}_{x_i} - d_{x_i} f)\big),$$

$\mathfrak{I}(f)$ si chiama *indice di punto fisso di f*.

Osservazione 3.1.3. Notiamo che l'equazione (3.1.3) implica che se V_1 e V_2 sono aperti disgiunti di M contenuti in N, tali che $G[f]^{-1}(\Delta) \subseteq V_1 \cup V_2$, si ha

$$\mathfrak{I}(f) = \mathfrak{I}(f|_{V_1}) + \mathfrak{I}(f|_{V_2}).$$

La definizione 3.1.2 può essere data anche in termini di indice di intersezione, utilizzando solamente le orientazioni locali della varietà M. Prendiamo in considerazione un'applicazione ammissibile $f : N \to M$ di classe C^∞ tale che $G[f]$ sia trasversale alla diagonale Δ di $M \times M$. In questo caso l'insieme $T = G[f]^{-1}(\Delta)$ è una varietà 0-dimensionale compatta, pertanto è costituita da un numero finito di punti $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Osserviamo che se x_i appartiene a T si ha $G[f](x_i) = (x_i, x_i)$. Dal momento che tutte le varietà differenziabili sono localmente orientabili, per ogni $x_i \in T$ posso considerare un intorno aperto U_i orientabile.

In questo modo $\hat{U}_i = U_i \times U_i$ è un intorno orientabile di $G[f](x_i)$. Eventualmente rimpicciolendo gli U_i, possiamo fare in modo che $U_i \cap U_j = \emptyset$ se $i \neq j$. Per la continuità di f, possiamo trovare un intorno $V_i \subseteq U_i$ di x_i tale che $f(V_i) \subseteq U_i$; otteniamo che $G[f](V_i) \subseteq \hat{U}_i$. Poniamo $\Delta_i = \hat{U}_i \cap \Delta$, e consideriamo il diffeomorfismo $\phi_i : U_i \to \Delta_i$ dato da $x \mapsto (x, x)$. Supponiamo adesso di orientare (arbitrariamente) i V_i; così facendo assegnamo un'orientazione anche agli U_i, agli $\hat{U}_i$ e, mediante ϕ_i, anche a Δ_i.

Si ha $G[f]|_{V_i} : V_i \to U_i \times U_i$; inoltre, siccome Δ_i è la diagonale di $U_i \times U_i$ essa ne risulta una sottovarietà chiusa. Siamo dunque nelle ipotesi della definizione 2.2.3, pertanto ha senso scrivere $I\big(G[f]|_{V_i}, \Delta_i\big)$.

Osservazione 3.1.4. Nelle ipotesi precedenti otteniamo:

$$\mathfrak{I}(f) = \sum_{i=1}^{n} I\big(G[f]|_{V_i}, \Delta_i\big).$$

Osservazione 3.1.5. Notiamo che $\mathfrak{I}(f)$ coincide con $I\big(G[f], \Delta\big) = \mathfrak{C}\big(G[f]\big)$ nel caso che M sia orientata ed N sia un suo aperto.

Osservazione 3.1.6. $I\big(G[f|_{V_i}], \Delta_i\big)$ non dipende dalle particolari orientazioni scelte per i V_i, infatti invertendo l'orientazione di un V_i non cambia quella di U_i, ma cambia quella di Δ_i. In tale modo, per l'osservazione 2.2.2, non cambia il valore di $I\big(G[f]|_{V_i}, \Delta_i\big)$.

Ci proponiamo di estendere la definizione 3.1.2 a funzioni non trasversali alla diagonale. Per fare ciò abbiamo bisogno di alcuni risultati. Cominciamo con una conseguenza del teorema di approssimazione con applicazioni trasversali 2.2.9.

Teorema 3.1.7. *Siano M ed S varietà differenziabili, di cui M priva di bordo, e sia Z una sottovarietà chiusa, con $\partial Z = \emptyset$, di $S \times M$. Consideriamo un'applicazione C^∞, $f : S \to M$, tale che $G[f]^{-1}(Z)$ sia compatto e $G[f]|_{\partial S}$ sia trasversale a Z. Assegnata una funzione continua $\lambda : S \to (0, +\infty)$, esiste un'applicazione C^∞, $g : S \to M$, coincidente con f sul bordo di S, tale che $G[g] \pitchfork Z$ e $\|f(x) - g(x)\| < \lambda(x)$ $\forall x \in S$. Inoltre esiste un'omotopia h tra f e g tale che l'insieme*

$$\big\{x \in S : \big(x, h(x,t)\big) \in Z,\ \text{per qualche } t \in [0,1]\big\}$$

è compatto.

Dimostrazione. Usiamo le notazioni del teorema 2.2.9. è sufficiente prendere $\hat{N} = N = S$ e porre $\phi : \hat{N} \to N$ l'identità. Osserviamo che in queste ipotesi abbiamo $\Gamma[f] \equiv G[f]$ e $\Gamma[g] \equiv G[g]$. La tesi è una riformulazione in questi termini del teorema 2.2.9. □

Osserviamo che se f e g sono applicazioni da N in M, omotope in modo ammissibile; allora $G[f]$ e $G[g]$ sono omotope in modo ammissibile relativamente a Δ. Inoltre se f e g sono omotope C^∞ allora lo sono $G[f]$ e $G[g]$. Infatti se $H : N \times [0,1] \to M$ è un'omotopia ammissibile tra f e g, consideriamo $\Gamma[H] : N \times [0,1] \to M \times M$ definita da $(x,t) \mapsto \big(x, H(x,t)\big)$. $\Gamma[H]$ è proprio l'omotopia cercata: se H è C^∞ allora $\Gamma[H]$ lo è, inoltre $\Gamma[H]$ è ammissibile. Infatti l'insieme $\Gamma_1 = \{x \in N : H(x,t) = x, t \in [0,1]\}$ coincide con $\Gamma_2 = \{x \in N : \Gamma[H](x,t) \in \Delta, t \in [0,1]\}$, e per l'ammissibilità di H, si ha che $\Gamma_2 = \Gamma_1$ è compatto.

Definizione 3.1.8. Data $f \in C^\infty(N,M)$ ammissibile, il teorema 3.1.7 ci garantisce che esiste una g di classe C^∞, ammissibilmente omotopa ad f, tale che $G[g] \pitchfork \Delta$. Porremo

$$\mathfrak{I}(f) = \mathfrak{I}(g).$$

Perché questa definizione abbia senso, è necessario provare che $\mathfrak{I}(f)$ è indipendente dalla scelta dell'applicazione g. Per fare ciò, dimostreremo che (teorema 3.1.19), se g_1 e g_2 sono due applicazioni C^∞, ammissibilmente omotope (con omotopia C^∞), tali che $G[g_1]$ e $G[g_2]$ sono trasversali alla diagonale di $M \times M$, allora $\mathfrak{I}(g_1) = \mathfrak{I}(g_2)$.

Prima della dimostrazione sono necessari alcuni risultati sulle orientazioni.

Lemma 3.1.9. *Sia M una varietà m-dimensionale, Δ la diagonale di $M \times M$. Esiste un intorno aperto W di Δ tale che W è una sottovarietà orientabile di $M \times M$.*

Dimostrazione. Osserviamo che se M è orientabile non c'è niente da dimostrare. Risulta interessante solamente il caso contrario. Sia $\big\{(U_i, \phi_i)\big\}_i \in \Lambda$ un atlante di carte di M; senza perdere in generalità si può supporre $\phi_i(U_i) = \mathbb{R}^m$. Con il simbolo $\phi_i \times \phi_i$ indichiamo l'applicazione da $U_i \times U_i = W_i$ in $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ definita da $(x,y) \mapsto \big(\phi_i(x), \phi_i(y)\big)$. Poniamo $W = \bigcup_{i \in \Lambda} W_i$.

Per provare che W è una varietà orientabile troviamo un suo atlante orientato.

L'insieme $\Gamma = \big\{(W_i, \phi_i \times \phi_i)\big\}_i \in \Lambda$ è un atlante C^∞ di W. Inoltre abbiamo che

$$d_{(x,y)}\big(\phi_i \times \phi_i\big)(u_1, u_2) = \big(d_x\phi_i(u_1), d_y\phi_i(u_2)\big),$$

per ogni (u_1, u_2) in $T_{(x,y)}W$. Preso $(a,b) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, si ha

$$d_{(a,b)}\Big((\phi_i \times \phi_i) \circ (\phi_j \times \phi_j)^{-1}\Big)(v_1, v_2) = \Big(d_a\phi_i \circ \phi_j^{-1}(v_1)\,,\, d_b\phi_i \circ \phi_j^{-1}(v_2)\Big),$$

per ogni coppia di vettori (v_1, v_2) appartenenti ad $\mathbb{R}^m$.

Poniamo $d_a(\phi_i \circ \phi_j^{-1}) = A$ e $d_b(\phi_i \circ \phi_j^{-1}) = B$. Osserviamo che il segno di $\det(A)$ è uguale a quello di $\det(B)$ perché $\phi_i \circ \phi_j^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ è un diffeomorfismo. Possiamo scrivere

$$d_{(a,b)}\Big((\phi_i \times \phi_i) \circ (\phi_j \times \phi_j)^{-1}\Big) \equiv \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$$

per cui si ha

$$\det\Big(d_{(a,b)}\big((\phi_i \times \phi_i) \circ (\phi_j \times \phi_j)^{-1}\big)\Big) = \det(A)\ \det(B) > 0.$$

Da cui segue che Γ è un atlante orientato. □

Prima di procedere è necessario approfondire il concetto di orientazione. Sia M una varietà differenziabile, anche non orientabile, definiamo uno spazio topologico $\hat{M}$, di rivestimento per M, che sarà detto sdoppiamento di M.

Definizione 3.1.10. Sia M una varietà differenziabile. Consideriamo l'insieme

$$\hat{M} = \big\{(x, b_x) : x \in M,\ b_x \text{ è una orientazione per } T_xM\big\}$$

$\hat{M}$ sarà detto *sdoppiamento* di M.

Consideriamo l'applicazione $p : \hat{M} \to M$, definita da $(x, b_x) \mapsto x$. Vogliamo definire una topologia su $\hat{M}$, in modo tale che esso risulti un rivestimento di M, con proiezione p. Sia $\{\phi_i\}_{i \in J}$ l'insieme di tutte le possibili parametrizzazioni $\phi_i : U_i \to M$ della varietà n-dimensionale M, dove U_i è un aperto di $\mathbb{R}^n$. Definiamo $\hat{\phi}_i : U_i \to \hat{M}$ nel modo seguente

$$\hat{\phi}_i(u) = \big(\phi_i(u), [d_u\phi_i(B)]\big),$$

dove $u \in U_i$, B è la base standard di $\mathbb{R}^n$, e le parentesi quadre indicano la classe di equivalenza rispetto alla relazione della definizione 2.1.19.

Definizione 3.1.11. Diremo che un sottoinsieme V di $\hat{M}$ è aperto se $\hat{\phi}_i^{-1}(V)$ è aperto in U_i per ogni $i \in J$.

Si osserva immediatamente che quella della definizione 3.1.11 è proprio una topologia. Inoltre, un sistema fondamentale di intorni $B_x(\hat{M})$ per ogni punto x di $\hat{M}$ può essere ottenuto come segue: Un insieme $W \subseteq \hat{M}$ appartiene a $B_x(\hat{M})$ se sono verificate le seguenti condizioni:

1) $p(W)$ è un intorno orientabile, connesso, di $p(x)$.

2) Per ogni coppia di punti (y, b_y) e (z, b_z) di W si ha che b_y e b_z definiscono la stessa orientazione di $U = p(W)$.

Osserviamo che, con queste definizioni, l'applicazione p risulta una proiezione di rivestimento.

I seguenti fatti sono conseguenze immediate delle definizioni.

1) Se M è orientabile, orientarla significa scegliere un foglio globale del rivestimento $\hat{M}$ per ogni sua componente connessa.

2) Se M è una varietà orientabile ed n è il numero delle sue componenti connesse, allora $\hat{M}$ ne ha $2n$.

Può essere utile rivedere il concetto orientazione di una varietà utilizzando gli sdoppiamenti. Ricordiamo che, se X ed Y sono due spazi topologici, ed $f : X \to Y$ è un'applicazione continua, si dice sezione di f, un'applicazione continua $g : Y \to X$ tale che $f \circ g$ è l'identità su Y. (vedi [30])

Notiamo che M è orientabile se e soltanto se è possibile scegliere una sezione $f : M \to \hat{M}$, della proiezione di rivestimento $p : \hat{M} \to M$. *Orientare una varietà M significa quindi scegliere una sezione di p.*

Sia M una varietà con bordo, poniamo $\partial M = N$. Per ogni punto $x \in N$, esiste un vettore $e_x \in T_xM$ *esterno* ad M (vedi definizione 2.1.28). Notiamo che, se b_x è una base per T_xN, allora $\{e_x, b_x\}$ lo è per T_xM.

Consideriamo l'applicazione $\psi : \hat{N} \to \psi(\hat{N}) \subseteq \hat{M}$ con $\big(x, [b_x]\big) \mapsto \big(x, [e_x, b_x]\big)$. Poniamo per comodità $\hat{M}_1 = \psi(\hat{N})$, e osserviamo che ψ è un omeomorfismo tra $\hat{N}$ ed $\hat{M}_1$. Sia $\pi : \hat{N} \to N$ la proiezione di rivestimento definita da $\big(y, [b_y]\big) \mapsto y$, con $y \in N$ e b_y una base di T_yN. Supponendo che $f : M \to \hat{M}$ sia una sezione di p (cioè un'orientazione di M), si ha che f determina un'orientazione di N; infatti l'applicazione $f_1 : N \to \hat{N}$ data da $f_1 \equiv \psi^{-1} \circ f|_N$ è una sezione di π.

Notiamo, che l'orientazione indotta in tal modo da f su N, coincide con l'orientazione bordo definita nel paragrafo 2.1; inoltre osserviamo che quest'orientazione non viene indotta in modo canonico su ∂M; infatti essa dipende dalla convenzione fatta, di scegliere il vettore e_x esterno ad M.

Il concetto di spazio di sdoppiamento di una varietà, ci permette di precisare cosa significa attribuire, in modo continuo, un'orientazione agli spazi tangenti ad una varietà, lungo una curva in essa contenuta.

Definizione 3.1.12. Consideriamo la varietà M, ed un suo sottospazio topologico $N \subseteq M$. Supponiamo che esista una funzione continua $\gamma : N \to \hat{M}$ tale che $p \circ \gamma$ sia l'identità su N. In tale caso diremo che la funzione γ attribuisce in modo continuo un'orientazione (relativa ad M) lungo N.

Spesso scriveremo che è determinata in modo continuo un'orientazione, relativa ad M, lungo un sottospazio N, quando è determinata una funzione $\gamma : N \to \hat{M}$ come sopra.

Più in generale data una funzione continua, $\sigma : N \to M$, tra due varietà. Diremo che un'applicazione continua $\hat{\sigma} : N \to \hat{M}$ è un'orientazione relativa ad M lungo σ se $p \circ \hat{\sigma} \equiv \sigma$. In altre parole, un'orientazione lungo σ non è altro che un risalimento di σ su $\hat{M}$.

Il seguente risultato afferma che è sempre possibile attribuire in modo continuo un'orientazione relativa ad una varietà lungo una curva.

Proposizione 3.1.13. *Sia $\sigma : [0,1] \to M$ una curva. Fissata un'orientazione*

$b_{\sigma(0)}$ di $T_{\sigma(0)}M$, esiste un'unica orientazione, relativa ad M, lungo σ, coerente con $b_{\sigma(0)}$.

Dimostrazione. Per i teoremi di esistenza e unicità del risalimento dei cammini (vedi per es. [15]) esiste un risalimento $\hat{\sigma} : [0,1] \to \hat{M}$ univocamente determinato da $\hat{\sigma}(0) = (a, b_a)$. □

Utilizziamo il concetto di spazio di sdoppiamento, per provare un risultato che sarà utile in seguito. Prima però vediamo un lemma topologico.

Lemma 3.1.14. *Consideriamo uno spazio topologico Y, ed uno metrico X. Sia $A \subseteq X$ un compatto ed $f : X \to Y$ un omeomorfismo locale tale che $f|_A$ sia iniettiva. Allora esiste un intorno U di A tale che $f|_U : U \to f(U)$ è un omeomorfismo.*

Dimostrazione. Poichè f è un'applicazione aperta, è sufficiente provare che esiste un intorno U tale che $f|_U$ sia iniettiva. Definiamo

$$U_n = \{x \in X : d(x, A) < 1/n\},$$

ricordiamo che $d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$.

Supponiamo per assurdo che non esista un intorno aperto U tale che $f|_U$ sia iniettiva. Per ogni intero n esistono due punti distinti di X, x_n ed y_n, tali che $f(x_n) = f(y_n)$. Per ogni x_n, possiamo scegliere un punto $\bar{x}_n \in A$, di minima distanza da x_n. Altrettanto possiamo fare per y_n. Siccome A è un compatto, possiamo estrarre due sottosuccessioni, $\bar{x}_i$ ed $\bar{y}_j$ che convergono rispettivamente ad $\bar{x}$ ed $\bar{y}$ su A. Evidentemente x_i ed y_j convergeranno anch'esse ad $\bar{x}$ ed $\bar{y}$. Per la continuità di f, abbiamo $f(\bar{x}) = f(\bar{y})$. Ci sono due possibilità

1) $\bar{x} \neq \bar{y}$. Che è assurdo in quanto $f|_A$ è iniettiva.

2) $\bar{x} = \bar{y}$. Siccome f è un diffeomorfismo locale, esiste un intorno V di $\bar{x}$ tale che $f|_V$ è iniettiva. D'altra parte le successioni x_i ed y_j devono essere definitivamente contenute in V; allora esistono x_N ed y_{N_1}, appartenenti a V. Per tali punti sappiamo che $f(x_N) = f(y_N)$. Assurdo.

□

Si ottiene immediatamente il seguente risultato.

Lemma 3.1.15. *Sia M una varietà m-dimensionale, e sia A una sua sottovarietà 1-dimensionale diffeomorfa a $[0,1]$. Esiste un suo intorno aperto, orientabile in M.*

Dimostrazione. $\hat{M}$ è metrizzabile (vedi [29, pag. 125]). Siccome A è diffeomorfa a $[0,1]$, possiamo considerare una sua parametrizzazione $\sigma : [0,1] \to M$. Se $\hat{\sigma}$ è un risalimento di σ su $\hat{M}$, osserviamo che $K = \hat{\sigma}\big([0,1]\big)$ è compatto, che $p|_K$ è iniettiva, e che p, in quanto proiezione di rivestimento è un omeomorfismo locale. La tesi segue immediatamente dal lemma precedente. □

Da ora in avanti un intorno come nel lemma precedente sarà detto una *striscia di A*. Nel seguito, saranno utili le seguenti definizioni.

Definizione 3.1.16. Sia M una varietà differenziabile orientabile, N una sottovarietà in essa contenuta, e sia x un punto di N. Un sottospazio vettoriale V di T_xM, è detto *strettamente trasverso* ad N in x, se

$$V \oplus T_xN = T_xM. \tag{3.1.4}$$

Osserviamo che uno spazio strettamente trasverso ad una sottovarietà in un punto è canonicamente isomorfo al quoziente ${}^{T_xM}\!/_{T_xN}$. Questo fatto ci permette di identificare una coorientazione di N in x, ossia una orientazione di ${}^{T_xM}\!/_{T_xN}$, con un'orientazione di un qualunque spazio strettamente trasverso.

Definizione 3.1.17. Analogamente a quello che abbiamo fatto per definire lo sdoppiamento di una varietà, costruiamo il seguente insieme

$$\tilde{N} = \big\{(x, o_x) \text{ dove } x \in N \text{ e } o_x \text{ è una coorientazione di } N \text{ in } a\big\}.$$

$\tilde{N}$ sarà detto *cosdoppiamento* di N.

Consideriamo l'applicazione $q : \tilde{N} \to N$ data da $(x, o_x) \mapsto x$. Vogliamo definire una topologia su $\tilde{N}$ in modo tale che esso risulti un rivestimento di N con proiezione q. Sia M una varietà m-dimensionale ed N una sua sottovarietà n-dimensionale; sia x un punto di N ed U un intorno aperto in M di x. Diremo che un'applicazione differenziabile $\psi : U \to \mathbb{R}^{m-n}$ è una *cocarta* (intorno ad x) se $\psi^{-1}(0) = N \cap U$ e $\ker d_x\psi = T_xN$. L'omomorfismo $d_x\psi : T_xM \to \mathbb{R}^{m-n}$ induce in modo naturale un isomorfismo $\overline{d_x\psi} : {}^{T_xM}\!/_{T_xN} \to \mathbb{R}^{m-n}$.

Osserviamo che per la proposizione 2.1.31, si ha che, per ogni punto $x \in N$, esiste una cocarta intorno ad x.

Sia $\{\psi_j\}_{j\in J}$ l'insieme di tutte le possibili cocarte $\psi_j : U_j \to \mathbb{R}^{m-n}$, di N. Definiamo la famiglia di applicazioni $\tilde{\psi}_j : U_j \cap N \to \tilde{N}$, date da $x \mapsto \big(x, [\overline{d_x\psi_j}^{-1}(B)]\big)$, dove le parentesi quadre indicano una classe di equivalenza rispetto alla relazione della definizione 2.1.19, e B è la base standard di $\mathbb{R}^{m-n}$.

Definizione 3.1.18. Diremo che un sottoinsieme $V \subseteq \tilde{N}$ è aperto se $\tilde{\psi}_j^{-1}(V)$ è aperto per ogni $j \in J$.

Possiamo dare una base per questa topologia su $\tilde{N}$ prendendo tutte le possibili immagini delle $\tilde{\psi}_j$ con $j \in J$.

Osserviamo che con questa definizione, l'applicazione q risulta continua e, anzi, $\tilde{N}$ risulta un rivestimento di N con proiezione q.

In modo del tutto analogo a quanto fatto sopra, chiameremo una coorientazione di una sottovarietà N di M, un'applicazione continua $\gamma : N \to \tilde{N}$ tale che $q \circ \gamma$ sia l'identità su N.

Teorema 3.1.19 (invarianza per omotopie C^∞). *Siano f e g in $C^\infty(N, M)$ ammissibilmente omotope, con omotopia C^∞, tali che $G[f]$ e $G[g]$ siano trasversali alla diagonale di $M \times M$. Si ha $\Im(f) = \Im(g)$.*

Dimostrazione. Indichiamo con I l'intervallo chiuso $[0, 1]$. Sia $h : N \times I \to M$ un'omotopia C^∞ ammissibile tale che $h(\cdot, 0) \equiv f$ e $h(\cdot, 1) \equiv g$. Applicando il teorema di approssimazione mediante applicazioni trasversali 2.2.9, senza perdere in generalità, possiamo supporre che l'applicazione $H : N \times I \to M \times M$, definita da $(x, t) \mapsto \big(x, h(x, t)\big)$, sia trasversale a Δ.

Per la trasversalità, l'ammissibilità di h e per la scelta delle dimensioni, abbiamo che $H^{-1}(\Delta)$ è una varietà 1-dimensionale compatta. Il teorema di classificazione (vedi [35]) ci dice che le componenti connesse di tali varietà possono essere soltanto di due tipi: diffeomorfe alla sfera unitaria 1-dimensionale S^1 , oppure all'intervallo chiuso $[0, 1]$ (archi).

Notiamo che le componenti connesse di $H^{-1}(\Delta)$ sono un numero finito, per la compattezza e la locale connessione di $H^{-1}(\Delta)$.

Per la proposizione 2.1.37, si ha

$$\partial H^{-1}(\Delta) = H^{-1}(\Delta) \cap \partial(N \times I).$$

Sia A un arco di $H^{-1}(\Delta)$ con $\partial A = \{a\} \cup \{b\}$, e sia S una sua striscia. Otteniamo che a e b appartengono al bordo di $N \times I$, in altre parole, sono punti di $N \times \{0\}$ o di $N \times \{1\}$.

Gli archi possono essere distinti in due categorie a seconda di dove si trovano i loro estremi.

1) Quelli per cui a e b sono su lati opposti (uno in $N \times \{0\}$ e uno in $N \times \{1\}$)

2) Quelli i cui estremi sono entrambi su $N \times \{0\}$ o su $N \times \{1\}$.

Siano U_a e U_b intorni aperti, orientabili, di a e b in $\partial\big(N \times I\big)$. Per la continuità di $H|_{\partial N}$ possiamo trovare $V_a \subseteq U_a$ e $V_b \subseteq U_b$ intorni connessi, orientabili rispettivamente di a e b tali che

$$H(V_a) \subseteq U_a \times U_a \quad \text{e} \quad H(V_b) \subseteq U_b \times U_b.$$

Senza perdere in generalità possiamo supporre che $V_a \cup V_b$ sia il bordo della striscia S.

Chiamiamo Δ_a e Δ_b rispettivamente le diagonali di $U_a \times U_a$ e di $U_b \times U_b$, e W un intorno orientabile di Δ in $M \times M$.

Attribuiamo un'orientazione alla striscia S. Questa ne induce una nella componente connessa di W contenente $H(a) \in \Delta$, una in V_a e una in V_b, entrambe come bordo. Siccome A è un arco, possiamo trovarne una parametrizzazione $\sigma : I \to N \times I$ tale che $\sigma(0) = a$, poniamo

$$\sigma(s) = \big(\xi(s), \tau(s)\big) \quad \forall s \in [0,1].$$

Definiamo l'applicazione $\sigma_1 : I \to \Delta$ data da $s \mapsto H\big(\sigma(s)\big) = \big(\xi(s), \xi(s)\big)$.

L'orientazione bordo di V_a induce, tramite il diffeomorfismo da M in Δ, dato da $x \mapsto (x,x)$, un'orientazione per $T_{\sigma_1(0)}\Delta$. Per la proposizione 3.1.13, risulta determinata un'orientazione, relativa a Δ lungo σ_1, che sarà detta *orientazione geometrica*. Questa, tramite il diffeomorfismo sopra citato, induce un'orientazione relativamente ad N lungo ξ che, per semplicità, chiameremo ancora geometrica.

Vogliamo provare che negli archi del primo tipo T_bN ha orientazione geometrica opposta a quella bordo di S.

Se $(x,t) \in S$, osserviamo che $T_{(x,t)}S$ è canonicamente isomorfo a $T_xN \times T_tI$. Supponendo I dotato dell'orientazione standard, questo isomorfismo determina in modo continuo un'orientazione per T_xN, come applicazione da S in $\hat{N}$ (lo sdoppiamento di N).

Osserviamo che per gli archi del primo tipo, questa è da un lato coincidente e dall'altro opposta a quella bordo, mentre in quelli del secondo, è sempre concorde o sempre opposta. Questo dipende dal fatto che il vettore della base canonica di I è, nel primo caso, una volta interno ed una volta esterno ad S; mentre nel secondo, è sempre interno o sempre esterno.

Per la continuità, inoltre, si ha che quest'ultima orientazione coincide oppure è sempre opposta a quella geometrica; da cui la tesi.

Ricordiamo che un sottospazio vettoriale V di $T_{(x,t)}S$, è detto strettamente trasverso ad A in $(x,t) \in S$, se soddisfa

$$V \oplus T_{(x,t)}A = T_{(x,t)}S. \tag{3.1.5}$$

Notiamo che T_aN e T_bN sono esempi di spazi strettamente trasversi ad A rispettivamente in a ed in b.

La parametrizzazione σ dell'arco A stabilisce in modo continuo una sua orientazione, dunque, dal momento che la striscia S è orientata, l'equazione (3.1.5) determina una coorientazione dell'arco A. In altre parole, è stabilita un'orientazione per ogni spazio trasverso ad A. Essa sarà detta *coorientazione di trasporto*.

Si osservi che, di qualunque tipo sia l'arco A, se la coorientazione di trasporto di uno spazio trasverso in un estremo coincide con quella bordo, allora è opposta nell'altro. Si ottiene che per gli archi del primo tipo la coorientazione di trasporto di T_aN coincide od è opposta all'orientazione geometrica, a seconda che quella di T_bN lo sia. Negli archi dell'altro tipo abbiamo che tale relazione è invertita.

Per la trasversalità e per la scelta delle dimensioni, se V è un sottospazio di $T_{\sigma(t)}S$ strettamente trasverso all'arco A, abbiamo

$$d_{\sigma(t)}H\big(T_{\sigma(t)}A\big) \subseteq T_{\sigma_1(t)}\Delta,$$

dunque

$$d_{\sigma(t)}H\big(V\big) \oplus T_{\sigma_1}(t)\Delta = T_{\sigma_1(t)}W = T_{\sigma_1(t)}\big(M \times M\big). \tag{3.1.6}$$

Ricordiamo che W è un intorno orientabile di Δ in $M \times M$.

Se V ha l'orientazione di trasporto e $T_{\sigma_1(t)}W$ ha quella precedentemente fissata, l'equazione (3.1.6) stabilisce un'orientazione relativa a Δ lungo σ_1; che, per la continuità, o coincide o è sempre opposta a quella geometrica.

Per quanto visto finora, si ha che se A è del primo tipo, le orientazioni indotte da $T_a\Delta$ e $T_b\Delta$ rispettivamente su T_aN e T_bN, mediante il diffeomorfismo $x \mapsto (x, x)$ coincidono entrambi con quella di trasporto. Se, invece, A è del secondo, esse sono una concorde ed una opposta.

Per l'osservazione 3.1.4 abbiamo:

1) Se A è del primo tipo $\mathfrak{I}\big(H|_{V_a}\big) = \mathfrak{I}\big(H|_{V_b}\big)$.

2) Se A è del secondo tipo $\mathfrak{I}\big(H|_{V_a}\big) = -\mathfrak{I}\big(H|_{V_b}\big)$.

Ne segue che soltanto gli archi del primo tipo danno contributo nel calcolo di $\mathfrak{I}$; quindi otteniamo

$$\mathfrak{I}\big(H|_{N\times\{0\}}\big) = \mathfrak{I}\big(H|_{N\times\{1\}}\big).$$

$\square$

Il teorema 3.1.19, appena dimostrato, permette di giustificare la definizione 3.1.8, garantendone l'indipendenza dalla funzione approssimante scelta.

Vogliamo adesso estendere il concetto di indice di punto fisso alle applicazioni continue. Per questo scopo utilizzeremo i teoremi di approssimazione del paragrafo 2.3.

Cominciamo con alcune osservazioni sulle norme. Sia N un aperto della varietà differenziabile M; consideriamo M immersa in $\mathbb{R}^k$ e $M \times M$ in $\mathbb{R}^{2k}$. Indicheremo con $\|\cdot\|_k$ e $\|\cdot\|_{2k}$ le rispettive norme; abbiamo che, se $(x, y) \in M \times M$, allora

$$\|(x, y)\|_{2k} = \sqrt{\|x\|_k^2 + \|y\|_k^2}.$$

Date due applicazioni, f e g, da N in M, si ha che se $G[f] : N \to M$ e $G[g] : N \to M$ sono le rispettive applicazioni grafico; allora

$$\begin{aligned} \|G[f](x) - G[g](x)\|_{2k} &= \big\|\big(x, f(x)\big) - \big(x, g(x)\big)\big\|_{2k} \\ &= \sqrt{\|x - x\|_k^2 + \|f(x) - g(x)\|_k^2} \\ &= \|f(x) - g(x)\|_k. \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

Dal teorema 2.3.3 di approssimazione sulle variet; tenendo presente la (3.1.7), abbiamo subito che, data un'applicazione continua f da N in M, e fissata una funzione continua $\tau : N \to (0, +\infty)$, esiste una $g : N \to M$ di classe C^∞, tale che $\|G[f](x) - G[g](x)\| < \tau(x)$ per ogni x appartenente ad N.

Osservazione 3.1.20. Data $f : N \to M$, dalla proposizione 2.3.4 di stabilità delle soluzioni, usando la (3.1.7), otteniamo che, fissato un intorno aperto U di $G[f]^{-1}(\Delta)$, comunque scelta $g : N \to M$ soddisfacente $\|g(x) - f(x)\| < d\big(G[f](x), \Delta\big)$ $\forall x \in N \setminus U$, si ha $G[g]^{-1}(\Delta) \subseteq U$.

Usando ancora la (3.1.7) e il teorema di deformazione 2.3.6, abbiamo:

Proposizione 3.1.21. *Consideriamo due applicazioni ammissibili f e g, da N in M. Fissato un intorno relativamente compatto U di $G[f]^{-1}(\Delta)$, sia ε la funzione del teorema degli ε-intorni relativa ad $M \times M$. Se f e g soddisfano le seguenti condizioni*

1) $\|f(x) - g(x)\| < d\big(G[f](x), \Delta\big)$ $\forall x \in N \setminus U$,

2) $\|f(x) - g(x)\| < \varepsilon\big(G[f](x)\big)$ $\forall x \in N$,

allora esiste un'omotopia ammissibile $H : N \times [0,1] \to M$ (di classe C^∞ se f e g lo sono), tale che $H(\cdot, 0) \equiv f$ ed $H(\cdot, 1) \equiv g$.

Finalmente abbiamo tutti gli elementi necessari per definire l'indice di punto fisso per le applicazioni soltanto continue.

Definizione 3.1.22. Consideriamo un'applicazione ammissibile $f \in C^0(N, M)$, con N aperto della varietà senza bordo M. Fissiamo un intorno relativamente compatto U di $G[f]^{-1}(\Delta)$. Possiamo trovare (procedendo, per esempio, come nell'osservazione 2.3.5 una funzione continua $\tau_f : N \to (0, +\infty)$, tale che

1) $\tau_f(x) < d\big(G[f](x), \Delta\big)$ in $N \setminus U$.

2) $\tau_f(x) < \varepsilon\big(G[f](x)\big)$ in tutto N (ε indica la funzione del teorema degli ε-intorni relativa ad $M \times M$).

Scegliamo un'applicazione $g \in C^\infty(N, M)$ tale che $\|g(x) - f(x)\| < {}^{\tau_f(x)}\!/_2$ per ogni $x \in N$, poniamo $\mathfrak{I}(f) = \mathfrak{I}(g)$.

Per vedere che questa è una buona definizione bisogna osservare che $\mathfrak{I}(f)$ non dipende dalla scelta della funzione approssimante g e dell'intorno U.

Se U ed $\hat{U}$ sono due intorni, relativamente compatti, di $G[f]^{-1}(\Delta)$ e g e $\hat{g}$ sono funzioni approssimanti scelte come nella definizione 3.1.22, relativamente ad U e ad $\hat{U}$, abbiamo che $\|g(x) - f(x)\|$ e $\|\hat{g}(x) - f(x)\|$ sono minori di ${}^1\!/_2 d\big(G[f](x), \Delta\big)$ fuori di $U \cup \hat{U}$, e sono minori di ${}^1\!/_2 \varepsilon\big(G[f](x)\big)$ su tutto N. Ne segue che

$$\|g(x) - \hat{g}(x)\| < d\big(G[f](x), \Delta\big) \quad \text{fuori di } U \cup \hat{U}$$

inoltre,

$$\|g(x) - \hat{g}(x)\| < \varepsilon\big(G[f](x)\big) \quad \text{su } N.$$

Applicando la proposizione 3.1.21, $g(x)$ e $\hat{g}(x)$ sono omotope in modo ammissibile e dunque $\mathfrak{I}(g) = \mathfrak{I}(\hat{g})$.

Avevamo provato l'invarianza dell'indice per omotopie ammissibili e di classe C^∞. Vogliamo rimuovere quest'ultima ipotesi.

Proposizione 3.1.23 (proprietà di invarianza per omotopie continue). *Se f e g sono applicazioni continue da N in M, ammissibilmente omotope, allora $\mathfrak{I}(f) = \mathfrak{I}(g)$.*

Dimostrazione. Sia h un'omotopia ammissibile tra f e g. Definiamo l'applicazione $\Gamma[h] : N \times [0,1] \to M \times M$ data da $(x,t) \mapsto \big(x, h(x,t)\big)$. Fissiamo un intorno U di $\Gamma[h]^{-1}(\Delta)$. Esiste una funzione continua $\zeta : N \times [0,1] \to (0, +\infty)$ tale che

1) $\zeta(x,t) < d\big(\Gamma[h](x,t), \Delta\big)$ fuori di U.

2) $\zeta(x,t) < \varepsilon\big(\Gamma[h](x,t)\big)$ in $N \times [0,1]$ (ε è la funzione del teorema degli ε-intorni relativa ad $M \times M$).

Poniamo $U_0 = U \cap N \times \{0\}$ e $U_1 = U \cap N \times \{1\}$, osserviamo che U_0 e U_1 sono aperti rispettivamente di $N \times \{0\}$ e di $N \times \{1\}$. Per il lemma 2.3.8, possiamo trovare un'omotopia ammissibile, di classe C^∞, $h_1 : N \times [0,1] \to M$ tale che

$$\|h(x,t) - h_1(x,t)\| < \frac{1}{2}\zeta(x,t) \quad \forall (x,t) \in N \times [0,1].$$

Notiamo che, per la (3.1.4), per ogni $x \in N$, possiamo scrivere

$$\|G[h_1(\cdot,0)](x) - G[f](x)\| = \|h_1(x,0) - f(x)\| < \frac{1}{2}\zeta(x,0)$$

e

$$\|G[h_1(\cdot,1)](x) - G[g](x)\| = \|h_1(x,1) - g(x)\| < \frac{1}{2}\zeta(x,1).$$

Si ha, cioè, che $\zeta(x,0)$ e $\zeta(x,1)$ soddisfano la 1) e 2) della definizione 3.1.22 relativamente a U_0 e ad U_1, per cui

$$\mathfrak{I}(f) = \mathfrak{I}\big(h_1(\cdot,0)\big) \quad \text{e} \quad \mathfrak{I}(g) = \mathfrak{I}\big(h_1(\cdot,1)\big).$$

Dal teorema 3.1.19 di invarianza per omotopie C^∞, abbiamo

$$\mathfrak{I}\big(h_1(\cdot,0)\big) = \mathfrak{I}\big(h_1(\cdot,1)\big).$$

Da cui segue immediatamente la tesi. □

Teorema 3.1.24 (doppia approssimazione). *Data $f \in C^0(N,M)$ ammissibile, fissati $V_1, \ldots, V_n$, aperti a due a due disgiunti, contenuti in N, tali che*

$$G[f]^{-1}(\Delta) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_i = V$$

esiste una $g \in C^\infty(N, M)$ ammissibilmente omotopa ad f e tale che $G[g]$ è trasversale a Δ e $G[g]^{-1}(\Delta) \subseteq V$. Inoltre $g|_{V_i}$ risulta omotopa in modo ammissibile ad $f|_{V_i}$ per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$.

Dimostrazione. Consideriamo degli aperti, relativamente compatti, $U_1, \dots, U_n$ tali che per $i \in \{1, \dots, n\}$, si abbia $\overline{U}_i \subseteq V_i$ e $G[f]^{-1}(\Delta) \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_i$. Poniamo $U = \bigcup_{i=1}^n U_i$.

Esiste una funzione continua $\zeta : N \to (0, +\infty)$ tale che

1. $\zeta(x) < d\big(G[f](x), \Delta\big)$ fuori di U;

2. $\zeta(x) < \varepsilon\big(G[f](x)\big)$ $\forall x \in N$ (ε è la funzione del teorema degli ε-intorni relativa ad $M \times M$).

Per il teorema 2.3.3 di approssimazione sulle varietà, esiste un'applicazione $f_1 \in C^\infty(N, M)$ tale che

$$\|f(x) - f_1(x)\| < \frac{\zeta(x)}{2} \quad \forall x \in N.$$

Dalla proposizione 3.1.21 abbiamo che $f_1 \simeq f$. Per il teorema 3.1.7 esiste un'applicazione $g \in C^\infty(N, M)$, ammissibilmente omotopa ad f_1, tale che $G[g] \pitchfork \Delta$ e

$$\|f_1(x) - g(x)\| < \frac{\zeta(x)}{2}$$

Per la transitività della relazione di omotopia ammissibile, si ha che $g \simeq f$.

Applicando la disuguaglianza triangolare $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, da (1) e (2) seguono:

1a. $\|g|_{V_i}(x) - f|_{V_i}(x)\| < d\big(G[f|_{V_i}](x), \Delta\big)$ per ogni x in $V_i \setminus U_i$.

2a. $\|g|_{V_i}(x) - f|_{V_i}(x)\| < \varepsilon\big(G[f|_{V_i}](x)\big)$ $\forall x \in V_i$.

Per la proposizione 3.1.21 si ha $g|_{V_i} \simeq f|_{V_i}$. □

3.2 Proprietà dell'indice di punto fisso

L'indice di punto fisso è stato definito da molti autori in modi anche profondamente diversi da loro (vedi per es. [16, 37, 36, 22, 33]). Come vedremo, però, esistono alcune proprietà fondamentali che lo determinano in modo univoco. Queste proprietà permettono, quindi, di unificare i molti risultati esistenti.

In altre parole, consideriamo una funzione ρ che ad ogni applicazione continua e ammissibile, definita su un aperto della varietà M, associa un intero. Supponiamo che ρ goda delle stesse proprietà di $\mathfrak{I}$, allora ρ coincide con $\mathfrak{I}$.

In questo paragrafo, ove non specificato diversamente, considereremo M una varietà differenziabile modellata su $\mathbb{R}^m$ priva di bordo ed N un suo aperto.

Le proprietà in questione sono le seguenti:

(I) Normalizzazione. Se $f : M \to M$ è costante allora $\mathfrak{I}(f) = 1$.

(II) Additività. Se l'insieme dei punti fissi di $f \in C^0(N, M)$ è un compatto contenuto in due aperti V_1 e V_2, disgiunti, si ha $\mathfrak{I}(f) = \mathfrak{I}(f|_{V_1}) + \mathfrak{I}(f|_{V_2})$.

(III) Omotopia. $\mathfrak{I}$ è invariante per omotopie ammissibili.

Osserviamo che la (II) implica la seguente proprietà:

Taglio. Sia $f \in C^0(N, M)$ un'applicazione ammissibile e T il suo insieme dei punti fissi, allora $\mathfrak{I}(f) = \mathfrak{I}(f|_V)$ qualunque sia l'intorno V di T con $V \subseteq N$.

Infatti, basta prendere $V_1 = V$ e $V_2 = \emptyset$, e osservare che $\mathfrak{I}(f|_{V_2}) = 0$. Dalla (II) otteniamo

$$\mathfrak{I}(f) = \mathfrak{I}(f|_{V_1}) + \mathfrak{I}(f|_{V_2}) = \mathfrak{I}(f|_V).$$

Notiamo inoltre che, dalle proprietà di normalizzazione e di additività, segue che, posto Ω un aperto della varietà M ed a un suo punto, se con $\kappa_{\Omega,a} : \Omega \to M$ indichiamo l'applicazione costante definita da $x \mapsto a$, si ha $\mathfrak{I}(\kappa_{\Omega,a}) = 1$ se $a \in \Omega$ e $\mathfrak{I}(\kappa_{\Omega,a}) = 0$ altrimenti.

Vediamo che $\mathfrak{I}$ soddisfa (I),...,(III). Notiamo che la *proprietà di omotopia* non è altro che la proposizione 3.1.23 (proprietà di invarianza per omotopie continue). Proviamo adesso che $\mathfrak{I}$ gode anche della *proprietà di additività*

Proposizione 3.2.1. *: Data $f \in C^0(N, M)$ ammissibile; se V_1 e V_2 sono aperti disgiunti di N, tali che $\{x \in N : x = f(x)\} \subseteq V_1 \cup V_2$, si ha:*

$$\mathfrak{I}(f) = \mathfrak{I}(f|_{V_1}) + \mathfrak{I}(f|_{V_2}).$$

Dimostrazione. Poniamo $V = V_1 \cup V_2$. Applicando il teorema 3.1.24 di doppia approssimazione, si vede che è possibile trovare un'applicazione $g \in C^\infty(N, M)$, omotopa ammissibilmente ad f, tale che $G[g] \pitchfork \Delta$, $f|_{V_i} \simeq g|_{V_i}$ per $i = 1, 2$ e $\{x \in N : g(x) = x\} \subseteq V$ (ricordiamo che, come nel paragrafo precedente, il simbolo "$\simeq$" indica la relazione di omotopia ammissibile).

Per la proposizione 3.1.23, otteniamo

$$\mathfrak{I}(f) = \mathfrak{I}(g) \quad \text{e} \quad \mathfrak{I}(f|_{V_i}) = \mathfrak{I}(g|_{V_i}) \text{ con } i = 1, 2.$$

Ricordando l'osservazione 3.1.3 abbiamo

$$\mathfrak{I}(g) = \mathfrak{I}(g|_{V_1}) + \mathfrak{I}(g|_{V_2}),$$

da cui si ha subito la tesi. □

Proviamo la proprietà di normalizzazione. Per $f : M \to M$ costante, poniamo $a = f(x)$, allora a è evidentemente l'unico punto fisso di f. Abbiamo che $d_x f$=0, dunque

$$\det\left(\mathrm{Id}_a - d_a f\right) = 1.$$

Per la definizione 3.1.2, si ha $\mathfrak{I}(f) = 1$.

Notiamo che, comunque presa $f \in C^0(N, M)$ ammissibile, esiste un compatto K che contiene l'insieme dei punti fissi nel suo interno $\mathring{K}$. Per quanto sopra si ha $\mathfrak{I}(f) = \mathfrak{I}\big(f|_{\overset{\circ}{K}}\big)$; l'applicazione $f|_{\overset{\circ}{K}}$ è compatta, quindi, ai fini del calcolo dell'indice, ogni applicazione ammissibile può essere sostituita da una compatta e ancora ammissibile.

Lemma 3.2.2. *: Sia ψ un diffeomorfismo tra due varietà M ed M_1. Data un'applicazione continua $f : N \to M$, poniamo*

$$T = \big\{x \in N : G[f](x) \in \Delta_M\big\} \quad \textit{ed} \quad S = \{x \in \psi(N) : G[\psi \circ f \circ \psi^{-1}](x) \in \Delta_{M_1}\},$$

dove Δ_M e Δ_{M_1} indicano la diagonale rispettivamente di $M \times M$ e di $M_1 \times M_1$. Si ha che, un punto x appartiene a T, se e soltanto se $\psi(x)$ sta in S; in altre parole $S = \psi(T)$.

Dimostrazione. $x \in T$ significa $G[f](x) \in \Delta_M$, questo accade se e solo se $x = f(x)$, ciò equivale a scrivere

$$\psi(x) = \psi \circ f \circ \psi^{-1}\big(\psi(x)\big),$$

cioè $G[\psi \circ f \circ \psi^{-1}]\big(\psi(x)\big) \in \Delta_{M_1}$.

Per la definizione di T ed S abbiamo $x \in T$ se e solo $\psi(x) \in S$. $\square$

Torniamo al problema, che avevamo lasciato momentaneamente in sospeso, dell'unicità dell'indice di punto fisso. Premettiamo una definizione.

Definizione 3.2.3. Sia V un aperto limitato di $\mathbb{R}^m$ e $\overline{V}$ la sua chiusura. Consideriamo un'applicazione continua $F : \overline{V} \to \mathbb{R}^m$, se $F(x) \neq x$ per ogni punto della frontiera di $\overline{V}$, diremo che F è ammissibile.

Sia ρ una funzione a valori interi, definita su tutte le possibili terne $\big(M, N, f\big)$, dove M indica una varietà differenziabile, N un suo aperto, ed $f : N \to M$ è un'applicazione continua, ammissibile. Supponiamo che ρ soddisfi i seguenti requisiti:

($\mathbf{I_1}$). Se $f : M \to M$ è costante, allora $\rho(f) = 1$.

($\mathbf{I_2}$). Se l'insieme dei punti fissi di un'applicazione continua ammissibile f è contenuto in due aperti V_1 e V_2 disgiunti, si ha $\rho(f) = \rho(f|_{V_1}) + \rho(f|_{V_2})$.

($\mathbf{I_3}$). ρ è invariante per omotopie ammissibili.

Vogliamo provare che, la funzione ρ, soddisfacente ($\mathrm{I}_\mathbf{1}$), ($\mathrm{I}_\mathbf{2}$), ($\mathrm{I}_\mathbf{3}$), è univocamente determinata. Quindi, dal momento che $\mathfrak{I}$ soddisfa ($\mathrm{I}_\mathbf{1}$), ($\mathrm{I}_\mathbf{2}$), ($\mathrm{I}_\mathbf{3}$), otterremo, $\rho \equiv \mathfrak{I}$; in altre parole dimostreremo che esiste un solo indice di punto fisso.

Supponiamo, per assurdo, che esistano due funzioni ρ_1 e ρ_2, non coincidenti, che soddisfino ($\mathrm{I}_\mathbf{1}$), ($\mathrm{I}_\mathbf{2}$), ($\mathrm{I}_\mathbf{3}$). Evidentemente, deve esistere una varietà m-dimensionale M, un suo aperto N, ed una funzione continua, ammissibile $f : N \to M$, tale che $\rho_1(f) \neq \rho_2(f)$. Il teorema 3.1.24 di doppia approssimazione e la proprietà ($\mathrm{I}_\mathbf{3}$) permettono, senza perdere in generalità, di supporre $f \in C^\infty(N, M)$ e il grafico di f trasversale alla diagonale di $M \times M$.

La proprietà ($\mathbf{I_2}$) , implica che esiste almeno un punto fisso $\bar{x}$ di f tale che, comunque scelto un suo intorno U, non contenente altri punti fissi, si ha

$$\rho_1\big(f|_U\big) \neq \rho_2\big(f|_U\big). \tag{3.2.1}$$

Eventualmente riducendo U, possiamo supporre che esista un diffeomorfismo ψ da U su tutto $\mathbb{R}^m$.

Supponiamo M, U e ψ fissati come sopra. Consideriamo un aperto limitato V di $\mathbb{R}^m$, e sia $F : \overline{V} \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione continua, ammissibile. Definiamo

$$\deg_{\rho_i}\big(\mathrm{Id}_{\overline{V}} - F\big) = \rho_i\big(\psi^{-1} \circ F \circ \psi\big) \quad (i = 1, 2), \tag{3.2.2}$$

dove $\mathrm{Id}_{\overline{V}}$ indica l'identità su $\overline{V}$.

Notiamo che il membro destro dell'equazione (3.2.2) è definito; infatti, per il lemma 3.2.2, l'ammissibilità di F implica quella di $\psi^{-1} \circ F \circ \psi : \psi^{-1}(V) \to M$.

Siccome per ρ_1 e ρ_2 valgono le $\mathbf{I_1}$, $\mathbf{I_2}$, $\mathbf{I_2}$, otteniamo immediatamente che $\deg_{\rho_i}$ soddisfa

(A) Normalizzazione. Comunque scelto un aperto limitato Ω di $\mathbb{R}^m$ con $0 \in \Omega$, abbiamo $\deg_{\rho_i}\big(\mathrm{Id}_{\overline{\Omega}}\big) = 1$ per $i = 1, 2$

(B) Additività. Per ogni aperto, limitato, non vuoto Ω, comunque scelti due sottoinsiemi disgiunti di Ω_1 e Ω_2 di Ω, per ogni applicazione continua, ammissibile $F : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^m$, tale che, posto $\Phi = \big(\mathrm{Id}_{\overline{\Omega}} - F\big)$, $0 \notin \Phi\big(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)\big)$, si ha

$$\deg_{\rho_i}(\Phi) = \deg_{\rho_i}\big(\Phi|_{\overline{\Omega_1}}\big) + \deg_{\rho_i}\big(\Phi|_{\overline{\Omega_2}}\big) \quad (i = 1, 2).$$

(C) Invarianza per omotopie. Fissato un aperto, limitato, non vuoto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$, data un'omotopia $H : \overline{\Omega} \times [0, 1] \to \mathbb{R}^m$ tale che $0 \notin H\big(\overline{\Omega} \setminus \Omega, t\big)$ $\forall t \in [0, 1]$; si ha che $deg_{\rho_i}\big(H(\cdot, t)\big)$ è indipendente da t $(i = 1, 2)$.

Le (A), (B) e (C) sono immediate conseguenze delle $\mathbf{I_1}$, $\mathbf{I_2}$, $\mathbf{I_3}$.

Per [3, Teorema 1 §3], oppure per il teorema di unicità del grado che vederemo in seguito, si ha $\deg_{\rho_1} \equiv \deg_{\rho_2}$.

Consideriamo un aperto relativamente compatto $K \subseteq U$, contenente $\bar{x}$; $f|_K : K \to M$ è ammissibile, e, per il lemma 3.2.2, $\psi \circ f \circ \psi^{-1} : \psi(\overline{K}) \to \mathbb{R}^m$ è ammissibile.

Dalla definizione di $\deg_{\rho_i}$, si ha

$$\deg_{\rho_i}\big(\mathrm{Id}_{\psi(\overline{K})} - \psi \circ f \circ \psi^{-1}\big) = \rho_i(f).$$

Per l'equazione (3.2.1), si ha che

$$\deg_{\rho_1}\big(\mathrm{Id}_{\psi(\overline{K})} - \psi \circ f \circ \psi^{-1}\big) \neq \deg_{\rho_2}\big(\mathrm{Id}_{\psi(\overline{K})} - \psi \circ f \circ \psi^{-1}\big),$$

che contraddice la coincidenza di $\deg_{\rho_1}$ e $\deg_{\rho_2}$.

Abbiamo quindi il seguente, importante, teorema.

Teorema 3.2.4 (unicità). *Esiste uno ed un solo indice di punto fisso sulle varietà differenziabili soddisfacente le proprietà (I), (II), (III).*

La dimostrazione del teorema 1 §3 di [3] ci sembra assai complessa, vogliamo quindi fornire un risultato più semplice, ma sufficiente ai nostri scopi, ottenuto con i metodi della topologia differenziale.

È necessario approfondire il concetto di grado; per comodità useremo una notazione leggermente diversa da quella del primo capitolo.

Definizione 3.2.5. Consideriamo una funzione "deg" a valori interi, definita su tutte le possibili terne $\big(E, V, G\big)$, dove $E = \mathbb{R}^m$ per qualche m, V un suo aperto limitato e $G : \overline{V} \to E$ è un'applicazione continua, tale che $0 \notin G(\overline{V} \setminus V)$. Per brevità diremo che una G siffatta è *ammissibile per il grado*, notiamo che essa può sempre essere scritta $G \equiv \mathrm{Id}_{\overline{V}} - g$, con g ammissibile (per l'indice).

Diremo che "deg" è un *grado* se soddisfa

($\mathbf{P_1}$) Normalizzazione. Comunque scelto un aperto limitato Ω di $\mathbb{R}^m$ con $0 \in \Omega$, abbiamo $\deg(\mathrm{Id}_{\overline{\Omega}}) = 1$.

($\mathbf{P_2}$) Additività. Per ogni applicazione continua, ammissibile per il grado $F : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^m$, dove Ω è un aperto, limitato e non vuoto di $\mathbb{R}^m$, comunque scelti due sottoinsiemi disgiunti Ω_1 e Ω_2 di Ω, tali che, $0 \notin F\big(\overline{\Omega} \setminus \big(\Omega_1 \cup \Omega_2\big)\big)$, si ha

$$\deg(F) = \deg\big(F|_{\overline{\Omega}_1}\big) + \deg\big(F|_{\overline{\Omega}_2}\big).$$

($\mathbf{P_3}$) Invarianza per omotopie. : Fissato un aperto limitato, non vuoto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$, data un'omotopia $H : \overline{\Omega} \times [0,1] \to \mathbb{R}^m$ tale che $0 \notin H\big(\overline{\Omega} \setminus \Omega, t\big)$ $\forall t \in [0,1]$ (*omotopia ammissibile per il grado*); si ha che $deg\big(H(\cdot, t)\big)$ è definito ed indipendente da t.

Proveremo che esiste un'unica funzione soddisfacente le ($\mathrm{P}_\mathbf{1}$), ($\mathrm{P}_\mathbf{2}$), ($\mathrm{P}_\mathbf{3}$). Premettiamo un lemma ben noto.

Lemma 3.2.6. *Data un'applicazione $G : U \to \mathbb{R}^m$ di classe C^1 (U è un aperto di $\mathbb{R}^m$ contenente lo zero). Supponiamo $G(p) = 0$ per qualche punto $p \in U$. Se* $\det\big(d_pG\big) \neq 0$*, esiste un intorno V di p, tale che $G|_V$ è ammissibilmente omotopa (per il grado) a d_pG.*

Dimostrazione. Vedi [33]. □

Osservazione 3.2.7. Il gruppo lineare su $\mathbb{R}^m$ (applicazioni lineari non degeneri da $\mathbb{R}^m$ in sè) è un aperto (di $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$), costituito da due componenti connesse per archi caratterizzate dal segno del determinante. La connessione per archi si traduce osservando che le applicazioni lineari, con determinante dello stesso segno, sono ammissibilmente omotope tra loro, se si pensano definite sulla chiusura della palla unitaria (o, più in generale, sulla chiusura di un qualunque aperto, limitato, contenente l'origine).

Teorema 3.2.8 (unicità del grado). *Esiste un'unica funzione, "*deg*", soddisfacente le (P_1), (P_2), (P_3).*

Dimostrazione. Sia $G : \overline{V} \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione continua ed ammissibile, osserviamo che essa si può sempre scrivere nella forma $\mathrm{Id} - F$ (Id è l'identità su tutto $\mathbb{R}^m$); e che, in questo caso, l'insieme degli zeri (cioè delle soluzioni di $G(x) = 0$) di G coincide con quello dei punti fissi di F.

Usando il teorema 3.1.24 di doppia approssimazione e la proprietà P_3, si può supporre che l'applicazione F sia C^∞ e, il suo grafico trasversale alla diagonale di $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$. Questo equivale a dire che 0 è un valore regolare per l'applicazione G, quindi l'insieme $G^{-1}(0)$ è finito.

Poniamo

$$G^{-1}(0) = \{z_1, \dots, z_n\},$$

e siano $U_1, \dots, U_n$ intorni a due a due disgiunti, rispettivamente di $z_1, \dots, z_n$. Siccome 0 è un valore regolare per G, si ha che $\det\big(d_{z_i}G\big) = \det\big(\mathrm{Id} - d_{z_i}F\big) \neq 0$. Per dimostrare il teorema proveremo che

$$\deg\big(G|_{U_i}\big) = \mathrm{sign}\Big(\det\big(d_{z_i}G\big)\Big).$$

In tale modo, per la (P_2) , avremo necessariamente che

$$\deg\big(G\big) = \sum_{i=1}^{n} \deg\big(G|_{U_i}\big) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{sign}\Big(\det\big(d_{z_i}G\big)\Big).$$

Per il lemma 3.2.6 e la (P_3), si ha

$$\deg\big(G|_{U_i}\big) = \deg\big(d_{z_i}G\big).$$

è sufficiente provare che se il determinante di $d_{z_i}G$ è:

(a). positivo, allora $\deg\big(d_{z_i}G\big) = +1$,

(b). negativo, allora $\deg\big(d_{z_i}G\big) = -1$.

La parte (a) segue subito dall'osservazione 3.2.7, infatti se il determinante è positivo allora $d_{z_i}G$ è omotopa in modo ammissibile (per il grado) all'identità, e, dalla proprietà (P_1) , si ottiene che il grado di Id vale $+1$.

Per provare (b), sempre per l'osservazione 3.2.7, è sufficiente trovare un'applicazione lineare, con determinante negativo tale che il suo grado valga -1. Per ottenerla, poniamo $B = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x\| < 2\}$, $x = (x_1, \dots, x_m)$ e consideriamo l'applicazione $H : \overline{B} \times [0,1] \to \mathbb{R}^m$, data da

$$H\big(x,t\big) = \big(x_1^2 + 1 - 2t, x_2, \dots, x_m\big).$$

Osserviamo che H è un'omotopia ammissibile, inoltre l'equazione $H(x,0)=0$ non ha soluzioni, dunque, per la proprietà ($\mathrm{P}_{\mathbf{2}}$), $\deg\big(H(\cdot,0)\big)=0$. Per la ($\mathrm{P}_{\mathbf{3}}$), anche il grado di $H(\cdot,1)$ deve valere 0.

L'equazione $H(x,1)=0$ ha due soluzioni distinte: $z_1=(1,0,\dots,0)$ e $z_2=(-1,0,\dots,0)$. Si ha

$$d_{z_1}H(\cdot,1)=\begin{pmatrix}+2 & & & 0\\ & +1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & +1\end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad d_{z_2}H(\cdot,1)=\begin{pmatrix}-2 & & & 0\\ & +1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & +1\end{pmatrix}$$

Se U_1 ed U_2 sono intorni disgiunti di z_1 e z_2, per la (a) abbiamo che

$$\deg\big(H(\cdot,1)|_{U_1}\big)=+1.$$

Per la ($\mathrm{P}_{\mathbf{2}}$), possiamo scrivere

$$0=\deg\big(H(\cdot,1)\big)=\deg\big(H(\cdot,1)|_{U_1}\big)+\deg\big(H(\cdot,1)|_{U_2}\big),$$

dunque $\deg\big(H(\cdot,1)|_{U_2}\big)=-1$. $\square$

Vogliamo ora provare una proprietà, che pur non essendo collegata direttamente al problema dell'unicità, è in alcuni casi molto importante per il calcolo dell'indice; nel prossimo paragrafo vedremo alcuni esempi in questo senso. La proprietà in questione è la seguente:

Invarianza per diffeomorfismi. Sia M_1 una varietà differenziabile, $\psi : M \to M_1$ un diffeomorfismo. Indichiamo con f^ψ la composizione $\psi\circ f\circ\psi^{-1} : N^\psi \to M^\psi$, dove si è posto $M^\psi=\psi(M)$ e $N^\psi=\psi(N)$. Se $f\in C^0(N,M)$ è ammissibile, si ha $\mathfrak{I}(f)=\mathfrak{I}(f^\psi)$.

Nel seguito useremo spesso questa notazione particolare. Siano M ed M_1 due varietà differenziabili diffeomorfe, e $\psi : M\to M_1$ un diffeomorfismo tra di esse. Se S è un sottoinsieme qualsiasi di M, con S^ψ indicheremo l'immagine di S mediante ψ. Data un'applicazione continua f da N in M, con N aperto di M, definiamo $f^\psi : N^\psi \to M^\psi$ come la composizione $\psi\circ f\circ\psi^{-1}$. Inoltre, per ogni varietà M, chiamiamo Δ_M la diagonale di $M\times M$.

Lemma 3.2.9. *Siano M una varietà differenziabile e $\psi : M \to M^\psi$ un diffeomorfismo su un'altra varietà. Data $f\in C^\infty(N,M)$, abbiamo che la condizione $G[f]\pitchfork\Delta_M$, implica $G[f^\psi]\pitchfork\Delta_{M^\psi}$.*

Dimostrazione. Comunque scelto $x\in G[f]^{-1}(\Delta)$, si ha $(x,x)=G[f](x)$. L'ipotesi $G[f]\pitchfork\Delta_M$ significa,

$$d_xG[f](T_xN)+T_y\Delta_M=T_y(M\times M) \tag{3.2.3}$$

oppure, come avevamo osservato all'inizio del paragrafo 3.1,

$$\det\big(\operatorname{Id}_x - d_x f\big) \neq 0,$$

dove Id_x indica l'identità su T_xM.

Siccome ψ è un diffeomorfismo, $d_x\psi : T_xM \to T_{\psi(x)}M^\psi$ è un isomorfismo (di cui $d_{\psi(x)}\psi^{-1}$ è l'inversa). Possiamo scrivere

$$\det\Big(d_x\psi \circ \big(\operatorname{Id}_x - d_x f\big) \circ d_{\psi(x)}\psi^{-1}\Big) = det\big(\operatorname{Id}_x - d_x f\big) \neq 0.$$

Per la proprietà di composizione dei differenziali, scriviamo

$$d_x\psi \circ d_x f \circ d_{\psi(x)}\psi^{-1} = d_{\psi(x)} f^\psi.$$

Otteniamo

$$\det\big(\operatorname{Id}_{\psi(x)} - d_{\psi(x)} f^\psi\big) \neq 0,$$

dove $\operatorname{Id}_{\psi(x)}$ è l'identità su $T_{\psi(x)}M^\psi$.

L'arbitrarietà della scelta di x ed il lemma 3.2.2 ci permettono di affermare che, comunque fissato $\xi \in G[f^\psi]^{-1}(\Delta_{M^\psi})$, si ha

$$det\big(\operatorname{Id}_\xi - d_\xi f^\psi\big) \neq 0,$$

che come avevamo visto all'inizio del paragrafo 3.1 implica (per l'arbitrarietà di ξ) che $G[f^\psi] \pitchfork \Delta_{M^\psi}$. □

Abbiamo tutti gli elementi necessari per provare la proprietà di invarianza per diffeomorfismi.

Proposizione 3.2.10. *: Sia M una varietà differenziabile, diffeomorfa ad un'altra varietà M_1, ed N un suo aperto. Consideriamo un diffeomorfismo $\psi : M \to \psi(M) = M_1$ ed un'applicazione continua, ammissibile $f : N \to M$; si ha che $\mathfrak{I}(f) = \mathfrak{I}(f^\psi)$.*

Dimostrazione. Per il teorema 3.1.24 di doppia approssimazione, senza perdere in generalità, possiamo supporre f di classe C^∞ e $G[f] \pitchfork \Delta_M$. Per il lemma 3.2.6 si ha $G[f^\psi] \pitchfork \Delta_{M_1}$. Poniamo $T = G[f]^{-1}(\Delta_M)$ ed $S = G[f^\psi]^{-1}(\Delta_{M_1})$.

Per la definizione 3.1.2 abbiamo

$$\mathfrak{I}(f) = \sum_{x\in T} \operatorname{sign}\big(\det(\operatorname{Id}_x - d_x f)\big) \quad \text{e} \quad \mathfrak{I}\big(f^\psi\big) = \sum_{y\in S} \operatorname{sign}\big(\det(\operatorname{Id}_y - d_y f^\psi)\big),$$

dove Id_x e Id_y rappresentano l'identità rispettivamente su T_xM e T_yM_1.

Per il lemma 3.2.2, abbiamo che $y \in S$ se e solo se $y = \psi(x)$ per qualche $x \in T$. È sufficiente provare che, comunque scelto $x \in T$,

$$\det(\operatorname{Id}_x - d_x f) = det(\operatorname{Id}_y - d_y f^\psi),$$

dove $y = \psi(x)$. Applicando la regola di composizione dei differenziali, dal momento che $f^\psi = \psi \circ f \circ \psi^{-1}$, si ha

$$d_y f^\psi = d_x\psi \circ d_x f \circ d_y\psi^{-1} \quad \text{(ricordiamo che } x = f(x)).$$

Siccome ψ è un diffeomorfismo, si ha che $d_x\psi \circ d_y\psi^{-1} : T_xM \to T_xM$ è l'identità. Tenendo conto delle definizioni di Id_x e Id_y, otteniamo

$$\mathrm{Id}_y \equiv d_x\psi \circ \mathrm{Id}_x \circ d_y\psi^{-1}.$$

Possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\mathrm{Id}_y - d_y f^\psi =& \big(d_x\psi \circ \mathrm{Id}_y \circ d_y\psi^{-1}\big) - \big(d_x\psi \circ d_x f \circ d_y\psi^{-1}\big)\\ =& d_x\psi \circ \big(\mathrm{Id}_x - d_x f\big) \circ d_y\psi^{-1}.\end{aligned}$$

Otteniamo che

$$\det\big(\mathrm{Id}_y - d_y f^\psi\big) = \det\Big(d_x\psi \circ \big(\mathrm{Id}_x - d_x f\big) \circ d_y\psi^{-1}\Big) = \det\big(\mathrm{Id}_x - d_x f\big).$$

□

3.3 Alcune applicazioni: Il numero di Lefshetz e la caratteristica di Eulero

In questo paragrafo presenteremo i ben noti concetti di numero di Lefshetz e di caratteristica di Eulero come applicazioni della teoria dell'indice di punto fisso. Prima di procedere, però, vediamo qualche esempio di calcolo di $\mathfrak{I}$ in casi particolari.

Sia M una varietà differenziabile, N un aperto di M, data $f \in C^\infty(N, M)$ ammissibile, se è verificata la condizione $G[f] \pitchfork \Delta$, la definizione 3.2.5 fornisce un mezzo molto efficiente per calcolare $\mathfrak{I}(f)$. Infatti la trasversalità implica che l'insieme T dei punti fissi è finito, e, fissato $x \in T$, si ha che l'applicazione lineare $\big(\mathrm{Id}_x - d_x f\big) : T_xM \to T_xM$ è non singolare, o, equivalentemente, $d_x f$ non ha autovalori uguali ad 1 (ricordiamo che con Id_x avevamo indicato l'identità su T_xM). Dunque $\det\big(\mathrm{Id}_x - d_x f\big) \neq 0$. Possiamo scrivere:

$$\mathfrak{I}(f) = \sum_{f(x)=x} \operatorname{sign}\Big(\det\big(\mathrm{Id}_x - d_x f\big)\Big).$$

Esempio 3.3.1. Consideriamo l'applicazione $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ data da $x \mapsto x^n$ con $n \geq 2$. Proviamo che $\mathfrak{I}(f) = n$; infatti consideriamo l'equazione $x^n - x = 0$, essa ha per soluzioni 0 e le radici $(n-1)$-sime dell'unità date da:

$$w_k = e^{\frac{2k\pi i}{n-1}} \qquad k = 0, \dots, n-2.$$

Tali soluzioni sono evidentemente i punti fissi di f. Ricordiamo che $\mathbb{C}$ può essere identificato in modo naturale con $\mathbb{R}^2$ mediante il diffeomorfismo definito da $a+ib \mapsto (a,b)$.

Si ha che $f'(x) = nx^{n-1}$ e quindi $f'(w_k) = n$. Dunque:

$$d_{w_k} f \equiv \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}$$

da cui $\det\big(\mathrm{Id} - d_{w_k} f\big) = (1-n)^2 > 0$. Inoltre $d_0 f \equiv 0$ quindi $\det\big(\mathrm{Id} - d_0 f\big) = 1$. Otteniamo che:

$$\mathfrak{I}(f) = \sum_{f(x)=x} \operatorname{sign}\big(\det(\mathrm{Id} - d_x f)\big) = 1 + (n-1) = n.$$

Esempio 3.3.2. Poniamo $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$. Consideriamo $\mathrm{Id} : S^n \to S^n$ l'identità. Vogliamo calcolare $\mathfrak{I}(\mathrm{Id})$.

Sfruttiamo dapprima l'invarianza per omotopie. Osserviamo che l'applicazione $\phi : S^n \to S^n$ data da $x \mapsto \pi\big(x + (0,\ldots,0,1/2)\big)$, dove $\pi : x \mapsto x/\|x\|$, è omotopa in modo ammissibile ad Id; quindi $\mathfrak{I}(\mathrm{Id}) = \mathfrak{I}(\phi)$. Per calcolare $\mathfrak{I}(\phi)$ osserviamo che ϕ ha come punti fissi soltanto i poli nord $N = (0,\ldots,0,1)$ e sud $S = (0,\ldots,0,-1)$. Utilizzando le proprietà di taglio e di additività è sufficiente valutare $\mathfrak{I}$ in intorni V_N e V_S, rispettivamente di N e di S.

Infatti abbiamo

$$\mathfrak{I}(\phi) = \mathfrak{I}\big(\phi|_{V_N \cup V_S}\big) = \mathfrak{I}\big(\phi|_{V_N}\big) + \mathfrak{I}\big(\phi|_{V_S}\big).$$

Sia ψ_N un diffeomorfismo locale con un intorno dello 0 in $\mathbb{R}^n$, che porta l'n-pla $(x_1,\ldots,x_n)$ in $\big(x_1,\ldots,x_n,\sqrt{1-\sum x_i^2}\big)$ e sia ψ_S un diffeomorfismo locale che manda questa n-pla in $\big(x_1,\ldots,x_n,-\sqrt{1-\sum x_i^2}\big)$ (le sommatorie sono fatte per i da 1 ad n).

Per la proprietà di invarianza per diffeomorfismi, si ha che $\mathfrak{I}(\phi|_{V_N}) = \mathfrak{I}(\psi_N \circ \phi \circ \psi_N^{-1})$. L'applicazione $\psi_N \circ \phi \circ \psi_N^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è determinata, come si vede con facili calcoli, da:

$$(x_1,\ldots,x_n) \mapsto \frac{(x_1,\ldots,x_n)}{Q}$$

dove

$$Q = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 + \left(\sqrt{1 - \sum_{i=1}^n x_i^2} + \frac{1}{2}\right)^2}$$

Ricordiamo che

$$\frac{\partial\big(x_i/Q\big)}{\partial x_j} = \frac{\frac{\partial x_i}{\partial x_j} Q - x_i \frac{\partial Q}{\partial x_j}}{Q^2}.$$

Valutando quest'ultima espressione in $(x_1, \ldots, x_n) = 0$ si ha

$$\frac{\partial \left({}^{x_i}\!/\!_{Q} \right)}{\partial x_j} = \frac{\delta_{ij}}{Q^2(0, \ldots, 0)},$$

dove $\delta_i j$ è il simbolo di Kroneker.

Siccome $Q^2(0, \ldots, 0) = {}^9\!/\!_4$, otteniamo che $d_0(\psi_N \circ \phi \circ \psi_N^{-1}) = {}^9\!/\!_4 \operatorname{Id}$. Dunque

$$\det\left(\operatorname{Id} - d_0(\psi_N \circ \phi \circ \psi_N^{-1}) \right) = \left({}^5\!/\!_9 \right)^n$$

Procedendo in maniera analoga per ψ_S si ha:

$$\det\left(\operatorname{Id} - d_0(\psi_S \circ \phi \circ \psi_S^{-1}) \right) = (-3)^n$$

Ne segue che $\mathfrak{I}(\phi) = 1 + (-1)^n$. Cioè $\mathfrak{I}(\operatorname{Id})$ vale 0 se n è dispari, 2 se è pari.

Esempio 3.3.3. Consideriamo $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ data da:

$$\rho(x) = \begin{cases} x & \text{se } \|x\| \leq 1 \\ \|x\| x & \text{se } \|x\| \geq 1 \end{cases}$$

Notiamo che ρ è C^∞, inoltre l'insieme dei suoi punti fissi coincide con il disco $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ e quindi ρ è ammissibile.

Calcoliamo $\mathfrak{I}(\rho)$. Sia $\kappa : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'applicazione $\kappa(x) = 2x$; ρ è ammissibilmente omotopa a κ mediante l'omotopia $F(x, t) = t\rho(x) + 2(1 - t)x$. Notiamo che κ ha l'origine per unico punto fisso e $d_0\kappa = 2 \operatorname{Id}$ (Id è l'identità su $\mathbb{R}^n$), quindi

$$\mathfrak{I}(\kappa) = \operatorname{sign}\left(\det(\operatorname{Id} - 2 \operatorname{Id}) \right) = (-1)^n.$$

Da cui infine $\mathfrak{I}(\rho) = \mathfrak{I}(\kappa) = (-1)^n$.

Un caso particolare di indice di punto fisso è il numero di Lefshetz. Questo potrebbe essere definito, in un contesto più generale, esclusivamente con i mezzi della topologia algebrica (vedi per esempio [15] oppure [14]).

Ci limiteremo alle applicazioni ammissibili da una varietà in sè.

Definizione 3.3.4. Sia M una varietà differenziabile, data $f \in C^0(M, M)$ ammissibile. Porremo

$$\Lambda(f) = \mathfrak{I}(f).$$

Chiameremo $\Lambda(f)$ *numero di Lefshetz di f.*

Abbiamo detto che Il numero di Lefshetz può essere definito esclusivamente con i mezzi dellla topologia algebrica. Il teorema di unicità 3.2.4 ci assicura che il nostro indice di punto fisso coincide sulle varietà (particolari ANR) con quello del capitolo primo. La proprietà (7) a pagina 10 (normalizzazione) ci assicura che il numero di Lefshetz, come l'abbiamo definito noi, è uguale a quello classico della topologia algebrica, nel caso di varietà compatte e senza bordo.

Dal momento che il numero di Lefshetz, per come l'abbiamo definito sopra, è un caso particolare di indice di punto fisso, si ha che esso gode delle seguenti proprietà, che si ottengono facilmente riformulando quelle omonime di $\mathfrak{I}$:

(I) Normalizzazione. Sia M una varietà ed a un suo punto. Se con $\kappa_a : M \to M$ indichiamo l'applicazione costante definita da $x \mapsto a$, si ha $\Lambda(\kappa_a) = 1$.

(II) Addittività. Se l'insieme dei punti fissi di $f \in C^0(M, M)$ è contenuto in due aperti V_1 e V_2, disgiunti, si ha $\Lambda(f) = \mathfrak{I}(f|_{V_1}) + \mathfrak{I}(f|_{V_2})$.

(III) Omotopia. Λ è invariante per omotopie ammissibili. Cioè se $F : M \times [0, 1] \to M$ è un'omotopia ammissibile allora $\Lambda\big(F(\cdot, t)\big)$ è costante per $t \in [0, 1]$.

Dalla definizione e dalle proprietà di $\mathfrak{I}$, segue subito la seguente generalizzazione del noto teorema di punto fisso di Lefshetz:

Proposizione 3.3.5. *Se $f \in C^0(M, M)$ e $\mathfrak{I}(f) \neq 0$ allora f ha almeno un punto fisso in M.*

Una conseguenza di questo risultato è il classico teorema di Brouwer:

Teorema 3.3.6 (Brouwer). *Poniamo $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$. Una qualunque applicazione $f : D^n \to D^n$, continua, ammette almeno un punto fisso in D^n.*

Dimostrazione. Sia $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$. Supponiamo, per assurdo, che non esistano punti fissi per f in D^n. In questo caso abbiamo $x \neq f(x)$ $\forall x \in S^{n-1}$; ne segue che, per ogni x in S^{n-1} e t in $[0, 1]$, $x \neq tf(x)$. Basta osservare che $\|tf(x)\| < 1$ per $t \neq 1$.

Definiamo $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$; osserviamo che $B^n = D^n \setminus S^{n-1}$. Consideriamo $F : B^n \times [0, 1] \to D^n$ data da $F(x, t) = tf(x)$. Poniamo:

$$\Gamma_1 = \big\{x \in D^n : x = tf(x) \text{ per qualche } t \in [0, 1]\big\}$$
$$\Gamma_2 = \big\{x \in B^n : x = tf(x) \text{ per qualche } t \in [0, 1]\big\}$$

Si ha che Γ_1 è chiuso e contenuto in un compatto, dunque è compatto. Inoltre, per quanto sopra, $\Gamma_1 \cap S^n = \emptyset$ quindi $\Gamma_1 \subseteq B^n$. Otteniamo $\Gamma_2 = \Gamma_1$. Quindi F è una omotopia ammissibile tra f e l'applicazione nulla κ_0. Per l'invarianza dell'indice per omotopie si ha $\mathfrak{I}(f|_{B^n}) = \mathfrak{I}(\kappa_0) = 1$, per la proposizione 3.3.5 $f|_{B^n}$, e quindi f, ha punti fissi contrariamente all'ipotesi di assurdo. □

Analogamente a come ci siamo serviti dell'indice di punto fisso per definire il numero di Lefshetz, possiamo sfruttare tale indice per introdurre un altro noto concetto della topologia algebrica: la caratteristica di Eulero.

A causa dei limiti della nostra trattazione, ci limiteremo a quelle varietà differenziabili in cui l'indice dell'applicazione identica è definito; cioè le varietà compatte e prive di bordo.

Definizione 3.3.7. Sia M una varietà differenziabile compatta e senza bordo porremo:

$$\chi(M) = \mathfrak{I}(\mathrm{Id})$$

dove Id indica l'applicazione identica su M.

A titolo di esempio calcoliamo $\chi(M)$ in un caso notevole.

Esempio 3.3.8. $M = S^n$. In base all'esempio 3.3.2 abbiamo immediatamente che $\chi(S^n)$ vale 0 oppure 2, a seconda che n sia dispari oppure pari.

Bibliografia

[1] Abraham R. *Transversality in manifolds of mappings*. Bull. Amer. Math. Soc. **69** (1963), 470-474.

[2] Abraham R. e Robbin J. *Transversal mappings and flows*, W.A.Benjamin, Inc., New York, 1967.

[3] Amann H. e Weiss S. *On the uniqueness of the topological degree*. Math. Z. **130** (1973), 37-54.

[4] Apostol T.M. *Mathematical analysis*. Reading, Mass. Addison-Wesley 1957.

[5] Arens R. ed Eells J. *On embedding uniform and topological spaces*. Pacific J. Math. **6** (1956), 397-403.

[6] Bonsall F.F. *Lectures on some fixed point theorems of functional Analysis*. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1962.

[7] Borsuk K. *Theory of retracts*. Polish Sci. Publ. Warsaw, 1967.

[8] Brown R.F. *An elementary proof of the uniquenes of the fixed point index*. Pacific J. Math. **35** (1970), 549-558.

[9] Brown R.F. *The Lefshetz fixed point theorem*. Scott Foresman Co. Glenview illinois 1971.

[10] Browder F.E. *On the fixed point index for continous mappings of locally connected spaces*. Summa Brasil. Math. **4** (1960), 253-293.

[11] Browder F.E., Nussbaum R.D. *The topological degree for noncompact nonlinear mappings in Banach spaces*. Bull. Amer. Math. Soc. **74** (1968), 671-676.

[12] Browder F.E. *Local and global properties of nonlinear mappings in Banach spaces*. Istituto Naz. di Alta Mat. Symposia Math. **2** (1968), 13-35.

[13] Browder F.E. *On a generalizzation of the Schauder fixed point theorem*. Duke Math. J. **26** (1959), 291-303.

[14] Cronin J. *Fixed points and topological degree in nonlinear analysis*. Amer. Math. Soc., Providence, Rhod Island, 1964.

[15] Croom F.H. *Basic concepts of algebraic topology*. Undergraduate Text in Math., Springer-Verlag New York 1978.

[16] Dold A. *Fixed point index and fixed point theorems for euclidean neighborhood retracts*. Topology **4** (1965), 1-8.

[17] Dugundji J. *Topology*. - Allyn and Bacon, Inc.. 1976.

[18] Dugundji J. e Granas A. *Fixed point theory*. Vol. 1, Plscka Academia Nauk, Monografie Matematyczne, Tom 61, Warsaw, 1982.

[19] Eells J. Jr. *A Setting for Global Analysis*. Bull. Amer. Math. Soc. 1966.

[20] Elworthy K.D. e Tromba A.J. *Degree theory on Banach manifolds*. Proc. Symp. Non Linear Functional Analysys, Chicago 1967.

[21] Fürer L. *Ein elementarer analytischer beweis zur eindeutigkeit des abbildungsgrades in* $\mathbb{R}^n$. Math. Nachr. **54** (1972), 259-267.

[22] Granas A. *Theory of compact vector fields*. Rozprawy Mat. **30** (1962), 93 pp.

[23] Granas A. *Some theorems in fixed point theory*. Bull. Acad. Polon. Sci. Sèr. Sci. Math. Astronom. Phys. 1**7** (1969), 131-137.

[24] Granas A. *The Leray-Schauder index and the fixed point theory for arbitrary ANR's*. Bull. Soc. Math. France **100** (1972), 209-228.

[25] Guillelmin V. e Pollack A. *Differential topology*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 1974.

[26] Hanner O. *Some theorems on absolute neighborhood retracts*. Arkiv für Matematik **1** (1951), 389-408.

[27] Hanner O. *Retraction and extension of mappings of metric and non metric spaces*. Arkiv für Matematik **2** (1952-1954), 315-360.

[28] Hirsh M.W. *Differential topology*. Graduate Text in Math., Springer-Verlag, Berlin 1976.

[29] Kelley J.L. *General topology*. Intern. Student edition 27. Van Nostrand Reinhold 1970.

[30] Lang S. *Differentiable manifolds*. Addison-Wesley 1972.

[31] Lang S. *Real Analysis*. Addison-Wesley 1969.

[32] Leray J. *Thèorie des points fixes: indice total et nombre de Lefshetz*. Bull. Soc. Mat. France **87** (1959), 221-233.

[33] Leray J. e Shauder J. *Topologie et èquations functionelles*. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **51** (1934), 45-78.

[34] Lloyd N. G., - *Degree Theory*. - Cambridge Univ. Press 73, 1978

[35] Milnor J. W. *Topology from the differentiable viewpoint*. Univ. Press of Virginia 1965.

[36] Nagumo M. *A theory of degree based on infinitesimal analysis*. Amer. J. Math. **73** (1951), 485-496.

[37] Nussbaum R. D. *The fixed point index and some applications*. Press. Univ. de Montreal 1985.

[38] Nussbaum R. D. *The fixed point index for local condensing maps*. Ann. Math. Pura Appl. **89** (1971), 217-258.

[39] Nussbaum R. D. *The fixed point index and asymptotic fixed point theorems for k-set-contractions*. Bull. A.M.S. **75** (1969), 490-495.

[40] Nussbaum R.D. *Generalizing the fixed point index*. Math. Ann. **228** (1977), 259-278.

[41] Sard A. *The measure of the critical points of differentiable maps*. Bull. Amer. Mat. Soc. **48** (1942), 883-890.

[42] Smale S. *An infinite dimensional version of Sard's theorem*. Amer. J. Math. **87** (1965), 861-866.

[43] Spivak M. *Calculus on manifolds*. New York Benjamin 1965.

[44] Tromba A.J. *The Euler characteristic of vector fields on Banach manifolds and a globalizzation of Leray-Shauder degree*. Adv. in Math. **28** (1978), 148-173.

Originale depositato il 10 giugno 1992

Edizione in LaTeX 2_ε con correzione di vecchi errori ed introduzione di nuovi: novembre 2003