

Perturbazioni periodiche
di
equazioni differenziali ordinarie
su varietà differenziabili

Marco Spadini

Consorzio delle università di Firenze, Cagliari, Modena, Perugia e Siena
Tesi di Dottorato in Matematica – VIII ciclo: 1992-96
Direttore della ricerca: Prof. Massimo Furi.

Indice

Introduzione	iv
Ringraziamenti	vi
Capitolo 1. Notazioni e concetti basilari	1
1.1. Richiami di calcolo differenziale.	1
1.2. Generalità sulle varietà differenziabili	4
1.3. Equazioni differenziali ordinarie su varietà.	8
1.4. Alcuni strumenti topologici.	11
Capitolo 2. L'indice di punto fisso dell'operatore di traslazione	19
2.1. L'indice di punto fisso per equazioni del primo ordine	19
2.2. L'indice di punto fisso per equazioni del secondo ordine	24
Capitolo 3. Perturbazioni periodiche di equazioni autonome	29
3.1. La struttura dell'insieme delle soluzioni armoniche	29
3.2. Esempi di applicazioni	36
Capitolo 4. Continuazione di soluzioni armoniche	45
4.1. Definizioni e risultati principali	45
4.2. Un aiuto per l'immaginazione	51
4.3. Applicazioni	53
Capitolo 5. Molteplicità di oscillazioni forzate	63
5.1. Risultati generali	63
5.2. Risultati di molteplicità sulle sfere	67
Bibliografia	73
Glossario dei simboli	75
Indice analitico	77

Introduzione

I metodi topologici in analisi hanno ormai una tradizione consolidata ed interessano una larga parte del mondo matematico. Essi spesso si rivelano uno strumento insostituibile per affrontare problemi non lineari che appartengono a rami diversi dell'analisi. In particolare questi metodi rappresentano un importante capitolo della teoria delle equazioni differenziali ordinarie, specialmente per quanto riguarda i problemi di esistenza e molteplicità di soluzioni periodiche.

Una menzione particolare è dovuta ai cosiddetti principi di continuazione. Una pietra miliare in questa direzione è l'ormai famoso lavoro di J. Leray e J. Schauder [36] in cui l'introduzione di una teoria del grado per un'opportuna classe di operatori, da uno spazio di Banach in sé, ha permesso lo sviluppo dei metodi di continuazione in spazi astratti che, come è noto, hanno trovato una straordinaria quantità di applicazioni (si veda [41] ed i suoi riferimenti).

In parole povere, l'idea del metodo di continuazione consiste nello studiare una equazione modificandola con continuità in una più semplice. In pratica, per affrontare una equazione del tipo $\phi(x) = x$, con $\phi : X \rightarrow X$ un'applicazione continua da uno spazio topologico in sé, la si immerge in una famiglia ad un parametro di equazioni $F(x, \lambda) = x$, dove la funzione $F : X \times [0, 1] \rightarrow X$ è scelta in modo tale che $F(\cdot, 1) = f$; che $F(x, 0) = x$ sia studiabile con una qualche teoria del grado in X ed, infine, che almeno una delle soluzioni di $F(x, 0) = x$ possa essere "continuata" ad una di $\phi(x) = x$.

Come è facile intuire, l'ultimo passo è quello che crea le maggiori difficoltà, e su cui occorre concentrare gli sforzi. È pertanto chiara la necessità di analizzare la struttura dell'insieme di soluzioni della $F(x, \lambda) = x$; per esempio in alcuni casi particolari, sarà possibile provare l'esistenza di un qualche tipo di limitazioni a priori sull'insieme delle soluzioni di questa equazione.

Un problema con il quale ci confronteremo spesso e che, anzi, costituisce la motivazione di tutto questo lavoro, è il seguente problema periodico

$$(0.0.1) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(0) = x(T) \end{cases},$$

dove $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è continua e T -periodica in t .

Un possibile approccio consiste nel ridurre questo problema ad una equazione funzionale equivalente e poi applicare il metodo di continuazione a quest'ultima.

Sebbene il punto di vista funzionale sia molto versatile, quando rimpiazziamo \mathbb{R}^n con una varietà differenziabile M , il metodo appena descritto non dà buoni frutti, principalmente perché, venendo a mancare la struttura lineare degli spazi coinvolti, nessuna delle teorie del grado risulta applicabile a questo caso.

Al contrario, l'operatore di traslazione lungo le traiettorie, introdotto alla fine del secolo scorso da H. Poincaré, permette di ridurre il problema (1) (od una sua opportuna approssimazione) ad uno "concreto" di punto fisso su M . Le tecniche usate sono ispirate principalmente al lavoro di M.A. Krasnosel'skii [33]. Differentemente dall'approccio funzionale, in cui vengono necessariamente coinvolte teorie astratte del grado, questa strategia richiede solamente l'uso dell'indice di punto fisso in dimensione finita.

Prendendo lo spunto dal metodo di continuazione, studieremo l'insieme delle soluzioni armoniche della famiglia di equazioni

$$(0.0.2) \quad \dot{x} = g(x) + \lambda f(t, x),$$

dove g ed f sono campi vettoriali tangenti ad M con f T -periodico in t e $\lambda \geq 0$. Ci occuperemo cioè dell'esistenza e, soprattutto, della molteplicità delle soluzioni armoniche di perturbazioni periodiche di equazioni differenziali autonome con particolare riguardo alle piccole perturbazioni.

Una classe particolare di problemi che possono essere ricondotti ad equazioni del tipo (2) è lo studio delle oscillazioni forzate di un sistema meccanico vincolato. Infatti, le equazioni di secondo ordine che li schematizzano sulla varietà che rappresenta il vincolo, possono essere scritte nella forma (2) sul fibrato tangente.

Faremo un largo uso di strumenti topologici quali, principalmente, il grado di un campo vettoriale e l'indice di punto fisso di un'applicazione. Ad essi, vista la loro importanza cruciale nell'economia di questo lavoro, è stato dedicato un ampio spazio in cui vengono presentati dal punto di vista unificatore dell'indice di intersezione. Nello sviluppo di questo lavoro, ci soffermeremo talvolta ad approfondire alcuni aspetti rilevanti che permettono di illustrare i risultati parziali ottenuti. Si è cercato di esporre nei dettagli tutti gli argomenti trattati, motivando con esempi concreti i concetti più importanti introdotti e facendo anche largo uso di diagrammi esplicativi.

Questo lavoro di tesi si articola in cinque capitoli, di cui il primo introduce le notazioni e i concetti fondamentali necessari alla trattazione.

Nel secondo capitolo, si determina una formula per il calcolo dell'indice di punto fisso dell'operatore di traslazione di Poincaré associato ad una equazione differenziale autonoma su varietà differenziabili, la cui origine può essere fatta risalire a Krasnosel'skii [33], [34] e che è stata ottenuta, ma solo nel caso piatto (cioè nel caso di \mathbb{R}^n), in [41] usando una teoria astratta del grado (grado di coincidenza).

I capitoli tre e quattro rappresentano il cuore di questa tesi. In essi si studia la struttura dell'insieme delle soluzioni armoniche della (2). In particolare nel quarto si introducono alcune nozioni legate alla continuazione di soluzioni, confrontandole con teorie già note e, sfruttando il materiale del terzo capitolo, si provano dei risultati di molteplicità per equazioni del primo ordine.

Nell'ultimo capitolo, il quinto, applichiamo alle equazioni di secondo ordine i risultati di molteplicità ottenuti nel quarto. Uno spazio particolare è riservato alle oscillazioni forzate sulle sfere; caso in cui possono essere provati dei risultati particolarmente significativi. Il caso fisicamente rilevante del pendolo sferico, può essere inquadrato in questo contesto.

Ringraziamenti

Sono particolarmente grato al Prof. Massimo Furi, già relatore della mia tesi di laurea, che con costante impegno professionale ed umano si è sempre dimostrato per me una fonte inesauribile d'incoraggiamento ed aiuto.

Desidero inoltre ringraziare tutti i membri del gruppo di ricerca diretto dal Prof. Furi che mi hanno sostenuto con molte utili osservazioni e suggerimenti: i dottori P. Benevieri e P. Morassi e la professoressa M.P. Pera.

Infine è doveroso ringraziare l'attuale coordinatore del Dottorato di Ricerca Prof. Paolo Marcellini e tutti i coordinatori che si sono succeduti durante la durata dell'ottavo ciclo.

Firenze, febbraio 1997

Notazioni e concetti basilari

Questo capitolo è a carattere espositivo, ed è dedicato a presentare e riassumere, in forma organica, i concetti e gli strumenti di cui ci serviremo nel seguito del lavoro. Il nostro scopo è rendere, per quanto possibile, autoconsistente la trattazione.

Infatti, sebbene gli argomenti affrontati si possano trovare sviluppati in letteratura in molti modi diversi, manca uno studio che li racchiuda tutti, organicamente, nel contesto delle varietà differenziabili, che è quello a cui è rivolta la nostra attenzione.

In questo capitolo non sono presentate dimostrazioni (per le quali si rimanda ai lavori citati nel testo), ma ci si limita a richiamare schematicamente le costruzioni e le definizioni principali relative agli argomenti trattati.

Nel seguito, il prodotto scalare di due vettori v, w in \mathbb{R}^k è denotato da $\langle v, w \rangle$, il prodotto vettoriale ($k = 3$) da $v \times w$ mentre $|v|$ indicherà la norma euclidea in \mathbb{R}^k (i.e. $|v| = \langle v, v \rangle^{1/2}$).

1.1. Richiami di calcolo differenziale.

Data una funzione $f : U \rightarrow \mathbb{R}^s$, definita su un aperto U di \mathbb{R}^k , si dice che f è di classe C^0 (in U) se è continua. Induttivamente, f è detta di classe C^n , $n \geq 1$, se tutte le sue derivate parziali sono C^{n-1} , e C^∞ se è C^n per ogni $n \geq 0$. L'applicazione f è detta differenziabile (secondo Fréchet) in $p \in U$, se esiste un operatore lineare $f'(p) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^s$, chiamato derivata di f , tale che l'applicazione $\varepsilon : (U - p) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^s$, definita dalla formula

$$f(p+h) - f(p) = f'(p)h + |h| \varepsilon(h),$$

tende a zero per $h \rightarrow 0$. Inoltre, se f è differenziabile in ogni punto $p \in U$, si dice che f è differenziabile in U . Ricordiamo che se f è C^1 su U , allora è differenziabile in U . Vale inoltre la pena di ricordare che se f è differenziabile in p , allora, dato $h \in \mathbb{R}^k$, $f'(p)h$ coincide con la derivata direzionale di f in p lungo h . Si ha cioè

$$f'(p)h = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(p+th) - f(p)}{t}.$$

Una versione generalizzata di questa formula (vedi Lemma 1.1.4 nel seguito) risulta di fondamentale importanza nell'estensione della nozione di derivata ad applicazioni non necessariamente definite su aperti.

Supponiamo che $f : U \rightarrow \mathbb{R}^s$ sia differenziabile in $p \in U$. Se $g : W \rightarrow \mathbb{R}^h$ è un'applicazione definita su un aperto W di \mathbb{R}^s , differenziabile in $f(p) \in W$, allora $g \circ f$ è differenziabile in p e vale

$$(g \circ f)'(p) = g'(f(p)) f'(p).$$

Non è difficile provare per induzione che la composizione di applicazioni C^n è ancora C^n .

Sia E un sottospazio di \mathbb{R}^k ; la derivata parziale rispetto a E di f in p , denotata con $D_E f(p)$, è semplicemente la derivata di Fréchet nell'origine dell'applicazione composta $h \mapsto f(p+h)$, vista come definita sull'aperto $(U-p) \cap E$ di E .

Ovviamente $D_E f(p)$ appartiene allo spazio $L(E, \mathbb{R}^s)$ degli operatori lineari da E in \mathbb{R}^s e coincide con la restrizione ad E di $f'(p)$ quando f è differenziabile in p . Nel caso particolare che $\mathbb{R}^k = E_1 \times E_2$, le derivate parziali di f in p rispetto ad E_1 ed E_2 sono denotate semplicemente con $D_1 f(p)$ e $D_2 f(p)$ rispettivamente. Se $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^k$ ed f è differenziabile in p , allora, per la linearità di $f'(p)$,

$$f'(p)h = D_1 f(p)h_1 + D_2 f(p)h_2.$$

I seguenti risultati fondamentali del calcolo differenziale sono ben noti.

TEOREMA 1.1.1 (della funzione inversa). *Sia $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ un'applicazione C^α ($\alpha \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) su un aperto U di \mathbb{R}^k e sia $p \in U$. Se $f'(p)$ è un isomorfismo, allora esiste un intorno W di p tale che $f(W)$ è un aperto, $f|_W : W \rightarrow f(W)$ è invertibile e $f^{-1} : f(W) \rightarrow \mathbb{R}^k$ è di classe C^α .*

TEOREMA 1.1.2 (della funzione implicita). *Sia $f : U \rightarrow \mathbb{R}^s$ un'applicazione C^α ($\alpha \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) su un aperto U di $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^s$ e sia $(p, q) \in U$ tale che $f(p, q) = 0$. Se $D_2 f(p, q)$ è un isomorfismo, allora esiste un intorno V di (p, q) tale che $f^{-1}(0) \cap V$ è il grafico di un'applicazione $\varphi : W \rightarrow \mathbb{R}^s$ di classe C^α su un intorno aperto W di p in \mathbb{R}^k .*

Vale inoltre la pena di spendere alcune parole per richiamare la nozione di derivata seconda. La derivata seconda in un punto $p \in U$ di una funzione differenziabile $f : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^s$, denotata con $f''(p)$, non è altro che la derivata dell'applicazione $p \mapsto f'(p) \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^s)$. Quindi $f''(p)$ appartiene a $L(\mathbb{R}^k, L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^s))$ che, come si verifica facilmente, è canonicamente isomorfo allo spazio $L^2(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^s)$ degli operatori bilineari da $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$ in \mathbb{R}^s .

Per vedere in che modo $f''(p)$ opera su una coppia di vettori $(u, v) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$, si può procedere come segue. Fissiamo u e consideriamo l'applicazione, ancora da U in \mathbb{R}^s , data da $x \mapsto f'(x)u$. Dopodiché prendiamo la derivata direzionale in p lungo v di quest'applicazione. Il risultato non è altro che $f''(p)(u, v)$. Osserviamo anche che $f''(p)(u, v)$ coincide con la derivata seconda in $(0, 0)$ di $\varphi(t, s) = f(tu + sv)$. Quindi, se f è C^2 , applicando il classico Teorema di Schwarz, si ha che $f''(p)(u, v) = f''(p)(v, u)$. Dunque $f''(p)$ è un operatore bilineare simmetrico. Per le derivate di ordine superiore si procede in modo analogo.

Siamo interessati ad estendere il concetto di derivata a funzioni che non sono necessariamente definite su insiemi aperti. Introduciamo alcuni concetti basilari.

Sia X un sottoinsieme di \mathbb{R}^k e $p \in X$. Un vettore unitario $v \in S^{k-1} = \{x \in \mathbb{R}^k : |x| = 1\}$ è detto tangente ad X in p se esiste una successione $\{p_n\} \subset X \setminus \{p\}$ tale che $p_n \rightarrow p$ e

$$\frac{p_n - p}{|p_n - p|} \longrightarrow v.$$

Notiamo che, per la compattezza della sfera unitaria, se p è un punto di accumulazione di X , esiste almeno un vettore tangente unitario ad X in p .

Se $p \in X$ è un punto isolato, il *cono tangente* ad X in p , $C_p(X)$, è per definizione il sottospazio banale $\{0\}$ di \mathbb{R}^k . Se p è un punto di accumulazione di X , si definisce

$C_p(X)$ come il cono generato dai vettori tangenti unitari; cioè

$$C_p(X) = \{\lambda v : \lambda \geq 0, v \in S^{k-1} \text{ è tangente ad } X \text{ in } p\}.$$

Lo spazio tangente ad X in p , T_pX , è per definizione lo spazio vettoriale generato da $C_p(X)$. Un punto $p \in X$ tale che $C_p(X)$ non sia uno spazio vettoriale, cioè tale che $C_p(X) \neq T_pX$, è detto *punto singolare* di X .

Un passo essenziale per l'estensione del concetto di derivata è il seguente risultato (vedi e.g. [18]).

TEOREMA 1.1.3. *Siano $f : U \rightarrow \mathbb{R}^s$ un'applicazione C^1 su un aperto di \mathbb{R}^k , $Y \subset \mathbb{R}^s$ e $p \in f^{-1}(Y)$. Supponiamo che p sia un punto regolare per f , cioè la derivata $f'(p) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^s$ di f in p sia suriettiva. Allora*

$$\begin{aligned} C_p(f^{-1}(Y)) &= \{v \in \mathbb{R}^k : f'(p)v \in C_{f(p)}(Y)\} \\ &= f'(p)^{-1}(C_{f(p)}(Y)). \end{aligned}$$

Sia $f : X \rightarrow Y$ una mappa da un sottoinsieme X di \mathbb{R}^k in $Y \subset \mathbb{R}^s$, supponiamo che esista un intorno aperto U di X in \mathbb{R}^k ed una mappa $\varphi \in C^\alpha(U)$, $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, tale che $\varphi|_{U \cap X} = f$. Se tali condizioni sono soddisfatte diciamo che f è di classe C^α (φ è detta un'estensione C^α di f). L'applicazione $f : X \rightarrow Y$ è detta un C^α -*diffeomorfismo* se è iniettiva, suriettiva e f^{-1} è ancora C^α . In questo caso X e Y sono detti C^α -*diffeomorfi*.

Si può facilmente osservare che il grafico di un'applicazione C^α è C^α -*diffeomorfo* al suo dominio.

Sia $f : X \rightarrow Y$ una mappa di classe C^1 . Dato un punto $p \in X$, si definisce l'operatore lineare $f'(p) : T_pX \rightarrow T_{f(p)}Y$, chiamato la derivata di f in p , come la restrizione a T_pX della derivata in p di una qualunque estensione C^1 di f ad un aperto $U \supset X$.

La definizione appena posta ha senso in quanto valgono i seguenti risultati (vedi e.g. [18]).

LEMMA 1.1.4. *Sia $f : U \rightarrow \mathbb{R}^s$ definita su un aperto di \mathbb{R}^k e differenziabile in $p \in U$. Se f manda un sottoinsieme X di U contenente p in $Y \subset \mathbb{R}^s$, allora*

$$f'(C_p(X)) \subset C_{f(p)}(Y).$$

Di conseguenza, per la linearità di $f'(p)$,

$$f'(T_pX) \subset T_{f(p)}Y.$$

LEMMA 1.1.5. *Siano $\varphi, \psi : U \rightarrow \mathbb{R}^s$ definite su un aperto di \mathbb{R}^k e differenziabili in $p \in U$. Supponiamo che φ e ψ coincidano su un sottoinsieme X di U contenente p . Allora $\varphi'(p)$ e $\psi'(p)$ coincidono su $C_p(X)$ e conseguentemente su T_pX .*

Sottolineiamo che questa derivata così estesa gode delle proprietà functoriali della derivata classica. In particolare vale il seguente (vedi e.g. [18])

TEOREMA 1.1.6. *Sia $f : X \subset \mathbb{R}^k \rightarrow Y \subset \mathbb{R}^s$ un C^1 -diffeomorfismo. Allora, per ogni $p \in X$, $f'(p) : T_pX \rightarrow T_{f(p)}Y$ è un isomorfismo che fa corrispondere $C_p(X)$ a $C_{f(p)}(Y)$.*

1.2. Generalità sulle varietà differenziabili

Un sottoinsieme M di \mathbb{R}^k è detto una *varietà* (differenziabile) m -dimensionale (senza bordo) di classe C^α , $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, se è localmente C^α -modellato su \mathbb{R}^m ; cioè se ogni punto $p \in M$ ammette un intorno (in M) C^α -diffeomorfo ad un aperto di \mathbb{R}^m . Per semplicità chiameremo le varietà C^∞ anche *varietà lisce*.

Un C^α -diffeomorfismo $\varphi : W \rightarrow V \subset M$ da un aperto W di \mathbb{R}^m su un aperto V di M è detto una *parametrizzazione* (di classe C^α di V). L'inversa di una parametrizzazione $\varphi^{-1} : V \rightarrow W$ è chiamata una *carta locale* o *sistema di coordinate* su V e le sue funzioni componenti x_1, x_2, \dots, x_m sono le *funzioni coordinate* di φ^{-1} su V .

Come esempio, notiamo che il grafico di una qualunque mappa C^α definita su un aperto di \mathbb{R}^m è una varietà C^α m -dimensionale. In particolare la sfera m -dimensionale $S^m = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} : |x| = 1\}$ è una varietà liscia, essendo localmente il grafico di una funzione reale C^∞ definita su un aperto di \mathbb{R}^m . Notiamo inoltre che ogni sottoinsieme aperto di una varietà differenziabile è a sua volta una varietà differenziabile.

Una conseguenza immediata della definizione e del Teorema 1.1.6 è che per ogni punto p di una varietà M , m -dimensionale di classe C^1 , si ha $C_p(M) = T_pM$ e $\dim T_pM = m$.

Ricordiamo che se $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^s$ è una mappa C^1 su un aperto U di \mathbb{R}^k , un elemento $p \in U$ è detto un *punto regolare per f* se la derivata $f'(p)$ di f in p è suriettiva. I punti che non sono regolari sono detti *critici*. I *valori critici* di f sono quei punti nello spazio bersaglio \mathbb{R}^s che giacciono nell'immagine $f(C)$ dell'insieme dei punti critici C . Un punto $y \in \mathbb{R}^s \setminus f(C)$ è detto *valore regolare*. In particolare ogni punto di \mathbb{R}^s che non sta nell'immagine di f è un valore regolare. Vale il seguente risultato (vedi e.g. [43]).

TEOREMA 1.2.1. *Sia $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ una mappa C^α da un aperto di \mathbb{R}^k in \mathbb{R}^s . Se $0 \in \mathbb{R}^s$ è un valore regolare per f , allora $f^{-1}(0)$ è una varietà C^α di dimensione $k - s$. Inoltre, dato $p \in f^{-1}(0)$, si ha*

$$T_p f^{-1}(0) = \ker f'(p).$$

Questo teorema può essere parzialmente invertito, nel senso che ogni varietà C^α può essere scritta localmente come *insieme di livello regolare*, cioè come retroimmagine di un valore regolare. Più precisamente (vedi e.g. [18])

TEOREMA 1.2.2. *Sia M una varietà m -dimensionale di classe C^α in \mathbb{R}^k . Allora dato $p \in M$, esiste una mappa $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{k-m}$ di classe C^α in un intorno U di p in \mathbb{R}^k tale che $M \cap U = f^{-1}(0)$.*

Osserviamo che esistono varietà che non possono essere scritte globalmente come insiemi di livello regolari; si dimostra che, quando questo è possibile, la varietà risulta orientabile. Torneremo sul concetto di valore regolare dopo aver introdotto le varietà con bordo.

Le varietà differenziabili sono casi particolari di retratti assoluti d'intorno (o ANR), come mostrato dal seguente teorema (vedi e.g. [31]). Per una discussione molto approfondita sugli ANR vedi e.g. [6].

Sia $M \subset \mathbb{R}^k$ una varietà C^∞ , compatta e senza bordo. Fissato $\varepsilon > 0$, indichiamo con M_ε l'insieme aperto dei punti di \mathbb{R}^k distanti meno di ε da M . Più in

generale, data una funzione $\varepsilon : M \rightarrow (0, \infty)$, definiamo

$$M_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^k : |y - x| < \varepsilon(y), \text{ per almeno un } y \in M\}$$

TEOREMA 1.2.3 (degli intorni tubolari). *Sia $M \subset \mathbb{R}^k$ una varietà C^∞ senza bordo. Allora esiste una funzione C^∞ , $\varepsilon : M \rightarrow (0, +\infty)$, tale che ad ogni punto $x \in M_\varepsilon$ corrisponde un unico punto $\pi(x) \in M$ di minima distanza, e la funzione $\pi : M_\varepsilon \rightarrow M$ è C^∞ . Inoltre, se M è compatta, la funzione ε può essere scelta costante.*

Avremo anche bisogno di una nozione "immersa" di fibrato tangente. Dato $X \subset \mathbb{R}^k$, il sottoinsieme

$$TX = \{(x, y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k : x \in X, y \in T_x X\}$$

di $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$ è detto *fibrato tangente* di X . La *proiezione canonica* $\pi : TX \rightarrow X$ è la restrizione a TX della proiezione di $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$ sul primo fattore (quindi π è di classe C^∞).

Sia $f : X \rightarrow Y$ una mappa C^α , $\alpha \geq 1$, da un sottoinsieme X di \mathbb{R}^k in $Y \subset \mathbb{R}^s$. La mappa tangente di f , $Tf : TX \rightarrow TY$, è data da

$$Tf(x, y) = (f(x), f'(x)y).$$

Notiamo che, se f è di classe C^α , allora Tf è di classe $C^{\alpha-1}$. Inoltre, se $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ sono mappe C^1 , si ha che $T(g \circ f) = Tg \circ Tf$. Se poi $i : X \rightarrow X$ è l'applicazione identica, allora $Ti : TX \rightarrow TX$ è l'identità su TX .

Dunque, se $f : X \rightarrow Y$ è un C^α -diffeomorfismo, $Tf : TX \rightarrow TY$ è un $C^{\alpha-1}$ -diffeomorfismo.

Sia M una varietà C^α di dimensione m , poiché essa è localmente C^α -modellata su \mathbb{R}^m , il suo fibrato tangente risulta localmente $C^{\alpha-1}$ -modellato su $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ (fibrato tangente di \mathbb{R}^m). Cioè TM è una $C^{\alpha-1}$ -varietà di dimensione $2m$. Infatti, se $\varphi : W \rightarrow V \subset M$ è una parametrizzazione di un aperto V di M , allora $T\varphi : W \times \mathbb{R}^m \rightarrow TV \subset TM$ è una parametrizzazione dell'aperto $TV = \pi^{-1}(V)$ di TM . Vale inoltre il seguente utile risultato (vedi e.g. [18]).

TEOREMA 1.2.4. *Sia $M \subset \mathbb{R}^k$ una varietà m -dimensionale regolarmente definita come insieme di livello nullo da una mappa $f : U \rightarrow \mathbb{R}^s$ di classe C^α , $\alpha \geq 2$, su un insieme aperto di \mathbb{R}^k . Allora TM è regolarmente definita da Tf . In particolare*

$$TM = \{(x, y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k : f(x) = 0, f'(x)y = 0\}.$$

Un altro concetto utile è quello di *fibrato normale* ad una varietà. Se $p \in M$, con $N_p M$ denotiamo lo spazio ortogonale $T_p M^\perp$ a $T_p M$ in \mathbb{R}^k . Se Z è una sottovarietà di M e $p \in Z$, lo spazio ortogonale a $T_p Z$ in $T_p M$ è denotato con $N_p(Z, M)$. Il fibrato normale a Z in $M \subset \mathbb{R}^k$ è il sottoinsieme di $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$ dato da

$$N(Z, M) = \{(p, v) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k : p \in Z, v \in N_p(Z, M)\}.$$

Sia X un sottoinsieme di \mathbb{R}^k . Un *campo vettoriale tangente ad X* è una mappa $g : X \rightarrow \mathbb{R}^k$ con la proprietà che $g(x) \in T_x X$ per ogni $x \in X$. Il campo vettoriale è detto *interno* se $g(x) \in C_x(X)$ per ogni $x \in X$.

Data una funzione $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 su una varietà differenziabile $M \subset \mathbb{R}^k$, si definisce un campo vettoriale tangente su M , detto *gradiente* di f e denotato con $\text{grad}f$, nel modo seguente:

$$\langle \text{grad}f(x), v \rangle = f'(x)v, \quad \forall v \in T_x M.$$

In altre parole, dato $x \in M$, il gradiente di f in x è il vettore di $T_x M$ corrispondente a $f'(x) \in T_x M^*$ ($T_x M^*$ rappresenta il duale di $T_x M$) nell'isomorfismo $j : T_x M \rightarrow T_x M^*$ definito da $j(u)v = \langle u, v \rangle$. Se f è la restrizione ad M di una funzione \tilde{f} , di classe C^1 , definita in un intorno U di M , allora, dato $x \in M$, $\text{grad}f(x)$ non è altro che la proiezione ortogonale in \mathbb{R}^k di $\tilde{\text{grad}}\tilde{f}(x)$ su $T_x M$.

La definizione data di varietà non comprende alcuni degli oggetti più utili con i quali avremo a che fare come, per esempio, la palla unitaria chiusa di \mathbb{R}^n . Vogliamo quindi estendere quanto visto finora ad una classe più grande di oggetti: le cosiddette *varietà con bordo*. Per semplicità di notazione poniamo

$$\begin{aligned} H^m &= \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_m \geq 0\}, \\ \partial H^m &= \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_m = 0\}. \end{aligned}$$

Chiameremo ∂H^m *bordo* del *semispazio* H^m e $H^m \setminus \partial H^m$ *l'interno* di H^m .

Un sottoinsieme M di \mathbb{R}^k è detto una varietà (differenziabile) m -dimensionale (con bordo) di classe C^α , $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, se è localmente diffeomorfa ad H^m ; cioè se ogni punto $p \in M$ ammette un intorno (in M) C^α -diffeomorfo ad un aperto di H^m . Analogamente a quanto fatto nel caso delle varietà senza bordo, si definiscono le parametrizzazioni e le carte locali. In particolare, se M è una varietà con bordo, un punto $p \in M$ si dice *punto del bordo* se è un punto singolare di M , i.e. se $C_p(M)$ non è uno spazio vettoriale. Notiamo che, in questo caso, data una carta locale φ su un intorno U di p in M , si ha $\varphi(p) \in \partial H^m$. Infatti, per il Teorema 1.1.6, φ deve portare *punti singolari* di M in punti singolari di H^m .

L'insieme dei punti del bordo di M è detto *bordo* di M ed è denotato con ∂M .

Notiamo che può accadere che $\partial M = \emptyset$; in questo caso la definizione di varietà con bordo coincide con quella di varietà senza bordo.

Sia M una varietà di classe C^α , m -dimensionale, con bordo. Fissato $x \in \partial M$, lo spazio tangente ad M in x è dato da

$$T_x M = g'(y)(\mathbb{R}^m)$$

(ricordiamo che $\mathbb{R}^m = T_y H^m$) dove g è una parametrizzazione C^α di un intorno di x e $x = g(y)$ con $y \in \partial H^m$. Da questo segue che $T_x M$ è uno spazio vettoriale m -dimensionale come nel caso $x \in M \setminus \partial M$.

Per semplicità, nel seguito, con il termine varietà differenziabili ci riferiremo soltanto alle varietà C^∞ (lisce). Si verifica facilmente il seguente risultato.

TEOREMA 1.2.5. *Il bordo di una varietà differenziabile m -dimensionale con bordo è una varietà differenziabile $(m - 1)$ -dimensionale senza bordo.*

Il concetto di valore regolare, precedentemente introdotto, ha senso anche nell'ambito delle varietà con bordo.

LEMMA 1.2.6 (Sard). *Sia $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ un'applicazione C^α , con $\alpha > \max\{0, m - n\}$, definita sull'aperto U e sia C l'insieme dei suoi punti critici. Allora $f(C) \subset \mathbb{R}^n$ ha misura n -dimensionale nulla.*

Dal Lemma di Sard discende (vedi e.g. [43]) il seguente

COROLLARIO 1.2.7 (Brown). *Siano M, N varietà differenziabili di dimensione rispettivamente m ed n e sia $f : M \rightarrow N$ un'applicazione C^α . Se $\alpha > \max\{0, m - n\}$, i valori regolari formano un insieme denso.*

Il seguente risultato descrive la struttura della retroimmagine di un valore regolare per un'applicazione liscia tra varietà con bordo (vedi e.g. [43]).

TEOREMA 1.2.8. *Sia $f : M \rightarrow N$ un'applicazione C^α tra varietà differenziabili, rispettivamente m ed n dimensionali. Se $y \in N$ è un valore regolare sia per f che per $\partial f = f|_{\partial M}$, allora $f^{-1}(y)$ è una varietà C^α di dimensione $m - n$, il cui bordo è $f^{-1}(y) \cap \partial M$.*

Un'estensione importante del concetto di regolarità è quello di *trasversalità* (vedi per es. [1, 31, 32]). Sia $f : M \rightarrow N$ un'applicazione C^1 tra varietà differenziabili, diremo che f è *trasversa alla sottovarietà* $Z \subset N$, nel punto $x \in M$, quando $x \notin f^{-1}(Z)$ oppure, se $x \in M$, quando

$$T_{f(x)}Z + f'(x)(T_x M) = T_{f(x)}N.$$

Se questo accade per ogni $x \in f^{-1}(Z)$ si dice che f è trasversa a Z e si scrive $f \pitchfork Z$. Vale il seguente risultato (vedi e.g. [31]).

TEOREMA 1.2.9. *Consideriamo un'applicazione $f : M \rightarrow N$ di classe C^∞ tra due varietà differenziabili M ed N , di cui N priva di bordo. Se sia f che $\partial f = f|_{\partial M}$ sono trasverse ad una sottovarietà $Z \subset N$, priva di bordo. Allora $f^{-1}(Z)$ è una sottovarietà C^∞ di M con*

$$\partial f^{-1}(Z) = \partial M \cap f^{-1}(Z).$$

Inoltre $\dim(M) - \dim(f^{-1}(Z)) = \dim(N) - \dim(Z)$.

La trasversalità è una proprietà generica, in altre parole, fissata la sottovarietà Z , "quasi tutte" le applicazioni da M in N sono trasverse a Z . Il significato di questa affermazione è chiarito dal seguente risultato (vedi ad esempio [32]),

TEOREMA 1.2.10. *Siano M , N e Z come nel Teorema 1.2.9 e $f : M \rightarrow N$ un'applicazione continua. Fissata una funzione continua $\eta : M \rightarrow (0, \infty)$, esiste una $g : M \rightarrow N$, di classe C^∞ , tale che $g \pitchfork Z$ e $|f(x) - g(x)| < \eta(x)$ per ogni $x \in M$.*

Un altro concetto molto utile per lavorare con varietà differenziabili è quello di *orientazione*. Per semplicità ci limitiamo alle varietà lisce.

Cominciamo col parlare dell'orientazione di uno spazio vettoriale di dimensione finita. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e siano $B_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $B_2 = \{w_1, \dots, w_n\}$ due basi (ordinate) di V , possiamo scrivere

$$w_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j.$$

Diremo che B_1 è in relazione con B_2 se $\det(a_{ij}) > 0$. Come si verifica subito, questa è una relazione di equivalenza e l'insieme quoziente è costituito da due sole classi. Un'orientazione per V è una classe di equivalenza di basi di V . Fissata un'orientazione, una base B appartenente alla classe scelta sarà detta "positivamente orientata". Diremo che due basi B_1 e B_2 determinano la stessa orientazione se $\det(a_{ij}) > 0$ (basi concordi) o, viceversa, una opposta, se $\det(a_{ij}) < 0$ (basi discordi).

Sia $\tau : V \rightarrow W$ un isomorfismo tra spazi vettoriali orientati; fissate due basi B_V e B_W , positivamente orientate, rispettivamente di V e di W , diremo che τ inverte o preserva l'orientazione a seconda che $\tau(B_V)$ sia discorde o concorde con B_W .

Osserviamo che, se V e W sono spazi vettoriali orientati e

$$B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$$

e

$$B_W = \{w_1, \dots, w_n\}$$

sono due loro basi positivamente orientate, allora lo spazio $\hat{V} = V \times W$ riceve un'orientazione in modo naturale: basta scegliere

$$B = \{(v_1, 0), \dots, (v_n, 0), (0, w_1), \dots, (0, w_n)\}$$

come base positivamente orientata di \hat{V} . Questa è detta *orientazione prodotto*.

Convenendo di orientare \mathbb{R} scegliendo il numero 1 come sua base positivamente orientata, si ottiene un'orientazione su \mathbb{R}^m come prodotto di m copie di \mathbb{R} , detta *standard*.

Orientare una varietà significa assegnare un'orientazione per ogni spazio tangente in modo tale che, per ogni punto $x \in M$, esista una carta locale $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, definita in un intorno U di x , tale che, per ogni $y \in U$, $\varphi'(y) : T_y M \rightarrow \mathbb{R}^m$ porti l'orientazione specificata per $T_y M$ in quella standard di \mathbb{R}^m . Si può provare che una varietà differenziabile, connessa ed orientabile, ammette esattamente due orientazioni. È noto che non tutte le varietà differenziabili sono orientabili, come per esempio il nastro di Möbius.

Osserviamo che, se M e N sono varietà differenziabili rispettivamente m e n dimensionali, ed almeno una di esse è senza bordo, allora $M \times N$ è una varietà differenziabile $(m+n)$ -dimensionale. Come si verifica subito, se per esempio $\partial M = \emptyset$, allora $\partial(M \times N) = M \times \partial N$. Inoltre, se M e N sono orientate, anche $M \times N$ lo è in modo naturale. Basta dare a

$$T_{(x,y)}(M \times N) = T_x M \times T_y N$$

l'orientazione prodotto. Notiamo che, se M è una varietà orientabile, l'orientazione prodotto di $M \times M$ non dipende da quella di M .

Sia M una varietà con bordo m -dimensionale, il Teorema 1.2.5 ci dice che ∂M è una varietà $(m-1)$ -dimensionale. Se M è orientata, la sua orientazione ne induce una sul bordo nel modo che andiamo a definire e che chiameremo *orientazione bordo*.

Sia $x \in \partial M$, siccome $T_x \partial M$ ha codimensione 1 in $T_x M$, esistono esattamente due vettori unitari normali a $T_x \partial M$ in $T_x M$. Sia n_x quello esterno ad M . Se $B = \{v_1, \dots, v_{m-1}\}$ è una base di $T_x \partial M$, diciamo che B è positivamente orientata secondo l'orientazione bordo, se

$$\{n_x, v_1, \dots, v_{m-1}\}$$

è positivamente orientata per $T_x M$.

1.3. Equazioni differenziali ordinarie su varietà.

In questa parte trattiamo brevemente il concetto di equazione differenziale ordinaria su una varietà differenziabile. Quest'argomento, per sua natura a carattere interdisciplinare, è trattato in modi e contesti diversi da vari autori (vedi per es. [3] e [35]). Qui ne riportiamo alcuni cenni per completezza e comodità del lettore. La nostra esposizione è basata principalmente su [18].

1.3.1. Equazioni del primo ordine. Un'equazione differenziale ordinaria (autonoma) del primo ordine su una varietà $M \subset \mathbb{R}^k$ è data assegnando un campo vettoriale (continuo) tangente $g : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ su M . L'equazione di primo ordine associata a g può essere scritta nella forma

$$(1.3.1) \quad \dot{x} = g(x), \quad x \in M.$$

Una soluzione della (1.3.1) è, per definizione, un'applicazione C^1 , $x : J \rightarrow \mathbb{R}^k$, definita su un intervallo (non banale) $J \subset \mathbb{R}$, tale che $x(t) \in M$ e $\dot{x}(t) = g(x(t))$ identicamente su J .

Si può provare che (vedi e.g. [49]), assegnato un punto $p \in M$, esiste sempre una soluzione locale (nel senso specificato sopra) del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = g(x) \\ x(0) = p \end{cases}.$$

Se $\varphi : M \rightarrow N$ è un diffeomorfismo C^1 tra due varietà differenziabili e g è un campo vettoriale tangente su M , si può ottenere un campo vettoriale tangente h su N ponendo $h(z) = \varphi'[\varphi^{-1}(z)] g[\varphi^{-1}(z)]$. In questo modo, se $z = \varphi(x)$, i due vettori $h(z)$ e $g(x)$ si corrispondono sotto l'isomorfismo $\varphi'(x) : T_x M \rightarrow T_z N$. Per questo motivo diciamo che h e g si corrispondono sotto φ . Osserviamo che in questo caso l'equazione (1.3.1) è equivalente a

$$(1.3.2) \quad \dot{z} = h(z), \quad z \in N,$$

nel senso che $x : J \rightarrow M$ è una soluzione di (1.3.1) se e solo se la composizione $z = \varphi \circ x$ è una soluzione di (1.3.2). Quindi le soluzioni di (1.3.1) e (1.3.2) si corrispondono sotto il diffeomorfismo φ .

Un'equazione differenziale non autonoma del primo ordine su una varietà $M \subset \mathbb{R}^k$ è data assegnando, su un sottoinsieme aperto V di $\mathbb{R} \times M$, un campo vettoriale (continuo) non autonomo $g : V \rightarrow \mathbb{R}^k$ tale che $g(t, x) \in T_x M$ per ogni $(t, x) \in V$. L'equazione del primo ordine associata a g può essere scritta nella forma:

$$(1.3.3) \quad \dot{x} = g(t, x), \quad (t, x) \in V.$$

Una soluzione di quest'equazione è, per definizione, un'applicazione C^1 su un intervallo $J \subset \mathbb{R}$, $x : J \rightarrow M$, tale che, per tutti i $t \in J$, $(t, x(t)) \in V$ e $\dot{x}(t) = g(t, x(t))$.

Osserviamo che l'equazione (1.3.3) può essere pensata come una speciale equazione autonoma sulla sottovarietà V di $\mathbb{R} \times M \subset \mathbb{R}^{k+1}$. Infatti la (1.3.3) risulta chiaramente equivalente al sistema

$$(1.3.4) \quad \begin{cases} \dot{t} = 1 \\ \dot{x} = g(t, x), \end{cases} \quad (t, x) \in V,$$

e il campo vettoriale $(t, x) \mapsto (1, g(t, x))$ è tangente a V . Con il termine "equivalente" intendiamo dire che le soluzioni della (1.3.3) e della (1.3.4) sono in corrispondenza biunivoca.

Come messo in risalto precedentemente, un'equazione differenziale autonoma su una varietà M è trasformata in una equivalente da un diffeomorfismo $\varphi : M \rightarrow N$. Allora, poichè le varietà differenziabili sono localmente diffeomorfe agli aperti degli spazi euclidei, i risultati classici circa la locale esistenza ed unicità per le equazioni differenziali in \mathbb{R}^m si applicano immediatamente a questo contesto più generale. In

particolare, si prova che le soluzioni dell'equazione (1.3.3) possono essere estese ad una massimale.

Procedendo come nel caso delle equazioni in \mathbb{R}^m , si prova che il dominio di una soluzione massimale $x(\cdot)$ è un intervallo aperto (α, β) con $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$. Inoltre, dato $t_0 \in (\alpha, \beta)$ ed un insieme compatto K nel dominio V di $g : V \rightarrow \mathbb{R}^k$, nessuno dei due grafici delle restrizioni di $x(\cdot)$ a $(\alpha, t_0]$ e $[t_0, \beta)$ è contenuto in K . Questo fatto è noto come proprietà di Kamke delle soluzioni massimali (in una varietà differenziabile). In particolare, se M è una varietà compatta e $V = \mathbb{R} \times M$, ogni soluzione massimale di (1.3.3) è definita sull'intero asse reale. Con gli stessi metodi usati negli spazi euclidei, si può provare il seguente importante risultato.

TEOREMA 1.3.1. *Sia $M \subset \mathbb{R}^k$ una varietà differenziabile e $g : V \rightarrow \mathbb{R}^k$ un campo vettoriale non autonomo, localmente lipschitziano, tangente ad M , definito su un sottoinsieme aperto V di $\mathbb{R} \times M$. Dato $(\tau, p) \in V$, denotiamo con $x(t, \tau, p)$ (quando definito) il valore in t della soluzione massimale passante per (τ, p) . Sia $\{(\tau_n, p_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione in V convergente a $(\tau_0, p_0) \in V$ e $[a, b]$ un intervallo compatto contenuto nel dominio di $x(\cdot, \tau_0, p_0)$. Allora, per n sufficientemente grande, $x(\cdot, \tau_n, p_n)$ è definita in $[a, b]$ e*

$$x(t, \tau_n, p_n) \rightarrow x(t, \tau_0, p_0)$$

uniformemente in $[a, b]$ quando $n \rightarrow +\infty$. In particolare, l'insieme di tutti i (t, τ, p) tali che $x(t, \tau, p)$ è ben definita è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R} \times V$.

1.3.2. Equazioni del secondo ordine. A questi brevi cenni sulle equazioni differenziali ordinarie del primo ordine su varietà conviene aggiungere alcune note su quelle del secondo ordine. Quest'ultime risultano, per loro stessa natura, più complesse e legate alla struttura geometrica della varietà su cui "vivono". L'attenzione per queste equazioni è giustificata, oltre che da un interesse intrinseco, anche dalla loro importante interpretazione fisica.

Una forza attiva su una varietà $N \subset \mathbb{R}^s$ è un'applicazione continua $\varphi : \mathbb{R} \times TN \rightarrow \mathbb{R}^s$ tale che

$$\varphi(t, x, y) \in T_x N \text{ per ogni } (t; x, y) \in \mathbb{R} \times TN.$$

L'equazione di moto associata a φ può essere scritta nella forma

$$(1.3.5) \quad \ddot{x}_\pi = \varphi(t; x, \dot{x}).$$

Una soluzione di (1.3.5), nell'intervallo J , è un'applicazione di classe C^2 $x : J \rightarrow N$ tale che $\dot{x}_\pi(t) = \varphi(t; x(t), \dot{x}(t))$ per ogni $t \in J$, dove $\dot{x}_\pi(t)$ denota la proiezione ortogonale su $T_{x(t)}N$ di $\ddot{x}(t)$. In altre parole $\dot{x}_\pi(t)$ è la derivata covariante $\nabla_{\dot{x}(t)}\dot{x}(t)$, essendo ∇ la connessione riemanniana su N ereditata da \mathbb{R}^s (vedi e.g. [5]). Come è noto, l'equazione del secondo ordine (1.3.5) può essere scritta, in modo equivalente, come un sistema del primo ordine sul fibrato tangente TN come segue

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = r(x, y) + \varphi(t; x, y), \end{cases}$$

dove $r : TN \rightarrow \mathbb{R}^s$ è un'opportuna applicazione liscia tale che, per ogni $x \in N$, $r(x, \cdot)$ è una forma quadratica a valori in $(T_x N)^\perp$. Tale applicazione è strettamente correlata alla seconda forma fondamentale su N e può essere interpretata come la reazione vincolare di N .

Un campo vettoriale della forma

$$(x, y) \mapsto (y, r(x, y) + \varphi(t; x, y)),$$

φ come sopra, è detto un *campo vettoriale del secondo ordine* (associato a φ). Vale il seguente risultato (vedi e.g. [18]).

TEOREMA 1.3.2. *Sia N una varietà liscia in \mathbb{R}^s . Definiamo*

$$T^2N = \{(x; u, v) \in \mathbb{R}^k \times (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k) : x \in N; u, v \in T_xN\}.$$

Esiste ed è unica un'applicazione liscia $\nu : T^2N \rightarrow \mathbb{R}^s$ tale che

- (1) $\nu(x; u, v) \in (T_xN)^\perp$ per ogni $(x; u, v) \in T^2N$;
- (2) per ogni $x \in N$, l'applicazione $\nu(x; \cdot, \cdot) : T_xN \times T_xN \rightarrow (T_xN)^\perp$ è bilineare e simmetrica.
- (3) $(v_1, v_2) \in T_{(x,y)}TN$ se e soltanto se $v_1 \in T_xN$ e la proiezione ortogonale di v_2 su $(T_xN)^\perp$ coincide con $\nu(x; y, v_1)$.

Si ha $r(x, y) = \nu(x; y, y)$ per ogni $(x, y) \in TN$. Inoltre, dal teorema citato segue che un vettore (v_1, v_2) appartiene a $T_{(x,y)}TN$ se e soltanto se può essere scritto nella forma $(v, \nu(x; y, v) + w)$ con $v, w \in T_xN$. Mettiamo in risalto che, a causa della bilinearità, $\nu(x; y, 0) = 0$ per ogni $(x, y) \in TN$. Allora ogni campo vettoriale della forma $(x, y) \mapsto (0, \vartheta(x, y))$, con $\vartheta(x, y) \in T_xN$ per ogni $(x, y) \in TN$, è un campo vettoriale tangente su TN , anche se non è del secondo ordine.

Nel seguito tratteremo equazioni del secondo ordine, dipendenti da un parametro $\lambda \geq 0$, del tipo

$$(1.3.6) \quad \ddot{x}_\pi = h(x, \dot{x}) + \lambda f(t; x, \dot{x}),$$

dove assumeremo che $h : TN \rightarrow \mathbb{R}^s$ e $f : \mathbb{R} \times TN \rightarrow \mathbb{R}^s$ siano applicazioni continue tali che $h(x, y)$ e $f(t; x, y)$ appartengano a T_xN per ogni $(t; x, y) \in \mathbb{R} \times TN$ e che f sia T -periodica rispetto alla prima variabile.

L'equazione (1.3.6) può essere scritta equivalentemente su $M = TN \subset \mathbb{R}^{2s}$ nella forma

$$(1.3.7) \quad \dot{\xi} = \hat{h}(\xi) + \lambda \bar{f}(t, \xi),$$

dove $\xi = (x, y)$ e

$$\hat{h}(x, y) = (y, r(x, y) + h(x, y)) \quad , \quad \bar{f}(t; x, y) = (0, f(t; x, y)).$$

Si verifica subito che \hat{h} ed \bar{f} sono campi vettoriali tangenti su $M = TN$; quindi (1.3.7) è, in realtà, un'equazione del primo ordine su M .

1.4. Alcuni strumenti topologici.

Alcuni strumenti topologici, come il grado di un campo vettoriale tangente ad una varietà (o caratteristica di Eulero o indice di Hopf o rotazione) e l'indice di punto fisso, sono molto utili in analisi non lineare e risulteranno essenziali nella nostra trattazione. Nonostante che tali argomenti siano facilmente reperibili in molti testi di topologia differenziale ed algebrica (vedi ad es. [13, 14, 31, 32, 37, 43]), essi non sempre risultano affrontati in modo adeguato alle nostre esigenze e, talvolta, alcune trattazioni appaiono persino discordanti. Si osserva inoltre che, per la grande varietà delle costruzioni e dei contesti possibili (vedi per es. i riferimenti in [2]), non sempre risultano chiare le mutue relazioni tra i suddetti strumenti.

Si ritiene, pertanto, utile presentare uno scorcio dei risultati e delle definizioni più importanti con particolare riferimento al caso delle varietà differenziabili. Volutamente, abbiamo tralasciato di esporre le importanti teorie del grado di Brouwer

per applicazioni tra varietà e del numero di Lefschetz, poiché queste avranno un ruolo al più marginale negli sviluppi successivi. Parimenti non trattiamo la teoria del grado di Leray-Schauder, in quanto faremo uso solamente di metodi a dimensione finita.

Un approccio elegante ed unificatore è la teoria dell'indice di intersezione sulla cui costruzione diamo alcuni cenni.

1.4.1. L'indice di intersezione. Siano M ed N varietà differenziabili senza bordo, $f : M \rightarrow N$ un'applicazione continua, e $Z \subset N$ una sottovarietà chiusa di N priva di bordo. Supponiamo che la codimensione di Z in N eguagli la dimensione di M e che sia M sia il fibrato normale $N(Z, N)$ siano orientati. Se $f^{-1}(Z)$ è compatto, diremo che f è Z -*ammissibile*. In questo caso si può associare alla coppia (f, Z) un intero, $\text{in}(f, Z)$, chiamato indice di intersezione di f con Z , che, in termini semplici, conta (algebricamente) il numero delle intersezioni dell'immagine di f con Z (vedi per es. [32, 31]). Quest'intero, nel caso particolare che $Z = \{q\}$, $q \in N$, e che M e $T_q N$ siano orientati (e abbiano la stessa dimensione), non è altro che il grado di Brouwer di f rispetto a q (vedi per es. [43]). Come vedremo, non è sempre necessario supporre che M ed $N(Z, N)$ siano orientabili. Quest'ipotesi non occorre, per esempio, quando un'orientazione di M , in ogni punto $p \in f^{-1}(Z)$, determina univocamente un'orientazione del fibrato $N(Z, N)$ in $f(p)$. Mostriamo che questa situazione si verifica per le definizioni (basate sulla teoria dell'intersezione) del grado di un campo vettoriale tangente e dell'indice di punto fisso.

Per definire $\text{in}(f, Z)$, supponiamo dapprima che f sia liscia e trasversa a Z . Sia $p \in f^{-1}(Z)$; denotiamo con $\pi_{f(p)}$ la proiezione ortogonale di $T_{f(p)}N$ sul sottospazio $N_{f(p)}(Z, N)$ di \mathbb{R}^k . Poiché $f \pitchfork Z$, la composizione

$$T_p M \xrightarrow{f'(p)} T_{f(p)} N \xrightarrow{\pi_{f(p)}} N_{f(p)}(Z, N) ,$$

è lineare e suriettiva; quindi, per l'eguaglianza delle dimensioni, è un isomorfismo.

Il Teorema 1.2.9 implica che $f^{-1}(Z)$ è discreto, e quindi necessariamente finito, perché è compatto per ipotesi. In questo caso, l'indice di intersezione è definito come la somma

$$\text{in}(f, Z) = \sum_{p \in f^{-1}(Z)} \text{sign}(\pi_{f(p)} f'(p)) ,$$

dove $\text{sign}(\pi_{f(p)} f'(p))$ è $+1$ o -1 a seconda che $\pi_{f(p)} f'(p)$ preservi o inverta l'orientazione. Come accennato precedentemente, quando i due spazi vettoriali $T_p M$ e $N_{f(p)}(Z, N)$ possono essere canonicamente identificati, non è necessaria l'orientazione delle varietà per definire l'intero $\text{sign}(\pi_{f(p)} f'(p))$.

Un'applicazione continua $H : M \times [0, 1] \rightarrow N$ è detta *omotopia*. Se $H^{-1}(Z)$ è un compatto, allora si dice che H è un'omotopia Z -*ammissibile*. Due applicazioni $f : M \rightarrow N$ e $g : M \rightarrow N$ si dicono omotope se esiste un'omotopia H tale che $H(\cdot, 0) = f$ e $H(\cdot, 1) = g$ (Z -*ammissibilmente omotope* se H è Z -ammissibile).

L'indice d'intersezione, come sopra definito, risulta invariante per omotopie Z -ammissibili lisce. Infatti, modificando leggermente i corrispondenti teoremi di [31] e [32], si può provare il seguente risultato:

TEOREMA 1.4.1. *Siano M, N e Z varietà come sopra e sia $H : M \times [0, 1] \rightarrow N$ un'omotopia liscia, Z -ammissibile e tale che $H(\cdot, 0) \pitchfork Z$ e $H(\cdot, 1) \pitchfork Z$, allora*

$$\text{in}[H(\cdot, 0), Z] = \text{in}[H(\cdot, 1), Z] .$$

Inoltre, data un'applicazione liscia $f : M \rightarrow N$, trasversa a Z , se U è un sottoinsieme aperto di M contenente $f^{-1}(Z)$, si ha

$$\text{in}(f, Z) = \text{in}(f|_U, Z),$$

dove $f|_U$ denota la restrizione di f a U .

Per estendere la definizione dell'indice d'intersezione al caso in cui $f : M \rightarrow N$ sia un'applicazione continua e Z -ammissibile, fissiamo un intorno aperto e relativamente compatto U di $f^{-1}(Z)$ in M . Per il Teorema 1.2.10, possiamo scegliere $g : M \rightarrow N$ liscia e trasversa a Z , tale che

$$(1.4.1) \quad \max_{p \in \bar{U}} |f(p) - g(p)| < \delta,$$

con

$$\delta = \frac{1}{4} \min \left\{ \min_{q \in \bar{U}} \varepsilon(f(q)), \text{dist}(f(\text{Fr}U), Z) \right\},$$

dove $\varepsilon : M \rightarrow (0, \infty)$ è come nel Teorema 1.2.3. Notiamo che la distanza a secondo membro è positiva in quanto $f(\text{Fr}U)$ è compatto e Z è chiuso. Si pone, per definizione,

$$\text{in}(f, Z) = \text{in}(g|_U, Z).$$

Proviamo che la definizione appena data non dipende dalla scelta di g . Infatti, se g_1 e g_2 soddisfano la condizione (1.4.1), allora sono Z -ammissibili e Z -ammissibilmente omotope tra di loro. Per vederlo poniamo

$$h(x, \lambda) = \lambda g_1(x) + (1 - \lambda) g_2(x),$$

poiché

$$\begin{aligned} |f(x) - h(x, \lambda)| &\leq |f(x) - g_1(x)| + (1 - \lambda) |g_1(x) - g_2(x)| \\ &< 2\delta \leq \frac{1}{2} \varepsilon(f(x)), \end{aligned}$$

ha senso porre $H(x, \lambda) = \pi(h(x, \lambda))$, dove π è la proiezione introdotta nel Teorema 1.2.3. Per ogni $\lambda \in [0, 1]$ e $x \in \text{Fr}U$, si ha

$$\begin{aligned} |f(x) - H(x, \lambda)| &\leq |f(x) - h(x, \lambda)| + |H(x, \lambda) - h(x, \lambda)| \\ &= |f(x) - h(x, \lambda)| + |\pi(h(x, \lambda)) - h(x, \lambda)| \\ &\leq 2|f(x) - h(x, \lambda)| \leq 4\delta \\ &< \text{dist}(f(x), Z). \end{aligned}$$

Inoltre,

$$\text{dist}(H(x, \lambda), Z) \geq \text{dist}(f(x), Z) - |f(x) - H(x, \lambda)| > 0.$$

Dunque H è un'omotopia Z -ammissibile.

Si verifica inoltre che la definizione data di indice non dipende neppure dalla scelta dell'intorno U di Z . Infatti, se U_1 e U_2 sono sottoinsiemi aperti relativamente compatti di M contenenti $f^{-1}(Z)$, e $g : M \rightarrow N$ è sufficientemente vicina a f su $\bar{U}_1 \cap \bar{U}_2$, si ha $g^{-1}(Z) \subset U_1 \cap U_2$. Questa è una conseguenza del fatto che $f(\bar{U}_1 \cup \bar{U}_2 \setminus U_1 \cap U_2)$ è un compatto che non interseca Z .

Le proprietà principali dell'indice d'intersezione sono le seguenti:

Soluzione: Se $\text{in}(f, Z) \neq 0$ allora $f^{-1}(Z) \neq \emptyset$.

Taglio: Se U è un sottoinsieme aperto di M contenente $f^{-1}(Z)$, allora

$$\text{in}(f, Z) = \text{in}(f|_U, Z).$$

Additività: Se U_1 e U_2 sono aperti in M , $U_1 \cap f^{-1}(Z)$ e $U_2 \cap f^{-1}(Z)$ sono compatti, e $U_1 \cap U_2 \cap f^{-1}(Z)$ è vuoto, allora

$$\text{in}(f|_{U_1 \cup U_2}, Z) = \text{in}(f|_{U_1}, Z) + \text{in}(f|_{U_2}, Z).$$

Omotopia: Se $H : M \times [0, 1] \rightarrow N$ è continua e Z -ammissibile (cioè $H^{-1}(Z)$ è compatto), allora $\text{in}(H(\cdot, \mu), Z)$ non dipende da $\mu \in [0, 1]$.

1.4.2. Il grado di un campo vettoriale tangente ad una varietà. Sia $M \subset \mathbb{R}^k$ una varietà differenziabile liscia e senza bordo e $g : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ un campo vettoriale tangente continuo su un aperto U di M . Se g è *ammissibile* (per il grado) su U , cioè se l'insieme dei suoi zeri è compatto, allora (vedi per esempio [31, 32, 43, 48]) è possibile assegnare a g un intero, $\text{deg}(g, U)$ chiamato il grado (o indice di Hopf, o caratteristica di Eulero o rotazione) del campo vettoriale tangente su U . Tutte le proprietà usuali del grado di Brouwer dei campi vettoriali sugli aperti degli spazi euclidei sono sempre valide in questo contesto più generale.

Per evitare ogni possibile confusione, sottolineiamo che in letteratura esiste un'altra possibile estensione, al caso delle varietà differenziabili, del grado di Brouwer (vedi [43]) detta grado di Brouwer per applicazioni. In termini semplici, questa seconda estensione, conta (algebricamente) il numero delle soluzioni di un'equazione della forma $h(x) = y$, dove $h : M \rightarrow N$ è un'applicazione tra varietà orientate della stessa dimensione e $y \in N$ è tale che $h^{-1}(y)$ è compatto. Questa dicotomia di nozioni è dovuta al fatto che il problema di contare le soluzioni di un'equazione della forma $h(x) = y$, nel caso delle varietà, non può essere ridotto a contare gli zeri di un campo vettoriale, come invece si può fare in \mathbb{R}^k ponendo $g(x) = h(x) - y$.

Il grado di un campo vettoriale tangente può essere definito in termini di indice di intersezione. Sia $g : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ un campo vettoriale tangente definito su una varietà differenziabile senza bordo $M \subset \mathbb{R}^k$. Denotiamo con $G : M \rightarrow TM$ l'applicazione $x \mapsto (x, g(x))$ e con $M_0 = \{(x, 0) \in TM\}$ la sezione nulla di TM . La varietà M può essere identificata in modo naturale con M_0 tramite l'applicazione $p \mapsto (p, 0)$. Dato $p \in G^{-1}(M_0)$, vediamo come $T_p M$ può essere identificato canonicamente con $N_{G(p)}(M_0, TM)$. Chiaramente¹,

$$\begin{aligned} T_{(p,0)}TM &= T_p M \times T_p M \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k, \\ T_{(p,0)}M_0 &= T_p M \times \{0\}. \end{aligned}$$

Dunque, lo spazio ortogonale $N_{(p,0)}(M_0, TM)$ di $T_{(p,0)}M_0$ in $T_{(p,0)}TM$ è lo spazio $\{0\} \times T_p M$, che è una copia naturale di $T_p M$.

Quanto detto implica che un'orientazione di $T_p M$ ne induce, in modo naturale, una su $N_{(p,0)}(M_0, TM) = N_{G(p)}(M_0, TM)$.

¹Per vederlo, scriviamo $N \subset \mathbb{R}^s$ in un intorno di z come insieme di livello regolare di una opportuna funzione $\phi : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^{s-n}$ di classe C^∞ . Si può supporre $N = \{x \in \mathbb{R}^s : \phi(x) = 0\}$. Allora

$$\begin{aligned} TN &= \{(q, v) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^s : \phi'(q)v = 0, \phi(q) = 0\}, \\ T_{(z,0)}TN &= \{(w_1, w_2) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^s : \phi'(z)w_1 = 0, \phi'(z)w_2 = 0\} \\ &= T_z N \times T_z N. \end{aligned}$$

Se g è *ammissibile*, cioè se $g^{-1}(0)$ è compatto, G risulta M_0 -ammissibile. Possiamo quindi definire

$$\deg(g, M) = \text{in}(G, M_0).$$

Il grado di un campo vettoriale tangente eredita le proprietà dell'indice di intersezione che riformuliamo per comodità del lettore.

Soluzione: Se $\deg(g, M) \neq 0$, allora g ha uno zero in M .

Taglio: Se U è un sottoinsieme aperto di M contenente $g^{-1}(0)$, allora

$$\deg(g, M) = \deg(g, U);$$

dove $\deg(g, U)$ indica il grado della restrizione $g|_U$ alla varietà U .

Additività: Se V_1 e V_2 sono aperti di M , $V_1 \cap g^{-1}(0)$ e $V_2 \cap g^{-1}(0)$ sono compatti, e $V_1 \cap V_2 \cap g^{-1}(0)$ è vuoto, allora

$$\deg(g, V_1 \cup V_2) = \deg(g, V_1) + \deg(g, V_2).$$

Omotopia: Se $H : M \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^k$ è un'omotopia ammissibile di campi vettoriali tangenti, cioè, $H(x, s) \in T_x M$ per ogni $(x, s) \in M \times [0, 1]$ e $H^{-1}(0)$ è compatto, allora $\deg(H(\cdot, s), M)$ non dipende da $s \in [0, 1]$.

Una relazione utile per il calcolo del grado di un campo vettoriale tangente si può ottenere mediante il seguente risultato (vedi per esempio [43]).

TEOREMA 1.4.2. *Sia $g : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ un campo vettoriale tangente di classe C^1 su un aperto U di una varietà differenziabile $M \subset \mathbb{R}^k$. Se $g(p) = 0$ per un $p \in U$, allora la derivata $g'(p) : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^k$ manda $T_p M$ in sé. Quindi, $g'(p)$ può essere visto come un endomorfismo di $T_p M$ e, conseguentemente, il suo determinante $\det(g'(p))$ è ben definito.*

Sia $g : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ un campo vettoriale tangente di classe C^1 su un aperto U di una varietà differenziabile $M \subset \mathbb{R}^k$, e sia $p \in U$ uno zero di g . Il campo g è detto *non degenerare* in p se $g'(p)$, come applicazione da $T_p M$ in sé, è un isomorfismo. In questo caso l'*indice* di p (o indice di g in p) è, per definizione,

$$i(g, p) = \text{sign}(\det g'(p)).$$

Nel caso particolare che $g : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ sia un campo vettoriale di classe C^1 , tangente, ammissibile e non degenerare, cioè avente soltanto zeri non degeneri, si ha $G \pitchfork M_0$, dove $G(x) = (x, g(x))$. Inoltre

$$(1.4.2) \quad \deg(g, M) = \sum_{p \in g^{-1}(0)} i(g, p).$$

Questa uguaglianza ha senso in quanto $g^{-1}(0)$ è compatto (essendo g ammissibile) e, come si verifica subito, discreto; quindi la somma che appare nella (1.4.2) è estesa ad un insieme finito. L'identità (1.4.2) può essere utilizzata come punto di partenza per una definizione di grado indipendente dall'indice di intersezione (vedi ad esempio [43]).

È conveniente definire non soltanto l'indice di uno zero non degenerare di un campo vettoriale g ma, più in generale, di un qualsiasi compatto relativamente

aperto $Z \subset g^{-1}(0)$ di zeri del campo. In tali condizioni esiste un intorno aperto relativamente compatto U di Z tale che $U \cap g^{-1}(0) = Z$. Si pone

$$i(g, Z) = \deg(g, U).$$

Ovviamente, per la proprietà del taglio, questa definizione è ben posta.

Consideriamo adesso il caso in cui M sia una varietà con bordo (possibilmente anche $\partial M = \emptyset$). Supponiamo che $g^{-1}(0) \cap (M \setminus \partial M)$ sia compatto. In questo caso, $\deg(g, M \setminus \partial M)$ è ben definito, si dice che g è ammissibile (su M) e si pone

$$\deg(g, M) = \deg(g, M \setminus \partial M).$$

In particolare se M è compatta e g non si annulla su ∂M , allora g è ammissibile. Ciò accade, ad esempio, se g è strettamente esterno lungo ∂M (M compatta). Siano g_1 e g_2 due campi vettoriali tangenti strettamente esterni lungo ∂M ; si verifica subito che, se M è compatta, l'omotopia $H(x, s) = (1 - s)g_1(x) + sg_2(x)$ è ammissibile, quindi

$$\deg(g_1, M) = \deg(g_2, M).$$

Ha senso quindi definire un intero, detto *caratteristica di Eulero - Poincaré* $\chi(M)$ di M , come il valore comune di tutti i campi vettoriali tangenti ad M che puntano strettamente all'esterno lungo ∂M .

È possibile definire $\chi(M)$ anche mediante la teoria dell'omologia. Se una varietà M è dello stesso tipo di omotopia² di un poliedro compatto $|K_M|$, si pone infatti

$$\chi(M) = \chi(K_M) = \sum_{p \geq 0} (-1)^p B_p,$$

dove B_p è il p -esimo numero di Betti del complesso simpliciale K_M .

Il famoso Teorema di Poincaré-Hopf asserisce che le due definizioni di $\chi(M)$, nel caso che M sia compatta coincidono (vedi ad esempio [32]).

1.4.3. L'indice di punto fisso. Sia $M \subset \mathbb{R}^k$ una varietà differenziabile senza bordo e U un suo aperto. Un'applicazione continua $f : U \rightarrow M$ è detta *ammissibile* (per l'indice di punto fisso) se l'insieme $\text{Fix}(f) = \{x \in U : x = f(x)\}$ è compatto. In tali condizioni è definito un intero, denotato con $\text{ind}(f, U)$, che, in termini semplici, conta (algebricamente) i punti fissi della f . Tale intero soddisfa tutte le proprietà classiche del grado di Brouwer: soluzione, taglio, adittività, invarianza per omotopia, normalizzazione, etc.. Un'esposizione dettagliata di questo argomento può essere trovata, per esempio su [30, 47] e relativi riferimenti. Sottolineiamo che, se M è un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^m , allora $\text{ind}(f, U)$ è proprio il grado di Brouwer di $I - f$, dove $(I - f)(x) = x - f(x)$.

L'indice di punto fisso è stato studiato da molti autori con le tecniche e nei contesti più disparati. È stato però individuato (vedi per es. [2, 7, 17, 30]) un insieme di assiomi che lo caratterizzano. Questi corrispondono alle proprietà di *normalizzazione*, *taglio* e *omotopia*. Per completezza, riteniamo comunque opportuno fornire una definizione di indice di punto fisso basata sulla teoria dell'indice di intersezione.

Data $f : U \rightarrow M$, ammissibile su un aperto U di M , definiamo $F : U \rightarrow N = M \times M$ ponendo $F(x) = (x, f(x))$ e denotiamo con Δ la diagonale $\{(x, x) \in M \times M\}$ di $M \times M$. Si verifica subito che, se f è ammissibile, F è Δ -ammissibile. Fissato

²Due spazi topologici A e B si dicono dello stesso tipo di omotopia se esistono $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow A$ tali che $f \circ g$ e $g \circ f$ sono omotope rispettivamente alle identità su A e su B .

un punto $p \in M$ e data un'orientazione di $T_p M$ attribuiamo un'orientazione allo spazio $N_{(p,p)}(\Delta, M \times M)$ normale a Δ in $M \times M$ come segue. Assegnamo al sottospazio $E_p = T_p M \times \{0\}$ di $T_{(p,p)}(M \times M)$ l'orientazione ereditata da $T_p M$ mediante l'isomorfismo $u \mapsto (u, 0)$. Poiché E_p è un complemento di $T_{(p,p)}\Delta$ in $T_{(p,p)}(M \times M)$, esso è canonicamente isomorfo allo spazio normale $N_{(p,p)}(\Delta, M \times M)$. Conseguentemente, l'orientazione data su E_p ne induce una su $N_{(p,p)}(\Delta, M \times M)$.

In definitiva, se $p \in \text{Fix}(f)$, un'orientazione di $T_p M$ ne induce in modo naturale una su $N_{(p,f(p))}(\Delta, M \times M)$, quindi $\text{ind}(f, \Delta)$ è ben definito indipendentemente dall'orientabilità di M ed ha senso porre

$$\text{ind}(f, U) = \text{ind}(F, \Delta).$$

Le principali proprietà che caratterizzano l'indice di punto fisso sono le seguenti:

Normalizzazione: Se $f : M \rightarrow M$ è costante, allora $\text{ind}(f, U) = 1$.

Additività: Se $f : U \rightarrow M$ è ammissibile e V_1 e V_2 sono aperti disgiunti di U tali che $\text{Fix}(f) \subset V_1 \cup V_2$, allora

$$\text{ind}(f, U) = \text{ind}(f, V_1) + \text{ind}(f, V_2).$$

Omotopia: Se $H : U \times [0, 1] \rightarrow M$ è un'omotopia ammissibile, cioè tale che l'insieme $\{x \in U : H(x, s) = x \text{ per qualche } s \in [0, 1]\}$ è compatto, allora $\text{ind}(H(\cdot, s), U)$ non dipende da $s \in [0, 1]$.

Dalle suddette tre proprietà ne discendono facilmente altre due:

Esistenza: Se $f : U \rightarrow M$ è ammissibile e $\text{ind}(f, M) \neq 0$, allora $\text{Fix}(f) \neq \emptyset$.

Taglio: Se $f : U \rightarrow M$ è ammissibile e V e U sono aperti di M tali che $\text{Fix}(f) \subset V \subset U$, allora $\text{ind}(f, V) = \text{ind}(f, U)$.

L'indice di punto fisso può anche essere usato per dare un'ulteriore definizione di grado di un campo vettoriale tangente C^1 . Si può infatti provare che sussiste una relazione tra l'indice di punto fisso del flusso locale indotto da un campo vettoriale C^1 e il grado di quest'ultimo (vedi [20]). Più precisamente, dato un campo vettoriale $g : M \rightarrow \mathbb{R}^k$, di classe C^1 , tangente ad $M \subset \mathbb{R}^k$, possiamo considerare il problema di Cauchy in M

$$(1.4.3) \quad \begin{cases} \dot{x} = g(x) \\ x(0) = p. \end{cases}$$

Fissato $\tau > 0$, denotiamo con D_τ l'insieme dei punti $p \in M$ tali che la soluzione di (1.4.3) è prolungabile (almeno) fino a $t = \tau$. Sia $\Phi_\tau : D_\tau \rightarrow M$ l'operatore di traslazione di Poincaré che associa ad ogni $p \in D_\tau$ il valore al tempo τ della soluzione di (1.4.3). Si può provare che D_τ è un insieme aperto in M e che Φ_τ è un'applicazione di classe C^1 .

Se U è un aperto relativamente compatto di M tale che $g^{-1}(0) \cap \text{Fr}U = \emptyset$, esiste una costante positiva $\varepsilon = \varepsilon(U)$ tale che $\Phi_\tau(p) \neq p$ per $p \in \partial U$, $0 < |\tau| \leq \varepsilon$. Questo ci permette di affermare che l'indice di punto fisso di Φ_τ è ben definito per $\tau \in (-\varepsilon, 0)$ e $\tau \in (0, \varepsilon)$. Inoltre per la proprietà di invarianza per omotopia, $\text{ind}(\Phi_\tau, U)$ è indipendente da τ in ognuno dei due intervalli $(-\varepsilon, 0)$ e $(0, \varepsilon)$.

Oltre a ciò si può provare che

$$(1.4.4) \quad \deg(g, U) = \lim_{\tau \rightarrow 0^-} \text{ind}(\Phi_\tau, U).$$

Quest'identità (che è anche una delle possibili definizioni di grado di un campo vettoriale tangente di classe C^1) si rivelerà d'importanza cruciale nel seguito.

L'indice di punto fisso dell'operatore di traslazione

In questo capitolo presentiamo una formula che mette in relazione l'indice di punto fisso dell'operatore di traslazione di Poincaré, associato ad un campo vettoriale tangente ad una varietà differenziabile, con il grado del campo stesso. La conoscenza di questo indice si rivelerà importante per determinare la struttura dell'insieme delle soluzioni armoniche di perturbazioni periodiche di equazioni differenziali autonome, sia del primo che del secondo ordine.

La nostra esposizione è ispirata essenzialmente a [26].

2.1. L'indice di punto fisso per equazioni del primo ordine

Sia M una varietà differenziabile m -dimensionale immersa in qualche \mathbb{R}^k , e sia $g : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ un campo vettoriale continuo tangente, tale che il problema di Cauchy

$$(2.1.1) \quad \begin{cases} \dot{x} = g(x) \\ x(0) = p, \end{cases}$$

ammetta un'unica soluzione per ogni $p \in M$. Sotto queste condizioni risulta definito un flusso locale $\{\Phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ su M . Supponiamo che, per qualche $T > 0$, l'indice di punto fisso di Φ_T in un sottoinsieme aperto U di M sia ben definito (cioè Φ_T è definito su U e l'insieme dei punti fissi di $\Phi_T|_U$ è compatto). Proveremo che

$$(2.1.2) \quad \text{ind}(\Phi_T, U) = \text{deg}(-g, U) = (-1)^m \text{deg}(g, U).$$

Dove $\text{deg}(g, U)$ è il grado (o caratteristica di Eulero) del campo g in U . Di conseguenza $\text{ind}(\Phi_T, U)$, quando definito, non dipende da T . Se $T > 0$ è sufficientemente piccolo la (2.1.2) è nota: vedi [33] nel caso piatto e [20] sulle varietà differenziabili. Sottolineiamo che la validità, della (2.1.2), ogni qual volta $\text{ind}(\Phi_T, U)$ è ben definito, non è una conseguenza immediata della proprietà di omotopia dell'indice di punto fisso poiché, in generale, l'applicazione $\Phi : (x, t) \mapsto \Phi_t(x)$, $0 < t \leq T$, non è un'omotopia ammissibile in U (a meno che T non sia sufficientemente piccolo). Basta considerare, ad esempio, la seguente equazione differenziale in $M = \mathbb{R}^2$

$$(\dot{x}, \dot{y}) = (y, -x)$$

e porre $U = B(0, 1)$, la palla unitaria aperta in \mathbb{R}^2 . Un calcolo diretto, in questo caso, mostra che $\text{ind}(\Phi_t, U)$ è ben definito (ed uguale ad 1) se e solo se $t \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Dunque, se prendiamo $T > 2\pi$, Φ non è un'omotopia ammissibile per $t \in (0, T]$.

2.1.1. Un risultato classico. La formula (2.1.2) è stata provata da M.A. Krasnosel'skii in [33], nel caso $M = \mathbb{R}^m$, sotto l'ipotesi che Φ sia ammissibile in $(0, T] \times U$ (cioè Φ sia definita su $(0, T] \times U$ e che l'insieme degli $x \in U$ tali che $\Phi_t(x) = x$ per qualche $t \in (0, T]$, sia compatto).

In realtà, si può considerare una situazione più generale: sia $f : \mathbb{R} \times M \rightarrow \mathbb{R}^k$ un campo vettoriale tangente su una varietà differenziabile M e sia U un aperto relativamente compatto di M . Supponiamo che, per ogni $p \in U$, la soluzione del problema di Cauchy

$$(2.1.3) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(0) = p, \end{cases}$$

sia unica e definita in $[0, T]$. Denotiamo con $P_T : \bar{U} \rightarrow M$ l'operatore di traslazione di Poincaré che associa ad ogni punto p il valore al tempo T della soluzione $x(\cdot, p)$ di (2.1.3). Un punto $p \in M$ è detto di *T -irreversibilità* se $x(t, p) \neq p$ per ogni $t \in (0, T]$. Usando la proprietà di omotopia dell'indice di punto fisso, è facile provare il seguente risultato, originariamente ottenuto da M.A. Krasnosel'skii nel caso $M = \mathbb{R}^m$ (vedi [33, 34]).

TEOREMA 2.1.1. *Supponiamo che i punti di $\text{Fr}U$ siano di T -irreversibilità e che $f(0, x) \neq 0$ su $\text{Fr}U$. Allora*

$$\text{ind}(P_T, U) = \text{deg}(-f(0, \cdot), U).$$

Come si vede, nel caso di T -irreversibilità, il teorema enunciato implica la (2.1.2). In effetti la (2.1.2) ci dice che, almeno per le equazioni differenziali autonome, l'ipotesi di T -irreversibilità può essere rimossa. Vedremo in seguito che, nel caso di equazioni differenziali non autonome, questa ipotesi non può in generale essere indebolita.

La validità della formula (2.1.2), per ogni $T > 0$ tale che $\text{ind}(\Phi_T, U)$ sia ben definito, è stata provata in [10] nel caso "piatto", cioè per $M = \mathbb{R}^m$. Il metodo usato in [10] è basato sulla teoria del grado di coincidenza e su un risultato di Kupka e Smale. Una dimostrazione alternativa, che non richiede il Teorema di Kupka-Smale, è stata dedotta in [41] da una formula per il calcolo del grado di coincidenza di applicazioni S^1 -equivarianti data in [4]. Il nostro approccio, ancora basato sul risultato di Kupka-Smale, non fa uso di teorie del grado a dimensione infinita e risulta particolarmente naturale nel quadro delle varietà differenziabili.

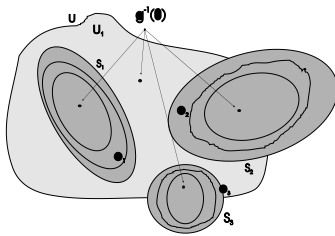
2.1.2. Il calcolo dell'indice. Per maggiore semplicità, in questo paragrafo considereremo soltanto campi vettoriali C^1 . Questa ipotesi non risulta una seria limitazione e può essere eliminata semplicemente assumendo l'unicità delle soluzioni del problema di Cauchy.

Sia M una varietà differenziabile m -dimensionale senza bordo, immersa in qualche \mathbb{R}^k , e $g : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ un campo vettoriale tangente (di classe C^1). Consideriamo l'equazione differenziale

$$(2.1.4) \quad \dot{x} = g(x);$$

denoteremo con $\{\Phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ il flusso locale determinato dalla (2.1.4), cioè l'applicazione $\Phi : W \rightarrow M$ definita su un aperto W di $\mathbb{R} \times M$ contenente $\{0\} \times M$, con la proprietà che, per ogni $p \in M$, la curva $t \rightarrow \Phi_t(p)$ è la soluzione massimale di (2.1.4) tale che $\Phi_0(p) = p$. Quindi, dato $\tau \in \mathbb{R}$, il dominio di Φ_τ è l'insieme aperto di quei punti $p \in M$ per cui la soluzione massimale di (2.1.4), che parte da p per $t = 0$, è definita fino a τ .

In ciò che segue, col termine orbita periodica ci riferiremo all'immagine di una soluzione periodica di (2.1.4). Dato $T > 0$, con A_T denotiamo l'unione di tutte le orbite τ -periodiche con $0 < \tau \leq T$. Notiamo che $g^{-1}(0) \subset A_T$ per ogni $T > 0$.

FIGURA 1. Costruzione dell'insieme U_1

LEMMA 2.1.2. *Dato $T > 0$, sia $O \subset M$ un'orbita non banale isolata di (2.1.4) in A_T . Esiste un intorno aperto S di O tale che, per ogni $0 < \tau \leq T$, Φ_τ è definito su \bar{S} , privo di punti fissi su $\text{Fr}S$ e $\text{ind}(\Phi_\tau, S) = 0$.*

Dimostrazione. Poiché O è un'orbita periodica, Φ_t è definito su O per ogni $t \in \mathbb{R}$. Dunque Φ_T è definito su qualche intorno S di O . Osserviamo che, poiché O è isolata in A_T , è possibile scegliere S tale che Φ_τ sia privo di punti fissi su $\text{Fr}S$ per ogni $\tau \in (0, T]$. Questo, per la proprietà di omotopia, implica che $\text{ind}(\Phi_\tau, S)$ non dipende da $\tau \in (0, T]$. Inoltre, per la non banalità di O , esiste un periodo minimo positivo σ di O . Quindi $\text{ind}(\Phi_{\sigma/2}, S) = 0$ perché $\Phi_{\sigma/2}$ è privo di punti fissi in S . ■

LEMMA 2.1.3. *Supponiamo che Φ_T sia definito sulla chiusura di un aperto relativamente compatto U di M . Supponiamo che tutte le orbite con periodo in $(0, T]$ che incontrano \bar{U} siano isolate in A_T . Dati $\sigma, \tau \in (0, T]$ tali che Φ_τ e Φ_σ siano privi di punti fissi su $\text{Fr}U$, si ha*

$$\text{ind}(\Phi_\tau, S) = \text{ind}(\Phi_\sigma, S).$$

Dimostrazione. Per le nostre ipotesi, data la compattezza di \bar{U} , c'è soltanto un numero finito di orbite con periodo in $(0, T]$ che incontrano \bar{U} . Siano O_1, \dots, O_n tutte quelle non banali. Per il Lemma 2.1.2 esistono n aperti S_1, \dots, S_n tali che $O_i \subset S_i$, g è privo di zeri su $\text{Fr}S_i$ e

$$\text{ind}(\Phi_\tau, S_i) = \text{ind}(\Phi_\sigma, S_i) = 0$$

per ogni $i = 1, \dots, n$. Possiamo evidentemente supporre $\bar{S}_i \cap \bar{S}_j = \emptyset$ quando $i \neq j$. Definiamo

$$U_1 = U \setminus \bigcup_{i=1}^n \bar{S}_i.$$

Per le proprietà di additività e taglio,

$$\text{ind}(\Phi_\tau, U) = \text{ind}(\Phi_\tau, U_1),$$

e

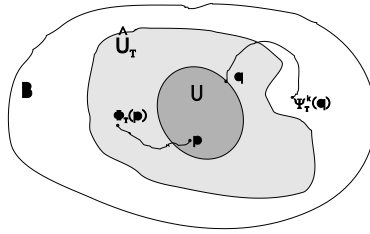
$$\text{ind}(\Phi_\sigma, U) = \text{ind}(\Phi_\sigma, U_1).$$

Usando l'invarianza per omotopia possiamo scrivere

$$\text{ind}(\Phi_\tau, U_1) = \text{ind}(\Phi_\sigma, U_1),$$

da cui segue la tesi. ■

Sia U un aperto relativamente compatto di M , e sia $T > 0$ assegnato. Consideriamo un campo vettoriale tangente $g : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ (di classe C^1) tale che la soluzione del problema di Cauchy (2.1.1) sia definita in $[0, T]$, per ogni $p \in \bar{U}$. Supponiamo

FIGURA 2. L'insieme B

che $\text{ind}(\Phi_T, U)$ sia ben definito. In questo caso non vi sono zeri di g su $\text{Fr}U$, quindi $\text{deg}(g, U)$ è anch'esso ben definito.

Usando un corollario del Teorema di Kupka-Smale (vedi e.g. [39, 12, 10, 38]), si può provare che esiste una successione $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ di campi vettoriali di classe C^1 tangenti ad M , uniformemente convergenti a g sui compatti, e tali che, per ogni $k \in \mathbb{N}$, l'equazione

$$(2.1.5) \quad \dot{x} = g_k(x),$$

in ogni insieme compatto assegnato, ammette un numero finito di orbite con periodo in $(0, T]$. Denoteremo con $\{\Psi_t^k\}_{t \in \mathbb{R}}$ il flusso locale associato all'equazione (2.1.5). Poiché il flusso è una funzione continua della variabile doppia $(t, x) \in \mathbb{R} \times M$, l'insieme raggiungibile $\hat{U}_T = \Phi_{[0, T]}(\bar{U})$ è un sottoinsieme compatto di M . Sia B un sottoinsieme relativamente compatto aperto di M contenente \hat{U}_T . Sia d la distanza (in \mathbb{R}^k) tra \hat{U}_T e $\text{Fr}B$. Si può scegliere \bar{k} sufficientemente grande affinché

$$|\Phi_t(x) - \Psi_t^k(x)| \leq \frac{d}{2}$$

per ogni $x \in \bar{U}$, $t \in [0, T]$ e $k > \bar{k}$. Questo implica che, se $k > \bar{k}$, allora ogni soluzione di (2.1.5) che incontra \bar{U} è contenuta in \bar{B} . Pertanto, per tali k , \bar{B} contiene soltanto un numero finito di orbite di (2.1.5) con periodo in $(0, T]$. La situazione è illustrata dalla figura 2

È noto che esiste un $\varepsilon > 0$ tale che $\text{ind}(\Phi_t, U)$ è ben definito e costante per $0 < t \leq \varepsilon$. Più precisamente (vedi [20] oppure la formula (1.4.4) del capitolo precedente) sappiamo che, per $0 < t \leq \varepsilon$,

$$(2.1.6) \quad \text{ind}(\Phi_t, U) = \text{deg}(-g, U).$$

Usando la dipendenza continua dai dati iniziali e la compattezza di $\text{Fr}U$, possiamo assumere $\Psi_T^k(x) \neq x$ e $\Psi_\varepsilon^k(x) \neq x$ per ogni $x \in \text{Fr}U$. Inoltre, per la proprietà di invarianza per omotopia dell'indice di punto fisso,

$$(2.1.7) \quad \text{ind}(\Psi_T^k, U) = \text{ind}(\Phi_T, U),$$

$$(2.1.8) \quad \text{ind}(\Psi_\varepsilon^k, U) = \text{ind}(\Phi_\varepsilon, U),$$

purché k sia grande abbastanza. Per il Lemma 2.1.3,

$$(2.1.9) \quad \text{ind}(\Psi_T^k, U) = \text{ind}(\Psi_\varepsilon^k, U).$$

Di conseguenza, dalle (2.1.6), (2.1.7), (2.1.8) e (2.1.9) si ottiene

$$\text{ind}(\Phi_T, U) = \text{ind}(\Phi_\varepsilon, U) = \text{deg}(-g, U).$$

Abbiamo provato il seguente risultato.

TEOREMA 2.1.4. *Sia $g : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ un campo vettoriale di classe C^1 tangente ad una varietà differenziabile senza bordo $M \subset \mathbb{R}^k$ e U un sottoinsieme aperto relativamente compatto di M . Sia dato $T > 0$ e supponiamo che, per ogni $p \in \bar{U}$, la soluzione del problema di Cauchy (2.1.1) sia definita su $[0, T]$. Se Φ_T è privo di punti fissi sul bordo di U , allora*

$$\text{ind}(\Phi_T, U) = \text{deg}(-g, U).$$

Sebbene la restrizione ad U dell'operatore di traslazione di Poincaré Φ_T possa essere fortemente influenzata dal comportamento di g fuori da U , così non è per il suo indice di punto fisso.

COROLLARIO 2.1.5. *Siano M , g , U e T come nel precedente teorema. Sia $h : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ un campo vettoriale tangente (di classe C^1), denotiamo con $\{\Psi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ il flusso locale associato ad h . Se $g|_U \equiv h|_U$, allora*

$$\text{ind}(\Phi_T, U) = \text{ind}(\Psi_T, U),$$

purché essi siano entrambi ben definiti.

2.1.3. Alcune considerazioni. Consideriamo l'equazione differenziale

$$(2.1.10) \quad \dot{x} = \lambda g(x), \quad \lambda \in [0, 1],$$

dove g è come nel Teorema 2.1.4, e denotiamo con $\{\Phi_t(\lambda, \cdot)\}_{t \in \mathbb{R}}$ il flusso locale associato a questa equazione. Osserviamo che

$$(2.1.11) \quad \Phi_T(\lambda, \cdot) \equiv \Phi_{\lambda T}(1, \cdot).$$

In particolare ogni soluzione T -periodica di (2.1.4) corrisponde ad una (T/λ) -periodica di (2.1.10). Supponiamo che $\Phi_T(\lambda_1, \cdot)$ e $\Phi_T(\lambda_2, \cdot)$ siano privi di punti fissi su $\text{Fr}U$ ($\lambda_1, \lambda_2 \in (0, 1]$); allora, dal Teorema 2.1.4 abbiamo

$$\text{ind}(\Phi_{\lambda_1 T}(1, \cdot), U) = \text{ind}(\Phi_{\lambda_2 T}(1, \cdot), U).$$

Quindi dalla (2.1.11) otteniamo

$$(2.1.12) \quad \text{ind}(\Phi_T(\lambda_1, \cdot), U) = \text{ind}(\Phi_T(\lambda_2, \cdot), U).$$

Sia $f : \mathbb{R} \times M \rightarrow \mathbb{R}^k$ un campo vettoriale tangente T -periodico su M ; supponiamo che la soluzione di

$$(2.1.13) \quad \dot{x} = \lambda f(t, x),$$

soddisfacente $x(0) = p$, sia unica e prolungabile su $[0, T]$ per ogni $\lambda \in [0, 1]$ e per ogni $p \in M$. È naturale chiedersi se valga una formula come la (2.1.12) per l'equazione (2.1.13). Più precisamente, denotiamo con $P_T(\lambda, \cdot) : M \rightarrow M$ l'operatore di traslazione che associa ad ogni punto $p \in M$ il valore al tempo T della soluzione della (2.1.13), soddisfacente $x(0) = p$. Assumendo che $P_T(\lambda_1, \cdot)$ e $P_T(\lambda_2, \cdot)$, $\lambda_1, \lambda_2 \in (0, 1]$, siano privi di punti fissi sulla frontiera di un insieme aperto relativamente compatto U di M (e ben definiti su \bar{U}), il problema è se sia possibile scrivere

$$(2.1.14) \quad \text{ind}(P_T(\lambda_1, \cdot), U) = \text{ind}(P_T(\lambda_2, \cdot), U).$$

La risposta è affermativa nel caso che $U = M$ sia una varietà compatta e senza bordo (questa è una semplice conseguenza della proprietà di omotopia dell'indice di punto fisso), ma la formula (2.1.14) è falsa in generale. Per vederlo poniamo

$M = \mathbb{R}^2$ e scegliamo U come la palla aperta unitaria in \mathbb{R}^2 . Consideriamo la seguente equazione in \mathbb{R}^2

$$(2.1.15) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda x_2 \\ \dot{x}_2 = -\lambda x_1 + \lambda \sin t. \end{cases}$$

Per $\lambda = 1$, la (2.1.15) non ammette soluzioni 2π -periodiche. Dunque

$$\text{ind}(P_{2\pi}(1, \cdot), U) = 0.$$

D'altra parte, per λ sufficientemente piccolo, sappiamo che (vedi [20])

$$\text{ind}(P_{2\pi}(\lambda, \cdot), U) = \text{deg}(-w, U) = 1,$$

dove $w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ è definito da

$$w(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (x_2, -x_1 + \sin t) dt = (x_2, -x_1),$$

contraddicendo la (2.1.15).

Torniamo adesso al risultato di Krasnosel'skii. Per il Teorema 2.1.1, in caso di T -irreversibilità per f dei punti di $\text{Fr}U$, si ha

$$\text{ind}(P_T(1, \cdot), U) = \text{deg}(-f(0, \cdot), U).$$

Il Teorema 2.1.4 mostra che, almeno nel caso delle equazioni differenziali autonome, l'ipotesi di T -irreversibilità può essere rimossa; il fatto essenziale è l'assenza di punti fissi per $P_T(1, \cdot)$ su $\text{Fr}U$ (cioè l'ammissibilità su U dell'operatore di T -traslazione di Poincaré). È naturale chiedersi se sia possibile eliminare la T -irreversibilità anche nel caso non autonomo. L'equazione (2.1.15), con $\lambda = 1$, mostra che questo non è possibile. Infatti, scelto U come la palla unitaria aperta di \mathbb{R}^2 , un calcolo diretto mostra che

$$\text{deg}(-f(0, \cdot), U) = 1,$$

mentre,

$$\text{ind}(P_T(1, \cdot), U) = 0,$$

poiché (2.1.15) non ammette soluzioni periodiche per $\lambda = 1$.

2.2. L'indice di punto fisso per equazioni del secondo ordine

Sia N una varietà differenziabile senza bordo immersa in \mathbb{R}^s , dotata della struttura riemanniana indotta dall'immersione, e sia $h : TN \rightarrow \mathbb{R}^s$ un campo vettoriale continuo e tangente ad N (cioè tale che, comunque fissato $p \in N$, si abbia $h(p, v) \in T_p N$ per ogni $v \in T_p N$).

Consideriamo la seguente equazione differenziale del secondo ordine su N :

$$(2.2.1) \quad \ddot{x}_\pi = h(x, \dot{x}).$$

Come abbiamo visto nel capitolo precedente, a questa è possibile associare l'equazione differenziale autonoma del primo ordine su $TN \subset \mathbb{R}^{2s}$ data da

$$\dot{\xi} = \hat{h}(\xi),$$

con $\xi = (p, v)$ e

$$(2.2.2) \quad \hat{h}(p, v) = (v, r(p, v) + h(p, v)),$$

dove $r : TN \rightarrow \mathbb{R}^{2s}$ è un'opportuna applicazione liscia tale che, per ogni $p \in N$, $r(p, \cdot)$ è una forma quadratica a valori in $(T_p N)^\perp$.

Supponiamo che h sia tale che per ogni $(p, v) \in TN$ esista unica la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \ddot{x}_\pi = h(x, \dot{x}) \\ x(0) = p \\ \dot{x}(0) = v, \end{cases}$$

o, equivalentemente di

$$(2.2.3) \quad \begin{cases} \dot{\xi} = \hat{h}(\xi) \\ \xi(0) = (p, v). \end{cases}$$

In tali condizioni è definito un flusso locale $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ su TN . Fissato un tempo $T > 0$, cerchiamo una formula che permetta di calcolare facilmente l'indice di punto fisso di \mathfrak{F}_T (quando definito).

2.2.1. Una formula per l'indice di punto fisso. Sia N una varietà differenziabile senza bordo immersa in \mathbb{R}^s , e sia $h : TN \rightarrow \mathbb{R}^s$ un campo vettoriale (continuo) tangente ad N . Cerchiamo, per il caso delle equazioni del secondo ordine, un risultato analogo al Teorema 2.1.4. La prima cosa da fare è stabilire un legame tra il grado di un opportuno campo vettoriale tangente legato ad h e quello del campo vettoriale del secondo ordine \hat{h} associato ad h (come è noto \hat{h} è tangente a TN). Un passo chiave in questa direzione è il seguente risultato di [22]. In ciò che segue identificheremo la varietà N con la sezione nulla di TN ; pertanto, dato un aperto $U \subset TN$, con $U \cap N$ intenderemo l'insieme $\{p \in N : (p, 0) \in U\}$.

LEMMA 2.2.1. *Sia $\gamma : N \rightarrow \mathbb{R}^s$ un campo vettoriale tangente ad N e sia $\hat{\gamma} : TN \rightarrow \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^s$, $\hat{\gamma}(p, v) = (v, r(p, v) + \gamma(p))$, il campo vettoriale del secondo ordine associato a γ . Allora, fissato un sottoinsieme U di TN , $\hat{\gamma}$ è ammissibile su U se e solo se γ lo è su $U \cap N$, e*

$$\deg(\hat{\gamma}, U) = \deg(-\gamma, U \cap N).$$

In aggiunta ad h , consideriamo il campo vettoriale h_0 tangente ad N dato dalla restrizione di h alla sezione nulla di TN che, come al solito, è identificata con N . Si definisce cioè $h_0 : N \rightarrow \mathbb{R}^s$ ponendo $h_0(p) = h(p, 0)$. Sia poi $\widehat{h}_0 : TN \rightarrow \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^s$ il campo vettoriale del secondo ordine associato ad h_0 , cioè:

$$\widehat{h}_0(p, v) = (v, r(p, v) + h_0(p)).$$

Se U è un sottoinsieme aperto relativamente compatto di TN allora, per il Lemma 2.2.1, h_0 è ammissibile su $U \cap N$ se e solo se \widehat{h}_0 lo è su U . In tale caso si ha

$$(2.2.4) \quad \deg(\widehat{h}_0, U) = \deg(-h_0, U \cap N).$$

Supponiamo adesso che $h_0(p) \neq 0$ per ogni $p \in \text{Fr}U \cap N$. In tal caso $\widehat{h}_0(p, v) \neq 0$ e $\hat{h}(p, v) \neq 0$ per ogni $p \in \text{Fr}U$. Risultano pertanto ben definiti $\deg(-h_0, U \cap N)$, $\deg(\widehat{h}_0, U)$ e $\deg(\hat{h}, U)$. Definiamo $H : TN \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^s$ ponendo

$$\begin{aligned} H(p, v; \lambda) &= \lambda \widehat{h}_0(p, v) + (1 - \lambda) \hat{h}(p, v) \\ &= (v, r(p, v) + \lambda h_0(p) + (1 - \lambda)h(p, v)). \end{aligned}$$

Osserviamo che H è un'omotopia ammissibile; infatti $H(p, v; \lambda)$ è diverso da zero per ogni $(p, v) \in \text{Fr}U$ e $\lambda \in [0, 1]$. Se $v \neq 0$ questo è ovvio; se $v = 0$, $p \in \text{Fr}U \cap N$ e $\lambda \in [0, 1]$, si ha

$$H(p, 0; \lambda) = (0, h(p, 0)) \neq 0.$$

Dunque, per l'invarianza per omotopia

$$(2.2.5) \quad \deg(\widehat{h}_0, U) = \deg(\widehat{h}, U).$$

Ricordando la definizione di h_0 e usando (2.2.4) e (2.2.5), si ottiene

$$\begin{aligned} \deg(\widehat{h}, U) &= \deg(\widehat{h}_0, U) = \deg(-h_0, U \cap N) \\ &= \deg(-h(\cdot, 0), U \cap N). \end{aligned}$$

Abbiamo quindi provato il seguente risultato che ci sarà utile in seguito.

TEOREMA 2.2.2. *Sia $h : TN \rightarrow \mathbb{R}^s$ un campo vettoriale (continuo) e tangente ad una varietà differenziabile N e U un sottoinsieme aperto relativamente compatto di TN . Allora, se $h(p, 0) \neq 0$ per ogni $p \in \text{Fr}U \cap N$, il campo vettoriale del secondo ordine \widehat{h} associato ad h è ammissibile in U e*

$$\deg(\widehat{h}, U) = \deg(-h(\cdot, 0), U \cap N).$$

Dal Teorema 2.2.2 e dalla definizione di indice di uno zero isolato di un campo vettoriale tangente discende una formula per il calcolo dell'indice degli zeri di un campo vettoriale del secondo ordine.

COROLLARIO 2.2.3. *Sia $h : TN \rightarrow \mathbb{R}^s$ un campo vettoriale tangente ad una varietà N e $z \in N$ uno zero isolato di $h(\cdot, 0)$, allora il punto $(z, 0) \in TN$ è uno zero isolato di \widehat{h} e*

$$i(\widehat{h}, (z, 0)) = i(-h(\cdot, 0), z).$$

Nel caso che N sia una varietà compatta e senza bordo, se U è un aperto relativamente compatto di TN tale che $U \cap N = N$, per il Teorema di Poincaré-Hopf

$$\deg(-h(\cdot, 0), N) = \chi(N).$$

Dal Teorema 2.2.2 discende immediatamente il seguente risultato.

COROLLARIO 2.2.4. *Sia $N \subset \mathbb{R}^s$ una varietà compatta e senza bordo e $h : TN \rightarrow \mathbb{R}^s$ un campo vettoriale tangente ad N . Se U è un aperto relativamente compatto di TN tale che $U \cap N = N$, allora*

$$\deg(\widehat{h}, U) = \chi(N).$$

Dato $T > 0$, supponiamo che, per ogni $(p, v) \in \bar{U}$, la soluzione del problema di Cauchy (2.2.3) sia unica e definita in tutto l'intervallo $[0, T]$. Se supponiamo inoltre che $\mathfrak{F}_T(p, v) \neq (p, v)$ per ogni $(p, v) \in \text{Fr}U$, allora $\widehat{h}(p, v) \neq 0$ per ogni $(p, v) \in \text{Fr}U$. Dunque $\deg(\widehat{h}, U)$ e $\text{ind}(\mathfrak{F}_T, U)$ sono ben definiti. Un'applicazione immediata del Teorema 2.1.4 fornisce

$$\begin{aligned} \text{ind}(\mathfrak{F}_T, U) &= \deg(-\widehat{h}, U) \\ &= (-1)^{2n} \deg(\widehat{h}, U) = \deg(\widehat{h}, U), \end{aligned}$$

dove n è la dimensione della varietà N . Infine, applicando il Lemma 2.2.2,

$$\text{ind}(\mathfrak{F}_T, U) = \deg(\widehat{h}, U) = \deg(-h(\cdot, 0), U \cap N).$$

Abbiamo provato il seguente risultato

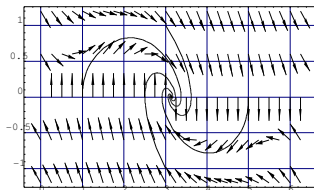


FIGURA 3

TEOREMA 2.2.5. *Sia N una varietà differenziabile senza bordo immersa in \mathbb{R}^s , e sia $h : TN \rightarrow \mathbb{R}^s$ un campo vettoriale continuo tangente ad N . Sia inoltre U un sottoinsieme aperto relativamente compatto di TN ; dato $T > 0$, supponiamo che, per ogni $(p, v) \in \bar{U}$, la soluzione del problema di Cauchy (2.2.3) sia unica e definita in tutto l'intervallo $[0, T]$. Se supponiamo inoltre che $\mathfrak{F}_T(p, v) \neq (p, v)$ per ogni $(p, v) \in \text{Fr}U$ allora*

$$\text{ind}(\mathfrak{F}_T, U) = \text{deg}(-h(\cdot, 0), U \cap N).$$

Per esempio, sia $N = S^2 = \{p \in \mathbb{R}^3 : |p| = 1\}$ e sia $h : TS^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1 tangente a S^2 . Se U è un aperto relativamente compatto di TS^2 contenente S^2 , allora, dato $T > 0$ per il quale $\text{ind}(\mathfrak{F}_T, U)$ sia ben definito, risulta

$$\text{ind}(\mathfrak{F}_T, U) = \text{deg}(-h(\cdot, 0), S^2) = \chi(S^2) = 2.$$

Quest'esempio può essere generalizzato a varietà compatte e senza bordo qualunque.

COROLLARIO 2.2.6. *Sia $h : TN \rightarrow \mathbb{R}^s$ un campo vettoriale di classe C^1 tangente ad una varietà compatta e senza bordo $N \subset \mathbb{R}^s$. Sia U un aperto relativamente compatto di TN , contenente N . Dato $T > 0$ tale che $\text{ind}(\mathfrak{F}_T, U)$ sia ben definito, si ha*

$$\text{ind}(\mathfrak{F}_T, U) = \chi(N).$$

Per esempio, consideriamo la seguente equazione differenziale del secondo ordine su S^1 :

$$(2.2.6) \quad \ddot{\theta} = -\alpha \dot{\theta} + \sin \theta, \quad \alpha > 0.$$

L'equazione (2.2.6) può essere considerata un'equazione del primo ordine sul fibrato tangente $TS^1 = S^1 \times \mathbb{R}$ come segue:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\alpha x_2 + \sin x_2. \end{cases}$$

La figura 3 rappresenta l'andamento del campo su una parte di TS^1 con alcune linee di flusso (per motivi grafici tale parte è stata schiacciata su un piano). Il Corollario 2.2.6 permette di calcolare l'indice di punto fisso del flusso (su TS^1) associato all'equazione (2.2.6), che risulta essere evidentemente $\chi(S^1) = 0$.

Perturbazioni periodiche di equazioni autonome

Questo capitolo è dedicato allo studio dell'insieme delle soluzioni armoniche dell'equazione differenziale parametrizzata

$$(3.0.7) \quad \dot{x} = g(x) + \lambda f(t, x), \quad \lambda \geq 0,$$

dove $g : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ e $f : \mathbb{R} \times M \rightarrow \mathbb{R}^k$ sono campi vettoriali continui, tangenti ad una varietà differenziabile senza bordo $M \subset \mathbb{R}^k$ (non necessariamente chiusa), con f T -periodica rispetto alla prima variabile. Studieremo la struttura dell'insieme delle T -coppie di (3.0.7); cioè di quelle coppie $(\lambda, x) \in [0, \infty) \times C_T(M)$ tali che x sia una soluzione (necessariamente T -periodica) di (3.0.7).

3.1. La struttura dell'insieme delle soluzioni armoniche

In questa parte daremo condizioni che assicurano l'esistenza di una componente connessa globale dell'insieme delle T -coppie (λ, x) di (3.0.7) che emana dall'insieme delle soluzioni costanti dell'equazione non perturbata

$$(3.1.1) \quad \dot{x} = g(x).$$

Nel caso in cui M sia chiusa, questa componente risulta essere illimitata. L'affermazione più debole che questo insieme connesso emana dall'insieme delle soluzioni T -periodiche di (3.1.1) è stata precedentemente ottenuta in [8, 9], con l'ipotesi addizionale che l'insieme delle soluzioni T -periodiche di (3.1.1) sia compatto. Risultati collegati riguardanti i principi di continuazione si possono trovare in [10, 41] e nei relativi riferimenti. Le tecniche utilizzate in questa parte sono diverse da quelle di [8, 9]: non usiamo teorie del grado a dimensione infinita.

3.1.1. Notazioni e risultati preliminari. Se $M \subset \mathbb{R}^k$ è una varietà differenziabile, il sottospazio metrico $C_T(M)$ di $C_T(\mathbb{R}^k)$ costituito da tutte le funzioni continue e T -periodiche $x : \mathbb{R} \rightarrow M$ non è completo, a meno che M non sia chiusa in \mathbb{R}^k . Comunque, $C_T(M)$ è sempre localmente completo. Questo fatto discende dalla seguente osservazione: poiché M è localmente compatto, dato $x \in C_T(M)$, esiste un aperto relativamente compatto $V \subset M$ contenente l'immagine $x([0, T])$ di x .

Uno spazio metrico K è detto *precompatto*, se il suo completamento è compatto. Osserviamo che K è precompatto se e solo se è totalmente limitato. Infatti, la totale limitatezza di K è equivalente all'affermazione che ogni successione in K ha una sottosuccessione di Cauchy. Conseguentemente K è compatto se e soltanto se è totalmente limitato e completo.

La seguente versione del Teorema di Ascoli-Arzelà sarà utile nel seguito.

TEOREMA 3.1.1. *Sia X un sottoinsieme di \mathbb{R}^k e B un sottoinsieme limitato equicontinuo di $C([a, b], X)$. Allora B è totalmente limitato. In particolare, se X è chiuso, B è relativamente compatto.*

Siano $f : \mathbb{R} \times M \rightarrow \mathbb{R}^k$ e $g : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ come in (3.0.7). Una coppia $(\lambda, p) \in [0, \infty) \times M$ è un *punto iniziale* (per soluzioni T -periodiche) se il problema di Cauchy

$$(3.1.2) \quad \begin{cases} \dot{x} = g(x) + \lambda f(t, x) \\ x(0) = p \end{cases}$$

ha una soluzione T -periodica. Un punto iniziale (λ, p) è detto *banale*, se $\lambda = 0$ e $p \in g^{-1}(0)$. Sebbene il concetto di punto iniziale sia essenzialmente finito dimensionale, in stretta relazione con esso, vi è la nozione (infinito dimensionale) di *T -coppia*. Diciamo che $(\lambda, x) \in [0, \infty) \times C_T(M)$ è una T -coppia se x soddisfa (3.0.7). Se $\lambda = 0$ e x è costante, allora (λ, x) è detta *banale*.

Denotiamo con X il sottoinsieme di $[0, \infty) \times C_T(M)$ formato da tutte le T -coppie e con S l'insieme di tutti i punti iniziali. Notiamo che, essendo un sottoinsieme chiuso di uno spazio localmente completo, X è localmente completo. L'applicazione $h : X \rightarrow S$, che associa a $(\lambda, x) \in X$ il punto iniziale $(\lambda, x(0))$, è continua e suriettiva. Osserviamo che, se (λ, x) è banale, allora la coppia corrispondente $(\lambda, x(0)) \in S$ è anch'essa banale; se g è C^1 il viceversa è ovviamente vero.

Il seguente risultato di connessione globale di [22] risulterà cruciale nel seguito.

LEMMA 3.1.2. *Sia Y uno spazio di Hausdorff localmente compatto e Y_0 un sottoinsieme compatto di Y . Supponiamo che ogni sottoinsieme compatto di Y contenente Y_0 abbia frontiera non vuota. Allora $Y \setminus Y_0$ contiene una componente connessa non relativamente compatta, la cui chiusura (in Y) interseca Y_0 .*

Note proprietà dell'insieme delle soluzioni delle equazioni differenziali implicano che l'insieme X delle T -coppie è chiuso, dunque è localmente completo essendo un chiuso di uno spazio localmente completo.

LEMMA 3.1.3. *Supponiamo che M sia una varietà completa¹; in questo caso ogni sottoinsieme limitato di X è in realtà totalmente limitato. Di conseguenza, insiemi chiusi e limitati di T -coppie sono compatti.*

Dimostrazione. Poiché M è completa, i suoi sottoinsiemi limitati sono relativamente compatti (in M). Quindi, dato $A \subset X$ limitato, l'insieme

$$\{(\lambda, x(t)) \in [0, \infty) \times M : (\lambda, x) \in A, t \in [0, T]\}$$

è contenuto in un compatto $K \subset [0, \infty) \times M$. Dunque, esiste una costante $c \geq 0$ tale che $|g(y) + \lambda f(t, y)| \leq c$ per ogni $t \in [0, T]$ e tutti i $(\lambda, y) \in K$. Questo implica che $|\dot{x}(t)| \leq c$ per ogni $(\lambda, x) \in A$. Quindi A può essere visto come un insieme equilimitato di funzioni equicontinue da $[0, T]$ in $[0, \infty) \times M$. Il Teorema di Ascoli-Arzelà implica che A è totalmente limitato.

Se A è supposto chiuso in X allora, essendo un chiuso di uno spazio metrico completo, A è completo. Quindi, essendo totalmente limitato e completo, è compatto. ■

¹Non distingueremo mai tra completezza nel senso degli spazi metrici e completezza geodetica, in quanto, come è ben noto, tali nozioni sono equivalenti per varietà riemanniane (vedi e.g. [44] o [11])

La dimostrazione appena fatta mostra che, anche quando la varietà M non è completa, X è sempre localmente totalmente limitato. Quindi, essendo localmente completo, X è in realtà localmente compatto.

Per semplicità, in accordo con [25], facciamo alcune convenzioni. Identificheremo ogni spazio con la sua immagine nel seguente diagramma di immersioni naturali

$$\begin{array}{ccc} [0, \infty) \times M & \longrightarrow & [0, \infty) \times C_T(M) \\ \uparrow & & \uparrow \\ M & \longrightarrow & C_T(M) \end{array} .$$

In particolare, vedremo M come la sua immagine in $C_T(M)$ sotto l'immersione che associa ad ogni $p \in M$ l'applicazione $\hat{p} \in C_T(M)$ costantemente uguale a p . Inoltre identificheremo M con la sezione $\{0\} \times M$ di $[0, \infty) \times M$ e, analogamente, $C_T(M)$ con $\{0\} \times C_T(M)$. Sottolineiamo che le immagini delle inclusioni menzionate sono chiuse.

In accordo con queste identificazioni, se Ω è un aperto di $[0, \infty) \times C_T(M)$, con $\Omega \cap M$ indichiamo il sottoinsieme aperto di M dato da tutti i $p \in M$ tali che la coppia $(0, \hat{p})$ appartiene a Ω . Se U è un aperto di $[0, \infty) \times M$, allora $U \cap M$ rappresenta l'insieme aperto $\{p \in M : (0, p) \in U\}$. Inoltre, $S \setminus g^{-1}(0)$ sta per l'insieme $S \setminus [\{0\} \times g^{-1}(0)]$ dei punti iniziali non banali di (3.0.7), e $X \setminus g^{-1}(0)$ per l'insieme delle T -coppie non banali della stessa equazione.

Assumiamo ora che (3.1.2) abbia una unica soluzione per ogni $p \in M$. Per risultati noti sulle equazioni differenziali, l'insieme $D \subset [0, \infty) \times M$ di tutte le coppie (λ, p) tali che la soluzione di (3.1.2) è definita in $[0, T]$ è aperto, quindi localmente compatto. Ovviamente l'insieme S di tutti i punti iniziali di (3.0.7) è un sottoinsieme chiuso di D , anche se potrebbe non esserlo in $[0, \infty) \times M$. Questo implica che S è localmente compatto. Se U è un sottoinsieme aperto di D , l'insieme $S \cap U$ è aperto in S , quindi è anch'esso localmente compatto.

3.1.2. Risultati principali. Il risultato principale di questa parte è il seguente Teorema 3.1.9 di [27]. Esso fornisce informazioni sulla struttura dell'insieme delle T -coppie della (3.0.7). Per arrivare a questo risultato è essenziale studiare l'insieme dei punti iniziali della (3.0.7).

TEOREMA 3.1.4. *Siano $f : \mathbb{R} \times M \rightarrow \mathbb{R}^k$ e $g : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ campi vettoriali tangenti di classe C^1 su una varietà differenziabile (senza bordo) $M \subset \mathbb{R}^k$, con f T -periodico nella prima variabile. Se D ed S sono come sopra, U è un sottoinsieme aperto di D e $\deg(g, U \cap M)$ è ben definito e non nullo, allora l'insieme $(S \cap U) \setminus g^{-1}(0)$ dei punti iniziali non banali (in U) ammette un sottoinsieme connesso, la cui chiusura in $S \cap U$ incontra $g^{-1}(0)$ e non è compatta.*

Dimostrazione. Osserviamo, per prima cosa, che $g^{-1}(0) \cap U$ è non vuoto, perché $\deg(g, U \cap M)$ è diverso da zero. Quindi $S \cap U$ è anch'esso non vuoto. Il teorema si ottiene dall'applicazione del Lemma 3.1.2 alla coppia

$$(Y, Y_0) = (S \cap U, g^{-1}(0) \cap U) .$$

Infatti, se Σ è una componente come nella tesi del Lemma 3.1.2, la sua chiusura (in $S \cap U$) incontra $g^{-1}(0)$ e non è compatta, come vogliamo. Supponiamo, per assurdo, che esista un sottoinsieme compatto C di $S \cap U$, contenente $g^{-1}(0) \cap U$

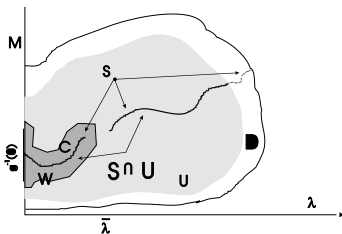


FIGURA 1. Teorema 3.1.4

e con frontiera vuota in $S \cap U$. Allora C è relativamente aperto in $S \cap U$. Di conseguenza $(S \cap U) \setminus C$ è chiuso in $S \cap U$, quindi la distanza

$$\delta = \text{dist}(C, (S \cap U) \setminus C),$$

tra C e $(S \cap U) \setminus C$ è diversa da zero (ricordiamo che C è compatto). Consideriamo l'insieme limitato

$$W = \left\{ (\lambda, p) \in U : \text{dist}((\lambda, p), C) < \frac{\delta}{2} \right\},$$

che, chiaramente, non incontra $(S \cap U) \setminus C$.

Per brevità, dato $s \in \mathbb{R}$, poniamo $W_s = \{x \in M : (s, x) \in W\}$. A causa della limitatezza di W , esiste $\bar{\lambda} > 0$ tale che $W_{\bar{\lambda}} = \emptyset$. Inoltre l'insieme

$$\{(\lambda, p) \in W : P_T(\lambda, p) = p\},$$

dove $P_T : D \rightarrow M$ denota l'operatore di traslazione che associa ad ogni coppia $(\lambda, p) \in D$ il valore al tempo T della soluzione di (3.1.2), è compatto, dal momento che coincide con C . Allora dalla proprietà di omotopia generalizzata dell'indice di punto fisso (vedi per es. [47]) si ottiene

$$0 = \text{ind}(P_T(\bar{\lambda}, \cdot), W_{\bar{\lambda}}) = \text{ind}(P_T(\lambda, \cdot), W_\lambda),$$

per ogni $\lambda \in [0, \bar{\lambda}]$. Notiamo che, per l'assurdo, $P_T(0, \cdot)$ è privo di punti fissi sulla frontiera di W_0 , di conseguenza $\text{ind}(P_T(0, \cdot), W_0)$ è ben definito. Applicando la proprietà del taglio del grado di un campo vettoriale ed il Teorema 2.1.4, si ottiene

$$\text{ind}(P_T(0, \cdot), W_0) = \text{deg}(-g, W_0) = \text{deg}(-g, M \cap U) \neq 0,$$

che contraddice la formula precedente. ■

La costruzione effettuata nella dimostrazione del Teorema 3.1.4 è schematizzata in figura 1.

Prima di andare a descrivere l'insieme delle T -coppie della (3.1.2), è conveniente illustrare il significato del Teorema 3.1.4 per mezzo di alcuni suoi semplici corollari.

COROLLARIO 3.1.5. *Siano $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ campi vettoriali di classe C^1 , con f T -periodico nella prima variabile. Supponiamo che esistano $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, tali che $|f(t, x)| \leq a + b|x|$ e $|g(x)| \leq c + d|x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}^m$ e $t \in \mathbb{R}$. Se $g^{-1}(0)$ è compatto e $\text{deg}(g, \mathbb{R}^m) \neq 0$, allora esiste un insieme connesso non limitato di punti iniziali per le soluzioni T -periodiche di (3.0.7) che incontra $g^{-1}(0)$.*

Dimostrazione. Per le ipotesi su f e g , ogni soluzione di (3.0.7) è definita su tutta la retta reale. Quindi, in questo caso prendendo $U = [0, \infty) \times \mathbb{R}^m$, per il Teorema 3.1.4 esiste un insieme connesso Σ di punti iniziali per la (3.0.7) che incontra $g^{-1}(0)$ e non è contenuto in alcun sottoinsieme compatto di $[0, \infty) \times \mathbb{R}^m$. Questo implica che Σ è illimitato. ■

Il seguente corollario estende un risultato di [19] e si riduce a questo ultimo nel caso in cui g sia identicamente nulla.

COROLLARIO 3.1.6. *Sia M una varietà compatta, senza bordo, con caratteristica di Eulero-Poincaré diversa da zero. Siano $f : \mathbb{R} \times M \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $g : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ come nel Teorema 3.1.4. Allora esiste un insieme connesso Σ di punti iniziali per (3.0.7) che incontra $g^{-1}(0)$ e tale che $\pi_1(\Sigma) = [0, \infty)$, dove π_1 denota la proiezione sul primo fattore di $[0, \infty) \times M$.*

Dimostrazione. Per la compattezza di M si ha $D = [0, \infty) \times M$. Applichiamo il Teorema 3.1.4 all'aperto $U = D$. Per il teorema di Poincaré-Hopf e per le ipotesi si ha

$$\deg(g, U \cap M) = \chi(M) \neq 0.$$

Di conseguenza esiste un insieme connesso Σ di punti iniziali per la (3.0.7) che incontra $g^{-1}(0)$ e non è contenuto in alcun sottoinsieme compatto di U . In particolare, per ogni $\lambda \geq 0$ fissato, Σ interseca $\{\lambda\} \times M$, i.e. $\pi_1(\Sigma) = [0, \infty)$. ■

Il fatto che l'insieme connesso di punti iniziali per la (3.0.7), che esiste per il Teorema 3.1.4, emani dagli zeri di g , e non semplicemente dall'insieme delle soluzioni T -periodiche di $\dot{x} = g(x)$, ci permette di ottenere informazioni sull'insieme dei punti iniziali di (3.0.7) anche nel caso che la caratteristica di Eulero-Poincaré di M sia zero.

COROLLARIO 3.1.7. *Sia M una varietà compatta e senza bordo. Supponiamo che $f : \mathbb{R} \times M \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $g : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ siano come nel Teorema 3.1.4 e che g abbia esattamente due zeri distinti z_1 e z_2 con indice non nullo. Denotiamo con S_1 e S_2 le componenti connesse dell'insieme dei punti iniziali di (3.0.7) che contengono rispettivamente z_1 e z_2 . Allora vale una (e una sola) delle seguenti possibilità:*

- (1) $S_1 = S_2$,
- (2) S_1 e S_2 sono disgiunte ed entrambe illimitate.

In particolare, se vale la seconda, allora esistono almeno due soluzioni distinte della (3.0.7) per ogni $\lambda \in [0, \infty)$.

Dimostrazione. Poiché M è compatta, si ha $D = [0, \infty) \times M$. Prendiamo

$$\begin{aligned} U_1 &= [0, \infty) \times M \setminus (0, z_2), \\ U_2 &= [0, \infty) \times M \setminus (0, z_1). \end{aligned}$$

Ovviamente $(0, z_1) \in U_1$, $(0, z_2) \in U_2$ e, per la definizione di indice di uno zero isolato, $\deg(g, U_1) \neq 0$ e $\deg(g, U_2) \neq 0$. Possiamo assumere $S_1 \neq S_2$. In questo caso S_1 e S_2 , essendo componenti connesse, sono chiaramente disgiunte e, conseguentemente, $S_1 \subset U_1$ e $S_2 \subset U_2$. Per il Teorema 3.1.4, S_1 e S_2 non sono contenute in alcun sottoinsieme compatto di U_1 e U_2 rispettivamente e, in particolare, non sono compatte. Ora S_1 e S_2 sono chiuse nell'insieme S di tutti i punti iniziali della (3.0.7). Poiché S è chiuso in $D = [0, \infty) \times M$, che è chiuso in \mathbb{R}^{k+1} , le due componenti S_1 e S_2 devono essere illimitate. ■

COROLLARIO 3.1.8. *Sia $g : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ un campo vettoriale tangente di classe C^1 su una varietà compatta e senza bordo $M \subset \mathbb{R}^k$. Supponiamo che g abbia esattamente due zeri z_1 e z_2 con indice non nullo. Se z_1 e z_2 appartengono a componenti connesse distinte dell'insieme delle orbite T -periodiche di $\dot{x} = g(x)$ allora, assegnato un campo vettoriale tangente $f : \mathbb{R} \times M \rightarrow \mathbb{R}^k$ di classe C^1 , esiste $\lambda_f > 0$ tale che l'equazione (3.0.7) ha almeno due soluzioni T -periodiche per ogni $\lambda \in [0, \lambda_f]$.*

Dimostrazione. Siano S_1 e S_2 come nel corollario precedente. È sufficiente provare² che né S_1 né S_2 sono contenuti in $\{0\} \times M$. Supponiamo, per esempio, $S_1 \subset \{0\} \times M$. Allora, non vale l'alternativa (2) del corollario precedente. Questo implica che z_1 e z_2 appartengono alla stessa componente connessa dell'insieme delle orbite T -periodiche di $\dot{x} = g(x)$, contro l'ipotesi. ■

Il seguente è il risultato più importante del presente capitolo. Esso descrive la struttura dell'insieme delle T -coppie della 3.0.7; la sua dimostrazione è ispirata a [25].

TEOREMA 3.1.9. *Siano $f : \mathbb{R} \times M \rightarrow \mathbb{R}^k$ e $g : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ campi vettoriali tangenti ad una varietà differenziabile (senza bordo) $M \subset \mathbb{R}^k$, con f T -periodico nella prima variabile. Sia Ω un sottoinsieme aperto di $[0, \infty) \times C_T(M)$, e supponiamo che $\deg(g, \Omega \cap M)$ sia ben definito e non zero. Allora in Ω esiste un insieme connesso Γ di T -coppie non banali, la cui chiusura in $[0, \infty) \times C_T(M)$ incontra $g^{-1}(0) \cap \Omega$ e non è contenuta in nessun sottoinsieme compatto di Ω . In particolare, se M è chiuso in \mathbb{R}^k e $\Omega = [0, \infty) \times C_T(M)$, allora Γ è illimitato.*

Dimostrazione. Poiché l'insieme X delle T -coppie di (3.0.7) è chiuso, è sufficiente provare che Ω contiene un insieme connesso Γ di T -coppie non banali la cui chiusura in $X \cap \Omega$ incontra $g^{-1}(0)$ e non è compatta.

Assumiamo dapprima che f e g siano campi vettoriali lisci. Denotiamo con S l'insieme di tutti i punti iniziali di (3.0.7), e poniamo

$$\tilde{S} = \{(\lambda, p) \in S : \text{la soluzione di (3.1.2) è contenuta in } \Omega\}.$$

Ovviamente \tilde{S} è un aperto di S , quindi possiamo trovare un sottoinsieme aperto U di D tale che $S \cap U = \tilde{S}$ (dove D è l'insieme di tutte le coppie (λ, p) tali che la soluzione di (3.1.2) è definita in $[0, T]$). Si ha che

$$g^{-1}(0) \cap \Omega = g^{-1}(0) \cap \tilde{S} = g^{-1}(0) \cap U,$$

quindi $\deg(g, U \cap M) = \deg(g, \Omega \cap M) \neq 0$. Applicando il Teorema 3.1.4, si ha l'esistenza di un insieme connesso $\Sigma \subset (S \cap U) \setminus g^{-1}(0)$ tale che la sua chiusura in $S \cap U$ è non compatta ed incontra $g^{-1}(0)$. Sia $h : X \rightarrow S$ l'applicazione che assegna ad ogni T -coppia (λ, x) il punto iniziale $(\lambda, x(0))$. Osserviamo che h è continua, suriettiva e, poiché f e g sono lisce, è anche iniettiva. Inoltre, per la dipendenza continua dai dati iniziali, si ottiene la continuità di $h^{-1} : S \rightarrow X$. Allora h manda $X \cap \Omega$ omeomorficamente su $S \cap U$ e, sotto questo omeomorfismo, le T -coppie banali corrispondono ai punti iniziali banali. Questo implica che $\Gamma = h^{-1}(\Sigma)$ è come nella tesi.

Rimuoviamo l'ipotesi aggiuntiva su g ed f . Poniamo $Y_0 = g^{-1}(0) \cap \Omega$ e $Y = X \cap \Omega$. Dobbiamo soltanto provare che la coppia (Y, Y_0) soddisfa le ipotesi del

²Una dimostrazione completa di questo fatto intuitivo può essere dedotta dal Lemma 4.3.1.

Lemma 3.1.2. Supponiamo il contrario. Possiamo trovare un sottoinsieme compatto relativamente aperto C di Y contenente Y_0 . Quindi esiste un sottoinsieme aperto W di Ω tale che la chiusura \overline{W} di W in $[0, \infty) \times C_T(M)$ è contenuta in Ω , $W \cap Y = C$ e $\text{Fr}W \cap Y = \emptyset$. Poiché C è compatto e $[0, \infty) \times M$ è localmente compatto, possiamo scegliere W in modo tale che l'insieme

$$\{(\lambda, x(t)) \in [0, \infty) \times M : (\lambda, x) \in W, t \in [0, T]\}$$

sia contenuto in un sottoinsieme compatto K di $[0, \infty) \times M$. Questo implica che W è limitato con chiusura completa in Ω e che $W \cap M$ è un sottoinsieme relativamente compatto di $\Omega \cap M$. In particolare g è non zero sul bordo di $W \cap M$ (relativo a M). Per risultati ben noti di approssimazione sulle varietà, possiamo trovare delle successioni $\{g_i\}$ ed $\{f_i\}$ di campi vettoriali tangenti lisci, approssimanti uniformemente g ed f , con f_i T -periodico nella prima variabile. Per $i \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande, si ottiene

$$\deg(g_i, W \cap M) = \deg(g, W \cap M).$$

Inoltre, per la proprietà di taglio,

$$\deg(g, W \cap M) = \deg(g, \Omega \cap M) \neq 0.$$

Quindi, dato i sufficientemente grande, la prima parte della dimostrazione può essere applicata all'equazione

$$(3.1.3) \quad \dot{x} = g_i(x) + \lambda f_i(t, x).$$

Denotiamo con X_i l'insieme delle T -coppie di (3.1.3). Esisterà un sottoinsieme connesso Γ_i di $\Omega \cap X_i$ la cui chiusura in Ω incontra $g_i^{-1}(0) \cap W$ e non è contenuta in alcun sottoinsieme compatto di Ω . Proviamo che, per i abbastanza grande, $\Gamma_i \cap \text{Fr}W \neq \emptyset$. Osserviamo che, poiché W è limitato con chiusura completa, per il Lemma 3.1.3 $X_i \cap \overline{W}$ è compatto. Quindi, per i sufficientemente grande, esiste una T -coppia $(\lambda_i, x_i) \in \Gamma_i \cap \text{Fr}W$ di (3.1.3). Per il Teorema di Ascoli-Arzelà, possiamo supporre che $x_i \rightarrow x_0$ in $C_T(M)$ e che $\lambda_i \rightarrow \lambda_0$ con $(\lambda_0, x_0) \in \text{Fr}W$. Di conseguenza

$$\dot{x}_0(t) = g(x_0(t)) + \lambda_0 f(t, x_0(t)) \quad , \quad t \in \mathbb{R}.$$

Quindi (λ_0, x_0) è una T -coppia appartenente a $\text{Fr}W$. Questo contraddice l'ipotesi $\text{Fr}W \cap Y = \emptyset$.

Rimane da provare l'ultima affermazione. Supponiamo che M sia completa. Esiste un insieme connesso Γ di T -coppie di (3.0.7) la cui chiusura $\overline{\Gamma}$ in $[0, \infty) \times C_T(M)$ non è compatta ed incontra $g^{-1}(0)$. Per il Lemma 3.1.3, se $\overline{\Gamma}$ è limitata, allora è compatta. ■

Per comprendere il significato del Teorema 3.1.9, consideriamo per esempio il caso in cui $M = \mathbb{R}^m$. Se $g^{-1}(0)$ è compatto e $\deg(g, \mathbb{R}^m) \neq 0$, allora esiste un insieme illimitato e connesso di T -coppie (in $[0, \infty) \times C_T(\mathbb{R}^m)$) che incontra $g^{-1}(0)$. L'esistenza di questo "ramo" illimitato non può essere distrutta da una particolare scelta di f . Comunque, esso può risultare contenuto nella sezione $\{0\} \times C_T(M)$, come nel seguente semplice esempio in dimensione due, dove $T = 2\pi$:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + \lambda \sin t. \end{cases}$$

Un'altra conseguenza diretta del Teorema 3.1.9 si ha quando $M \subset \mathbb{R}^k$ è una varietà compatta e senza bordo con $\chi(M) \neq 0$ e $\Omega = [0, \infty) \times C_T(M)$. In questo caso, per il teorema di Poincaré-Hopf, $\deg(g, M) = \chi(M)$. Quindi esiste un insieme

illimitato e connesso Γ di T -coppie in $[0, \infty) \times C_T(M)$ che incontra $g^{-1}(0)$. Questo estende un risultato di [19] dove g è supposto identicamente nullo. Notiamo che nel caso in cui g ed f sono localmente lipschitziani in x , la stessa affermazione può essere ottenuta dal Teorema 3 in [9]; dove, invece delle varietà differenziabili è presa in considerazione la classe più ampia degli ANR.

3.2. Esempi di applicazioni

3.2.1. Un primo risultato di molteplicità. I risultati contenuti in questo paragrafo sono tratti da [27]. Consideriamo la seguente equazione differenziale del secondo ordine

$$(3.2.1) \quad \ddot{\theta} = g(\theta) + \lambda f(t, \theta),$$

dove $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ed $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni continue, 2π -periodiche rispetto a θ . Assumiamo inoltre che f sia T -periodica in t . È conveniente vedere g ed f come definite su S^1 ed $\mathbb{R} \times S^1$ rispettivamente.

Chiaramente, (3.2.1) può essere considerata come un'equazione differenziale del primo ordine (non autonoma) sul fibrato tangente $TS^1 = S^1 \times \mathbb{R}$ come segue:

$$(3.2.2) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = g(x_1) + \lambda f(t, x_1). \end{cases}$$

Supponiamo che g assuma sia valori positivi che negativi e che abbia esattamente due zeri θ_1 e θ_2 su S^1 (per esempio $g(\theta) = -\sin \theta$). Quindi $(\theta_1, 0)$ e $(\theta_2, 0)$, che identificheremo con θ_1 e θ_2 , sono gli unici zeri del campo vettoriale tangente ad $S^1 \times \mathbb{R}$ dato da $(x_1, x_2) \mapsto (x_2, g(x_1))$. In ciò che segue, θ_1 e θ_2 saranno identificati, rispettivamente, anche con le T -coppie banali $(0; \hat{\theta}_1, 0)$, $(0; \hat{\theta}_2, 0)$, dove $\hat{\theta}_i$ è l'applicazione costante $t \mapsto \theta_i$ per $i \in \{1, 2\}$.

Vale il seguente teorema.

TEOREMA 3.2.1. *Siano f e g come sopra. Denotiamo con C_1 e C_2 le componenti connesse dell'insieme delle T -coppie di (3.2.2) contenenti θ_1 e θ_2 rispettivamente. Allora, fissato $\mu \geq 0$, le intersezioni di C_1 e C_2 con $[0, \mu] \times C_T(S^1 \times \mathbb{R})$ sono limitate. Inoltre, vale una delle seguenti alternative:*

- (1) $C_1 = C_2$,
- (2) C_1 e C_2 sono disgiunte ed entrambe illimitate.

In particolare, se vale la seconda, allora esistono almeno due soluzioni T -periodiche distinte di (3.2.1) per ogni $\lambda \in [0, \infty)$.

Dimostrazione. Sia $w : [0, \infty) \times C_T(S^1 \times \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{Z}$ una funzione (continua) che assegna ad ogni $(\lambda, x) = (\lambda; x_1, x_2)$ il numero di giri che $x_1(t)$ fa, in un periodo, su S^1 . Più precisamente, w associa a $(\lambda, x) \in [0, \infty) \times C_T(S^1 \times \mathbb{R})$ l'indice di avvolgimento della curva chiusa $t \in [0, T] \mapsto x_1(t) \in S^1$. Vedendo θ_1 e θ_2 come T -coppie, si ha $w(\theta_1) = w(\theta_2) = 0$. Quindi, per continuità, w deve essere identicamente zero sugli insiemi connessi C_1 e C_2 . Questo significa che, dato $(\lambda; x_1, x_2) \in C_1 \cup C_2$, l'applicazione T -periodica $x_1 : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ può essere interpretata come una funzione reale T -periodica; cioè, x_1 è in effetti una soluzione di (3.2.1). La dimostrazione rigorosa di questo fatto intuitivo può essere dedotta da note proprietà dei rivestimenti.

Sia $(\lambda; x_1, x_2)$ una qualunque T -coppia di (3.2.2) con indice di avvolgimento nullo. Esiste $t_0 \in [0, T]$ tale che $x_2(t_0) = 0$, di conseguenza

$$x_2(t) = x_2(t) - x_2(t_0) = \int_{t_0}^t g(x_1(s)) + \lambda f(s, x_1(s)) ds,$$

quindi

$$(3.2.3) \quad |x_2(t)| \leq T \left[\max_{\theta \in \mathbb{R}} |g(\theta)| + \lambda \max_{(s, \theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}} |f(s, \theta)| \right].$$

La disuguaglianza (3.2.3), che vale per ogni T -coppia in $C_1 \cup C_2$, implica che C_1 e C_2 sono limitate in ogni insieme $[0, \mu] \times C_T(S^1 \times \mathbb{R})$.

Definiamo

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{[0, \infty) \times C_T(S^1 \times \mathbb{R})\} \setminus \{\theta_2\}, \\ \Omega_2 &= \{[0, \infty) \times C_T(S^1 \times \mathbb{R})\} \setminus \{\theta_1\}, \end{aligned}$$

ed osserviamo che θ_i , $i = 1, 2$, è l'unico zero del campo vettoriale $(x_1, x_2) \mapsto (x_2, g(x_1))$ in $\Omega_i \cap (S^1 \times \mathbb{R})$. Poiché g cambia segno in θ_i , usando la proprietà di omotopia si può provare che questo campo vettoriale ha indice non nullo in θ_i . Di conseguenza, il Teorema 3.1.9 con $M = S^1 \times \mathbb{R}$ implica che $C_i \cap \Omega_i$, $i = 1, 2$, non può essere compatto.

Possiamo assumere $C_1 \neq C_2$. In questo caso, C_1 e C_2 , essendo componenti connesse, sono disgiunte e, conseguentemente, $C_i \subset \Omega_i$ per $i = 1, 2$. Poiché C_1 e C_2 sono sottoinsiemi chiusi non compatti dello spazio metrico completo $[0, \infty) \times C_T(S^1 \times \mathbb{R})$, essi devono essere entrambi illimitati. Infatti, dal momento che M è chiusa, per il Lemma 3.1.3 ogni insieme limitato di T -coppie è in realtà totalmente limitato. ■

Il teorema appena provato ci permette di ottenere il seguente risultato di molteplicità.

COROLLARIO 3.2.2. *Sia $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua, 2π -periodica la cui immagine contiene 0 nel suo interno. Assumiamo che g abbia esattamente due zeri $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi)$. Allora, data una funzione continua $(t, \theta) \mapsto f(t, \theta)$, T -periodica in $t \in \mathbb{R}$ e 2π -periodica in θ , esiste $\lambda_f > 0$ tale che l'equazione (3.2.1) ha almeno due soluzioni T -periodiche per ogni $\lambda \in [0, \lambda_f]$.*

Dimostrazione. Sia $Z = C_1 \cup C_2$. Il Teorema 3.2.1, combinato con il Lemma 3.1.3, implica che la sezione $Z_0 = Z \cap (\{0\} \times C_T(S^1 \times \mathbb{R}))$ è compatta. È sufficiente³ provare che non esiste nessun sottoinsieme connesso C di Z_0 congiungente θ_1 con θ_2 . Supponiamo per assurdo che un tale C esista.

Possiamo supporre $\theta_1 < \theta_2$, $g(\theta) < 0$ in (θ_1, θ_2) e $g(\theta) > 0$ in $(\theta_2, \theta_1 + 2\pi)$. La connessione di C , che è contenuto in $\{0\} \times C_T(S^1 \times \mathbb{R})$, ci assicura che nell'intorno aperto

$$W = [0, \infty) \times C_T((S^1 \setminus \theta_1) \times \mathbb{R})$$

di θ_2 esiste una T -coppia

$$(0; \bar{x}_1, \bar{x}_2) \in C \cap W \setminus \{\theta_2\}.$$

³Una dimostrazione completa di quest'affermazione può essere fatta discendere dal più generale Lemma 4.3.1.

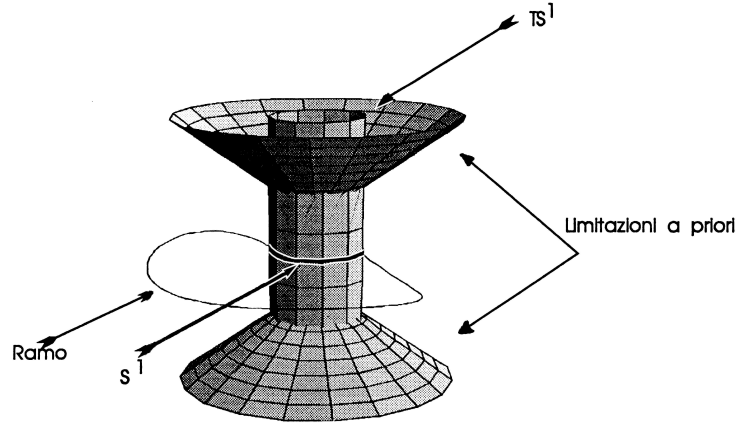


FIGURA 2. Teorema 3.2.1 e Corollario 3.2.2

La funzione \bar{x}_1 può essere vista come una soluzione T -periodica non costante di $\ddot{\theta} = g(\theta)$ tale che $\theta_1 < \bar{x}_1(t) < \theta_1 + 2\pi$ per ogni $t \in [0, T]$. Siano τ_0 e τ_1 rispettivamente il punto di massimo e di minimo di \bar{x}_1 in $[0, T]$. Ovviamente

$$g(\bar{x}_1(\tau_1)) = \frac{d^2 \bar{x}_1}{dt^2}(\tau_1) \leq 0 \leq \frac{d^2 \bar{x}_1}{dt^2}(\tau_0) = g(\bar{x}_1(\tau_0)).$$

Per le proprietà di g e per il fatto che $\theta_1 < \bar{x}_1(t) < \theta_1 + 2\pi$, si ottiene $\bar{x}_1(\tau_1) \leq \theta_2 \leq \bar{x}_1(\tau_0)$, che, chiaramente, è impossibile dal momento che \bar{x}_1 è non costante. ■

Notiamo che, anche nel caso in cui g ed f siano lisce, il precedente risultato non può essere semplicemente dedotto dal teorema della funzione implicita. Infatti, una delle due equazioni linearizzate potrebbe essere la seguente:

$$\ddot{\theta} + \theta = \lambda \sin t.$$

La costruzione effettuata è schematizzata in figura 2 in cui la distanza radiale da TS^1 rappresenta λ .

3.2.2. Alcuni semplici risultati di esistenza. Il Teorema 3.1.9 può essere utilizzato anche per ottenere alcuni semplici risultati di esistenza per soluzioni armoniche di equazioni della forma

$$(3.2.4) \quad \dot{x} = F(t, x),$$

con $F : \mathbb{R} \times M \rightarrow \mathbb{R}^k$ un campo vettoriale (continuo) tangente alla varietà differenziabile $M \subset \mathbb{R}^k$. Un metodo per provare l'esistenza di soluzioni armoniche per la (3.2.4) è quello di scrivere $F(t, x)$ nella forma $g(x) + f(t, x)$ e di studiare poi l'insieme delle soluzioni periodiche dell'equazione parametrizzata (3.0.7).

Il seguente **principio di continuazione** è una variante di un risultato ottenuto essenzialmente in [10], nel caso che M sia un ANR chiuso ed invariante, con l'ipotesi aggiuntiva di unicITÀ del problema di Cauchy. Ricordiamo che per la convenzione fatta, se W è un aperto di $C_T(M)$, con $W \cap M$ si intende l'insieme delle funzioni costanti di W .

TEOREMA 3.2.3. *Siano $f : \mathbb{R} \times M \rightarrow \mathbb{R}^k$ e $g : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ campi vettoriali tangenti ad una varietà differenziabile (con eventuale bordo) $M \subset \mathbb{R}^k$, con f T -periodico nella prima variabile. Sia W un aperto di $C_T(M)$ limitato con chiusura completa tale che :*

(1) *L'insieme*

$$\{g(x(t)) + \lambda f(t, x(t)) \in \mathbb{R}^k : x \in W, t \in [0, T], \lambda \in [0, 1]\}$$

è limitato.

(2) *Per ogni $\lambda \in [0, 1]$, l'equazione (3.0.7) non ha soluzioni nell'insieme*

$$\text{Fr}W \cup \{x \in W : x([0, T]) \cap \partial M \neq \emptyset\}.$$

(3) *Il grado $\text{deg}(g, W \cap M)$ è non zero.*

Allora l'equazione (3.0.7) ha una soluzione in W .

Dimostrazione. Poniamo

$$\Omega_0 = \{x \in W : x([0, T]) \cap \partial M = \emptyset\}.$$

Osserviamo che Ω_0 è limitato con chiusura in $C_T(M)$ completa. Applichiamo il Teorema 3.1.9 all'aperto $\Omega = [0, 1] \times \Omega_0$ di $[0, \infty) \times C_T(M)$. Dall'ipotesi (3) segue $\text{deg}(g, \Omega \cap M) \neq 0$, dunque esiste un connesso Γ di T -coppie in Ω , la cui chiusura $\bar{\Gamma}$ in $[0, \infty) \times C_T(M)$ non è contenuta in alcun compatto di Ω ed incontra

$$g^{-1}(0) \cap W = g^{-1}(0) \cap \Omega.$$

Poiché l'insieme X delle T -coppie della (3.0.7) è chiuso in $[0, \infty) \times C_T(M)$, è sufficiente provare che $\bar{\Gamma}$ interseca $\{1\} \times \Omega_0$. Supponiamo per assurdo che non sia così. L'ipotesi (2) implica che Γ è contenuto nell'insieme limitato $[0, 1] \times \Omega_0$. In tale caso, per la (1), applicando il Lemma 3.1.3, si ha che Γ è totalmente limitato. Poiché Ω_0 ha chiusura completa, $\bar{\Gamma}$ deve essere compatto. D'altra parte, poiché abbiamo supposto $\bar{\Gamma} \cap \{1\} \times \Omega_0 = \emptyset$, si ha, per l'ipotesi (2), $\bar{\Gamma} \subset \Omega$, che è assurdo, perché Γ non può essere contenuto in nessun compatto di Ω . Dunque deve esistere in $\{1\} \times \Omega_0$ una T -coppia per la (3.0.7). ■

OSSERVAZIONE 3.2.4. *In particolare, se M è completa, l'ipotesi (1) del Teorema 3.2.3 è automaticamente verificata.*

Per vederlo, supponiamo che M sia completa e denotiamo con Z la chiusura in \mathbb{R}^k dell'insieme

$$\{x(t) : x \in W, t \in [0, T]\}.$$

Osserviamo che Z è un sottoinsieme limitato di M . Quindi, poiché M è chiusa, Z è compatto. Ora, l'insieme della (1) è immagine di $[0, T] \times [0, 1] \times Z$ secondo l'applicazione (continua) data da $(t, \lambda, p) \mapsto g(p) + \lambda f(t, p)$, dunque è compatto.

La possibilità di applicare il Teorema 3.2.3 dipende dall'esistenza di limitazioni a priori per le soluzioni T -periodiche dell'equazione (3.0.7). Il seguente risultato ci permetterà di esprimere una condizione sufficiente per l'esistenza di soluzioni periodiche di (3.2.4). Esso si riduce al Teorema 1 di [19] nel caso che il campo punti strettamente verso l'esterno lungo il bordo della varietà.

TEOREMA 3.2.5. *Sia $M \subset \mathbb{R}^k$ una varietà differenziabile compatta (con eventuale bordo) con $\chi(M) \neq 0$, ed $F : \mathbb{R} \times M \rightarrow \mathbb{R}^k$ un campo vettoriale tangente, T -periodico nella prima variabile, tale che $F(t, p)$ punti non internamente ad M lungo ∂M , per ogni $t \in [0, T]$. Allora esiste una soluzione T -periodica di (3.2.4).*

Dimostrazione. Poniamo $g(x) = F(0, x)$ e $f(t, x) = F(t, x) - g(x)$. Sia $\nu : \partial M \rightarrow \mathbb{R}^k$ il campo vettoriale unitario, tangente ad M , normale a ∂M e diretto verso l'esterno.

Supponiamo dapprima che $F(t, p)$ punti strettamente verso l'esterno di M lungo ∂M per ogni $t \in [0, T]$; cioè che $\langle F(t, p), \nu(p) \rangle > 0$ per ogni $p \in \partial M$ e $t \in [0, T]$. In questo caso, per $\lambda \in [0, 1]$, non possono esistere soluzioni periodiche della (3.0.7) che incontrano ∂M . Infatti, se $p \in \partial M$ e $t \in [0, T]$, si ha

$$\begin{aligned} \langle g(p) + \lambda f(t, p), \nu(p) \rangle &= \\ &= (1 - \lambda) \langle F(0, p), \nu(p) \rangle + \lambda \langle F(t, p), \nu(p) \rangle > 0. \end{aligned}$$

Posto $W = C_T(M)$, per il Teorema di Poincaré-Hopf risulta

$$\deg(g, M \cap W) = \deg(g, M) = \chi(M) \neq 0.$$

Pertanto, per il Teorema 3.2.3, la (3.2.4) ha una soluzione T -periodica.

Rimuoviamo l'ipotesi addizionale che $F(t, p)$ punti strettamente all'esterno di M lungo ∂M per ogni $t \in [0, T]$. Sia $\hat{\nu} : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ un campo vettoriale tangente continuo tale che $\hat{\nu}|_{\partial M} = \nu$. Poniamo

$$F_n(t, p) = F(t, p) + \frac{\hat{\nu}(p)}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Osserviamo che $\langle \nu(p), F_n(t, p) \rangle > 0$ per ogni $n > 0$, $t \in [0, T]$ e $p \in \partial M$. Per la prima parte della dimostrazione, per ogni $n > 0$, esiste $x_n \in C_T(M)$ tale che $\dot{x}_n(t) = F_n(t, x_n(t))$ e $x_n([0, T]) \subset \text{int}M$. Quindi la successione $\{\dot{x}_n\}$ è limitata. Per il Teorema di Ascoli-Arzelà, possiamo supporre $x_n \rightarrow x_0$ in $C_T(M)$. Questo implica $F_n(t, x_n(t)) \rightarrow F(t, x_0(t))$ uniformemente in $[0, T]$. Quindi $\dot{x}_0(t) = F(t, x_0(t))$ per $t \in [0, T]$. ■

Osserviamo che se, nell'ipotesi del Teorema 3.2.5, assumiamo che F punti non esternamente, il teorema risulta ancora valido con minimi cambiamenti nella dimostrazione.

Un corollario del Teorema (3.2.5) è il seguente risultato ispirato ai lavori di Krasnosel'skii sulle "guiding functions" (vedi per esempio [33, 34, 42]).

COROLLARIO 3.2.6. *Sia $F : \mathbb{R} \times M \rightarrow \mathbb{R}^k$ un campo vettoriale tangente ad una varietà differenziabile $M \subset \mathbb{R}^k$ e sia $V : M \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 . Supponiamo che per un certo $\rho \in \mathbb{R}$ siano verificate le seguenti proprietà:*

- (1) $\text{grad}V(p) \neq 0$ in $V^{-1}(\rho)$.
- (2) L'insieme $V^{-1}((-\infty, \rho])$ è compatto.
- (3) Per ogni $t \in [0, T]$ e per ogni $p \in V^{-1}(\rho)$

$$(3.2.5) \quad \langle \text{grad}V(p), F(t, p) \rangle \geq 0.$$

Allora, se $\deg(\text{grad}V, V^{-1}((-\infty, \rho])) \neq 0$, l'equazione (3.2.4) ha una soluzione T -periodica in $V^{-1}((-\infty, \rho])$.

Dimostrazione. Poniamo $M^\rho = V^{-1}((-\infty, \rho])$; osserviamo che M^ρ , dal momento che per la (1) ρ è un valore regolare per V , è una varietà differenziabile con bordo $V^{-1}(\rho)$. Per la (3), $\text{grad}V$ punta non internamente ad M^ρ lungo $V^{-1}(\rho)$. Poiché $\text{grad}V(p) \neq 0$ in $V^{-1}(\rho)$, il campo $\text{grad}V$ è omotopo ad uno che punta esternamente su $V^{-1}(\rho)$; per il teorema di Poincaré-Hopf, si ha

$$\chi(M^\rho) = \deg(\text{grad}V, \text{int}M^\rho) \neq 0.$$

La tesi segue applicando il Teorema 3.2.5 alla varietà compatta M^ρ . \blacksquare

Osserviamo che il Corollario 3.2.6 rimane valido anche se la (3.2.5) è sostituita da

$$(3.2.6) \quad \langle \text{grad}V(p), F(t, p) \rangle \leq 0, \quad \forall t \in [0, T] \text{ e } \forall p \in V^{-1}(\rho).$$

In letteratura vi sono molti esempi di teoremi di esistenza di soluzioni armoniche per l'equazione (3.2.4) ottenuti cercando insiemi compatti, positivamente invarianti per l'operatore di traslazione di Poincaré, e con la proprietà del punto fisso (vedi per esempio [40, 42, 50] ed i riferimenti colà citati). Il Teorema 3.2.6 non può essere provato con tecniche di questo tipo, infatti esso non richiede che l'insieme $V^{-1}((-\infty, \rho])$ abbia la proprietà del punto fisso.

Non sempre è necessaria la conoscenza esplicita del grado di $\text{grad}V$. Quello che segue è un noto teorema di Krasnosel'skii in questa direzione (vedi [33, 34]).

TEOREMA 3.2.7. *Sia $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ un campo vettoriale continuo. Supponiamo che esista una funzione $V : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che*

- (1) $\langle \text{grad}V(p), F(t, p) \rangle > 0$ per $0 \leq t \leq T$ e $|p| \geq r_0$,
- (2) $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty$ ($-\infty$).

Allora l'equazione (3.2.4) ha una soluzione T -periodica.

Vogliamo estendere questo teorema al caso delle varietà differenziabili. Ci serviremo del seguente lemma che è ispirato alle dimostrazioni degli analoghi risultati preliminari alla teoria di Morse (vedi per esempio [44, 32]).

LEMMA 3.2.8. *Sia $M \subset \mathbb{R}^k$ una varietà differenziabile completa tale che $\chi(M)$ risulti ben definito e sia $V : M \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 limitata inferiormente. Supponiamo che esista $\rho \in \mathbb{R}$ tale che*

$$\text{grad}V(p) \neq 0$$

per ogni $p \in M \setminus V^{-1}(-\infty, \rho)$. Allora $V^{-1}((-\infty, \rho])$ è un retratto di deformazione⁴ di M e dunque

$$\chi(M) = \chi(V^{-1}((-\infty, \rho])).$$

Dimostrazione. Per ogni $p \in M \setminus (\text{grad}V)^{-1}(0)$, definiamo

$$G(p) = -\frac{\text{grad}V(p)}{|\text{grad}V(p)|^2}.$$

Sia $\eta_p(\cdot)$ la soluzione massimale dell'equazione $\dot{x} = G(x)$, soddisfacente alla condizione $x(0) = p$, definiamo $\varphi_p(t) = V(\eta_p(t))$. Notiamo che, fissato t , per i ben noti

⁴Un sottoinsieme B di uno spazio topologico A è un retratto di deformazione di A se esiste una retrazione, cioè un'applicazione continua $r : A \rightarrow B$ con la proprietà che $r|_B$ è l'identità, tale che r è omotopa all'identità su A .

Ovviamente, se B è un retratto di deformazione di A , allora è dello stesso tipo di omotopia di A .

risultati di dipendenza continua dai dati iniziali la funzione $p \mapsto \eta_p(t)$ è continua. Osserviamo che

$$\begin{aligned}\varphi_p'(t) &= \langle \text{grad}V(\eta_p(t)), \dot{\eta}_p(t) \rangle \\ &= \langle \text{grad}V(\eta_p(t)), G(\eta_p(t)) \rangle = -1.\end{aligned}$$

Dunque $\varphi_p(t) = -t + \varphi_p(0) = -t + V(p)$; quindi, $\varphi_p(t)$ è sicuramente ben definita nell'intervallo $[0, V(p) - \rho]$ e per $t = V(p) - \rho$ $\eta_p(t)$ appartiene a $V^{-1}(\rho)$. Consideriamo la retrazione $r : M \rightarrow V^{-1}((-\infty, \rho])$ definita da

$$r(p) = \begin{cases} \eta_p(V(p) - \rho) & \text{se } V(p) \geq \rho \\ p & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Osserviamo che r è omotopa all'identità su M , con omotopia

$$H(p, \lambda) = \begin{cases} \eta_p(\lambda(V(p) - \rho)) & \text{se } V(p) \geq \rho \\ p & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

In altri termini, $V^{-1}((-\infty, \rho])$ è un retratto di deformazione di M . ■

Il seguente risultato estende alle varietà il Teorema 3.2.7.

TEOREMA 3.2.9. *Sia $F : \mathbb{R} \times M \rightarrow \mathbb{R}^k$ un campo vettoriale, T -periodico, tangente ad una varietà differenziabile completa $M \subset \mathbb{R}^k$, con $\chi(M) \neq 0$. Supponiamo che esista un'applicazione $V : M \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 , propria, limitata inferiormente, ed un numero reale ρ tale che $\text{grad}V(p) \neq 0$ in $M \setminus V^{-1}((-\infty, \rho))$ e che*

$$(3.2.7) \quad \langle \text{grad}V(p), F(t, p) \rangle \geq 0,$$

per ogni $t \in [0, T]$ e per ogni $p \in V^{-1}(\rho)$. In questo caso l'equazione (3.2.4) ha una soluzione T -periodica in $V^{-1}((-\infty, \rho])$.

Dimostrazione. Poniamo, per brevità, $M^\rho = V^{-1}((-\infty, \rho])$ e osserviamo che M^ρ è una varietà con bordo $\partial M^\rho = V^{-1}(\rho)$. Inoltre M^ρ è compatta, essendo V propria e limitata inferiormente. Supponiamo dapprima che V sia di classe C^2 . In questo caso la tesi è una conseguenza del Corollario 3.2.6. Infatti, per ipotesi, ρ è un valore regolare per V e, per il Teorema di Poincaré-Hopf ed il Lemma 3.2.8,

$$\deg(\text{grad}V, \text{int}M^\rho) = \chi(M^\rho) = \chi(M) \neq 0.$$

Rimuoviamo adesso l'ipotesi che V sia di classe C^2 . Fissiamo un intorno aperto relativamente compatto A di M^ρ . Supponiamo dapprima che la disuguaglianza (3.2.7) sia stretta. Per la continuità di F e di V , esiste un intorno aperto $U \subset A$ di $V^{-1}(\rho)$ tale che, per ogni $p \in \bar{U}$ e $t \in [0, T]$, $\langle F(t, p), \text{grad}V(p) \rangle > 0$. Per risultati ben noti di approssimazione su varietà, la V può essere approssimata, nel senso della topologia $C^1_S(M, \mathbb{R})$ (detta anche *topologia fine o di Whitney* vedi ad esempio [32]), da funzioni di classe C^2 . In particolare, esiste una funzione W , di classe C^2 , tale che $\text{grad}W$ è diverso da zero in $U \cup (M \setminus M^\rho)$, $W^{-1}((-\infty, \rho]) \subset U \cup M^\rho$ e che $W^{-1}(\rho) \subset U$. Inoltre, prendendo W sufficientemente vicina a V (sempre nel senso della topologia $C^1_S(M, \mathbb{R})$) possiamo assumere che, per ogni $p \in W^{-1}(\rho)$ e $t \in [0, T]$, si abbia

$$\langle F(t, p), \text{grad}W(p) \rangle > 0$$

Dal momento che $W^{-1}((-\infty, \rho])$ è compatto, procedendo come nella prima parte della dimostrazione si prova l'esistenza di una soluzione T -periodica dell'equazione (3.2.4) la cui immagine è contenuta in

$$W^{-1}((-\infty, \rho]) \subset A.$$

Sia ora $\{A_n\}$ una successione decrescente di intorni relativamente compatti di M^ρ con la proprietà che

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = M^\rho.$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste una soluzione T -periodica x_n di (3.2.4) in A_n . Poiché A_1 è relativamente compatto, per il Teorema di Ascoli-Arzelà, si può supporre che $\{x_n\}$ converga uniformemente ad una soluzione \bar{x} di (3.2.4), la cui immagine deve necessariamente stare in M^ρ .

Rimuoviamo l'ipotesi che la disuguaglianza (3.2.7) sia stretta. Poniamo

$$F_n(t, p) = F(t, p) + \frac{1}{n} \text{grad}V(p).$$

Evidentemente $\langle F_n(t, p), \text{grad}V(p) \rangle$ risulta maggiore di zero per ogni $p \in V^{-1}(\rho)$ e $t \in [0, T]$. Dunque, per la parte precedente della dimostrazione, l'equazione $\dot{x} = F_n(t, x)$ ha una soluzione T -periodica in M^ρ . Applicando il Teorema di Ascoli-Arzelà, come nel Teorema (3.2.5), si ottiene che esiste una soluzione T -periodica della (3.2.4) in M^ρ . ■

Osserviamo che, con minime modifiche alla dimostrazione, la tesi del Teorema 3.2.9 rimane valida anche se la disuguaglianza (3.2.7) è sostituita dalla

$$\langle \text{grad}V(p), F(t, p) \rangle \leq 0.$$

Continuazione di soluzioni armoniche

4.1. Definizioni e risultati principali

Siano $g : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ ed $f : \mathbb{R} \times M \rightarrow \mathbb{R}^k$ campi vettoriali continui tangenti alla varietà senza bordo $M \subset \mathbb{R}^k$. Assumiamo che f sia T -periodico nella prima variabile. Tratteremo le soluzioni armoniche della seguente equazione differenziale parametrizzata

$$(4.1.1) \quad \dot{x} = g(x) + \lambda f(t, x) \quad , \quad \lambda \in [0, +\infty).$$

Ci occuperemo sia del caso in cui la g è non identicamente nulla (non degenere), sia di quello in cui $g(x) \equiv 0$ (degenere). La trattazione del primo è ispirata a [28] mentre quella del secondo è tratta da alcuni lavori di Furi e Pera, tra cui [22, 25]. Un caso, in un certo senso intermedio, che merita di essere menzionato a parte è quello, tratto da [45, 46], in cui $g^{-1}(0)$ è una varietà differenziabile (contenuta in M).

4.1.1. Caso non degenere. Nel capitolo precedente sono state presentate le nozioni di T -coppia e di punto iniziale; è stato inoltre provato un risultato sulla struttura dell'insieme delle T -coppie (Teorema 3.1.9). In questa parte rivedremo i concetti precedentemente introdotti con un diverso linguaggio.

Una T -coppia $(\lambda, x) \in [0, \infty) \times C_T(M)$ per l'equazione (4.1.1) è detta banale se $\lambda = 0$ ed x è costante. Notiamo che non tutte le T -coppie della forma $(0, x)$ sono banali. Consideriamo, per esempio, la seguente equazione in $M = \mathbb{R}^2$:

$$(4.1.2) \quad \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + \lambda \sin t. \end{cases}$$

La T -coppia $(0; \sin t, \cos t)$ è non banale.

Come nel capitolo precedente, denotiamo con X il sottoinsieme di $[0, \infty) \times C_T(M)$ costituito da tutte le T -coppie. Per semplicità continueremo ad assumere le convenzioni fatte in precedenza sulle inclusioni di M in $C_T(M)$ ed in $[0, \infty) \times M$, nonché di $[0, \infty) \times M$ e di $C_T(M)$ in $[0, \infty) \times C_T(M)$.

Ricordiamo che, con queste identificazioni, se Ω è un aperto di $[0, \infty) \times C_T(M)$, con $\Omega \cap M$ intendiamo l'aperto di M costituito dai $p \in M$ tali che la coppia $(0, \hat{p})$ appartiene a Ω .

Con le convenzioni fatte, un punto $p \in g^{-1}(0)$ può essere visto come una T -coppia banale. Quindi, l'insieme $g^{-1}(0)$ sarà detto insieme delle T -coppie banali.

Un punto $p \in g^{-1}(0)$ è detto *punto di emanazione* per la (4.1.1) se appartiene alla chiusura di $X \setminus g^{-1}(0)$ in $[0, \infty) \times C_T(M)$. Dato un aperto Ω di $[0, \infty) \times C_T(M)$, una componente connessa di $(\Omega \cap X) \setminus g^{-1}(0)$ è detta *ramo globale di continuazione (relativo a Ω)* per la (4.1.1), se la sua chiusura in Ω interseca $\Omega \cap g^{-1}(0)$ e non

è compatta (cioè, se la sua chiusura in $[0, \infty) \times C_T(M)$ non è contenuta in un compatto di Ω).

Osserviamo che ogni T -coppia appartenente ad un ramo globale di continuazione Γ deve essere "omotopicamente banale", nel senso che, se $(\lambda, x) \in \Gamma$, allora x è omotopa ad un'applicazione costante. Vale infatti il seguente risultato.

TEOREMA 4.1.1. *Sia Λ un sottoinsieme connesso di $[0, \infty) \times C_T(M)$ che interseca $g^{-1}(0)$; allora, se $(\lambda, x) \in \Lambda$, x è omotopa ad un'applicazione costante.*

Dimostrazione. Se $(\lambda, x) \in \Lambda$, x è un elemento di $C(S^1, M) = C_T(M)$. Inoltre, l'applicazione che porta $(\lambda, x) \in [0, \infty) \times C_T(M)$ in $x \in C(S^1, M)$ è evidentemente continua. Osserviamo che, se due applicazioni continue in $C(S^1, M)$ sono sufficientemente vicine, allora sono omotope (questa è una conseguenza della compattezza di S^1 e del fatto che M è un ANR). Quindi, nello spazio $C(S^1, M)$ (con l'usuale topologia uniforme), le classi di omotopia sono aperte. La tesi segue dalla connessione di Λ . ■

Il Teorema 3.1.9 assume la forma seguente.

TEOREMA 4.1.2. *Sia Ω un aperto di $[0, \infty) \times C_T(M)$; supponiamo che $\deg(g, \Omega \cap M)$ sia ben definito e non nullo. Allora la (4.1.1) ammette un ramo globale di continuazione relativo a Ω . In particolare, se M è completa, questo ramo non può essere contenuto in nessun sottoinsieme limitato e completo di Ω .*

Notiamo che il ramo globale di continuazione dell'equazione (4.1.2) è "completamente verticale", cioè è tutto contenuto nella sezione $\{0\} \times C_T(M)$. La situazione, in generale, può essere molto diversa. Consideriamo per esempio la seguente equazione in $M = \mathbb{R}^2$:

$$(4.1.3) \quad \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -2x + \lambda \sin t. \end{cases}$$

In questo caso, prendendo $\Omega = [0, \infty) \times C_T(\mathbb{R}^2)$, un semplice calcolo mostra che il ramo globale emanante dall'origine di \mathbb{R}^2 non contiene T -coppie non banali appartenenti alla sezione $\lambda = 0$.

È conveniente distinguere tra le situazioni esemplificate dalle (4.1.2) e (4.1.3). Una T -coppia (non banale) (λ, x) è detta *strettamente non banale* se $\lambda > 0$. Dunque, un punto di emanazione $p \in g^{-1}(0)$ per la (4.1.1) è un *punto di emanazione stretto* se, in ogni suo intorno (in $[0, \infty) \times C_T(M)$) esiste una T -coppia (λ, x) con $\lambda > 0$.

Ovviamente $(0, 0)$ è un punto di emanazione stretto per (4.1.3) ma non per (4.1.2). Notiamo che un punto di emanazione stretto può essere punto di accumulazione di T -coppie non banali sia strette che ordinarie; come illustrato dal seguente esempio in $M = \mathbb{R}^2$ con $T = 2\pi$:

$$(4.1.4) \quad \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -4x + \lambda(x + \sin(t)). \end{cases}$$

Nel proseguo faremo uso di una nozione più restrittiva di punto di emanazione, cioè diremo che un punto di emanazione $p \in g^{-1}(0)$ per la (4.1.1) è *forte* se esiste un intorno U di p , tale che ogni T -coppia (λ, x) in $U \setminus \{p\}$ è strettamente non banale, come per esempio accade per la (4.1.3).

Il seguente Teorema 4.1.3 è una condizione sufficiente affinché un punto di emanazione sia forte.

Diremo che $p \in g^{-1}(0)$ è T -risonante per (4.1.1), se g è C^1 in un intorno di p il problema linearizzato (su T_pM)

$$\begin{cases} \dot{x} = g'(p)x, \\ x(0) = x(T), \end{cases}$$

che corrisponde a $\lambda = 0$, ammette soluzioni T -periodiche non banali.

Notiamo che un punto $p \in g^{-1}(0)$ non è T -risonante se e solo se $g'(p)$ (che è un endomorfismo di T_pM , vedi per esempio [43]) non ha autovalori della forma $\frac{2\pi ni}{T}$ con $n \in \mathbb{Z}$.

Il risultato seguente mostra che se un punto $p \in g^{-1}(0)$ è non T -risonante, allora è di emanazione forte. Questo potrebbe essere provato, nel caso che f sia di classe C^1 , anche facendo ricorso al teorema della funzione implicita. Tuttavia preferiamo dedurre dal Teorema 4.1.2, in modo topologico, che p è di emanazione e dimostrare direttamente che lo è in senso forte.

TEOREMA 4.1.3. *Sia $g : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ un campo vettoriale tangente di classe C^1 . Se $p \in g^{-1}(0)$ è non T -risonante per (4.1.1), allora è un punto di emanazione forte.*

Dimostrazione. Poiché p è non T -risonante, è uno zero non degenero di g e

$$i(g, p) = \text{sign}(\det g'(p)) \neq 0.$$

Dunque, per il Teorema 4.1.2, p è un punto di emanazione per (4.1.1). Proviamo che p è forte.

Supponiamo per assurdo che esista una successione di T -coppie non banali della forma $\{(0, x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergente a p (ricordiamo che, per la convenzione fatta, p può essere visto come un elemento di $[0, \infty) \times C_T(M)$). Per definizione, si ha $|x_n(t) - p| \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$ uniformemente in t (ricordiamo che M è immersa in \mathbb{R}^k) e, in particolare, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n(0) = p$. Poniamo

$$p_n = x_n(0) \quad \text{e} \quad u_n = \frac{p_n - p}{|p_n - p|}.$$

Senza perdita di generalità possiamo supporre che $u_n \rightarrow u \in T_pM$. Denotiamo con $P_t : M \rightarrow M$ l'operatore di t -traslazione di Poincaré associato all'equazione $\dot{x} = g(x)$. È ben noto, dal momento che g è C^1 , che l'applicazione $P_t(\cdot)$ è differenziabile. Definiamo $\Phi : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ ponendo $\Phi(\xi) = \xi - P_T(\xi)$. Ovviamente Φ è differenziabile e $\Phi(p_n) = 0$. Dunque,

$$\Phi'(p)u = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi(p_n) - \Phi(p)}{|p_n - p|} = 0.$$

D'altra parte $\Phi'(p) : T_pM \rightarrow \mathbb{R}^k$ opera come segue

$$\Phi'(p)v = v - P'_T(p)v, \quad \forall v \in T_pM.$$

È facile verificare che l'applicazione $\alpha : t \mapsto P'_t(p)u$ soddisfa il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\alpha}(t) = g'(p)\alpha(t) \\ \alpha(0) = u. \end{cases}$$

Poiché p è non T -risonante, $\Phi'(p)u = \alpha(0) - \alpha(T) \neq 0$. Una contraddizione. ■

La non T -risonanza è soltanto sufficiente affinché $p \in g^{-1}(0)$ sia un punto di emanazione forte, come illustrato dalla seguente equazione in $M = \mathbb{R}^2$:

$$(4.1.5) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - y^3 + \lambda \sin t. \end{cases}$$

Si prova infatti facilmente che per $\lambda = 0$ la (4.1.5) non ammette soluzioni 2π -periodiche non banali.

4.1.2. Quando l'insieme degli equilibri è una varietà. Siano $g : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ ed $f : \mathbb{R} \times M \rightarrow \mathbb{R}^k$ campi vettoriali tangenti, con f T -periodica nella prima variabile. Supponiamo che $g^{-1}(0)$ sia una varietà differenziabile di classe C^2 . I risultati esposti sono tratti (con qualche differenza di linguaggio) da [45, 46].

Osserviamo che, nel caso che la varietà $g^{-1}(0)$ sia di dimensione maggiore od uguale ad 1, non possono esistere punti di emanazione in senso forte; infatti, per definizione, un punto di emanazione forte è isolato nell'insieme $g^{-1}(0)$ delle T -coppie banali. In questo caso, piuttosto che di punto di emanazione stretto si preferisce parlare di *punto di biforcazione* (si vedano, per esempio, i lavori citati di Morassi, Furi e Pera).

In questo paragrafo assumeremo che $N = g^{-1}(0)$ sia una sottovarietà n -dimensionale di M ($0 \leq n$) tale che, per ogni $p \in N$, $T_p N = \ker g'(p)$.

È utile introdurre la seguente nozione. Un campo vettoriale tangente $g : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ è detto *T -iperbolico* se, per ogni $p \in g^{-1}(0)$, l'endomorfismo $g'(p) : T_p M \rightarrow T_p M$ è privo di autovalori della forma $\frac{2k\pi i}{T}$ con $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Qui, a differenza della condizione di non T -risonanza, l'autovalore nullo è ammesso.

Il seguente risultato (Teorema 2.1 di [46]) esprime una condizione necessaria perché un punto $p \in g^{-1}(0)$ sia di biforcazione.

TEOREMA 4.1.4. *Siano g , f ed N come sopra. Se $p_0 \in N$ è un punto di biforcazione per la (4.1.1), allora esistono $v \in \{0\} \cup (T_{p_0} M \setminus T_{p_0} N)$ e $\mu \in [0, 1]$ non entrambi nulli tali che*

$$(4.1.6) \quad \left(e^{Tg'(p_0)} - I \right) v + \mu \int_0^T e^{(T-t)g'(p_0)} f(t, p_0) dt = 0,$$

dove I rappresenta l'identità su $T_{p_0} M$.

In particolare, se g è T -iperbolico, allora

$$(4.1.7) \quad \int_0^T f(t, p) dt \in \text{Im} g'(p_0).$$

Osserviamo che, in [46], f è assunta di classe C^2 . Un esame della dimostrazione di tale teorema mostra tuttavia che tale ipotesi non è necessaria.

Un esempio significativo di applicazione di questo teorema si ha per le equazioni del secondo ordine definite su varietà. Tale aspetto sarà approfondito nel prossimo capitolo. Vediamo adesso una condizione sufficiente (di carattere locale) affinché un punto sia di biforcazione (Teorema 2.2 in [46]).

TEOREMA 4.1.5. *Siano $g : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ ed $f : \mathbb{R} \times M \rightarrow \mathbb{R}^k$ campi vettoriali tangenti, con g ed f di classe rispettivamente C^2 e C^1 , ed f T -periodica nella prima variabile. Sia $p_0 \in N$ un punto che soddisfa la condizione (4.1.7). Denotiamo con E lo spazio ortogonale a $\text{Im} g'(p_0)$ in $T_{p_0} M$ e consideriamo l'applicazione $\sigma_E : M \rightarrow E$ definita da:*

$$\sigma_E(p) = \pi_E \left(\int_0^T f(t, p) dt \right),$$

dove π_E indica la proiezione ortogonale di \mathbb{R}^k su E . Se $\sigma'_E(p_0)|_{T_{p_0} N}$ è un isomorfismo, allora p_0 è un punto di biforcazione per la (4.1.1).

In [46] la f è supposta di classe C^2 . Dalla dimostrazione si vede tuttavia che tale ipotesi può essere rilassata.

Consideriamo il caso in cui $N = g^{-1}(0)$ sia una varietà 0-dimensionale. Per ogni $p_0 \in N$, si ha $T_{p_0}N = \ker g'(p_0) = \{0\}$. Dunque $\sigma'_E(p_0)$ è un isomorfismo se e solo se $g'(p_0)$ è suriettiva. Cioè la condizione sufficiente si riduce al Teorema 4.1.3.

L'importante caso $g(x) \equiv 0$ (degenere) sarà analizzato in maggiore dettaglio nel seguito; vedremo in particolare che le due condizioni, necessaria e sufficiente, appena enunciate assumono forme assai più semplici.

Un caso importante a cui possono essere applicati i Teoremi 4.1.4 e 4.1.5 è quello in cui $M = \mathbb{R}^m$ e g è un campo vettoriale lineare. Rappresentiamo la g con la matrice A . Ovviamente $g^{-1}(0) = \ker A$. In questa situazione i teoremi 4.1.4 e 4.1.5 possono essere migliorati come segue (vedi [46]).

TEOREMA 4.1.6. *Sia $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ un campo vettoriale continuo e T -periodico nella prima variabile. Sia $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ un campo vettoriale lineare. Valgono le seguenti affermazioni*

- (1) *Se un punto $p_0 \in \ker A$ è un punto di biforcazione (stretto) per la*

$$(4.1.8) \quad \dot{x} = Ax + \lambda f(t, x),$$

allora

$$(4.1.9) \quad \int_0^T e^{(T-t)A} f(t, p_0) dt \in \text{Im}(e^{TA} - I).$$

In particolare, se A è T -iperbolico, la (4.1.9) diventa

$$\int_0^T f(t, p_0) dt \in \text{Im}A.$$

- (2) *Supponiamo che f sia di classe C^1 . Sia $p_0 \in \ker A$ un punto soddisfacente la (4.1.9). Poniamo $E = \text{Im}(e^{TA} - I)^\perp$. Consideriamo l'applicazione $v : \mathbb{R}^m \rightarrow E$ data da*

$$v(p) = \pi_E \left(\int_0^T e^{(T-t)A} f(t, p) dt \right).$$

Se la restrizione di $v'(p_0)$ a $\ker(e^{TA} - I)$ è un isomorfismo, allora p_0 è un punto di biforcazione stretto per la (4.1.8). In particolare, se A è T -iperbolico, consideriamo il campo vettoriale

$$\hat{v}(p) = \pi_{\text{Im}A^\perp} \left(\int_0^T f(t, p) dt \right).$$

Una condizione sufficiente affinché p_0 sia un punto di biforcazione per la (4.1.8) è che la restrizione a $\ker A$ di $\hat{v}'(p_0)$ sia un isomorfismo su $\text{Im}A^\perp$.

4.1.3. Il caso degenere. Sia $f : \mathbb{R} \times M \rightarrow \mathbb{R}^k$ un campo vettoriale tangente (continuo) e T -periodico nella prima variabile. In questa parte studiamo l'insieme delle soluzioni T -periodiche dell'equazione

$$(4.1.10) \quad \dot{x} = \lambda f(t, x).$$

Osserviamo che in questo caso l'insieme delle T -coppie banali coincide con la varietà M . Coerentemente con quanto visto prima, un punto $p_0 \in M$ è detto *di*

biforcazione per la (4.1.10) se in ogni suo intorno esistono T -coppie non banali (cioè se è un punto di emanazione stretto). Denotiamo con X l'insieme di tutte le T -coppie. Dato un aperto $\Omega \subset [0, \infty) \times C_T(M)$, una componente connessa di $\Omega \cap X \setminus M$ è un *ramo globale di biforcazione* se la sua chiusura in Ω è non compatta ed interseca la "varietà banale" M .

Dato un campo vettoriale tangente $f : \mathbb{R} \times M \rightarrow \mathbb{R}^k$, T -periodico nella prima variabile, definiamo il "vento medio" $w_f : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ ponendo

$$w_f(p) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t, p) dt.$$

Vale il seguente risultato di esistenza di rami globali di biforcazione.

TEOREMA 4.1.7. *Sia $f : \mathbb{R} \times M \rightarrow \mathbb{R}^k$ un campo vettoriale tangente T -periodico nella prima variabile. Dato un aperto Ω di $[0, \infty) \times C_T(M)$, se $\deg(w_f, \Omega \cap M)$ è ben definito e non nullo, allora esiste un ramo globale di biforcazione per la (4.1.10) la cui chiusura incontra $w_f^{-1}(0) \cap \Omega$.*

Dimostrazione. Si veda [25]. ■

COROLLARIO 4.1.8. *Siano f e w_f come nel Teorema 4.1.7. Supponiamo che M sia una varietà completa, U un suo aperto e che $\deg(w_f, U)$ sia definito e non zero. Allora l'equazione (4.1.10) ammette in $[0, +\infty) \times C_T(M)$ un ramo connesso Γ di T -coppie non banali la cui chiusura $\bar{\Gamma}$ incontra U in uno zero di w_f e che soddisfa una delle seguenti proprietà:*

- (1) $\bar{\Gamma}$ è illimitato;
- (2) $\bar{\Gamma}$ contiene un punto di biforcazione in $M \setminus U$.

Ponendo $g(x) \equiv 0$ nel Teorema 4.1.4 si ottiene immediatamente una condizione necessaria perché un punto sia di biforcazione per la (4.1.10). Tuttavia la condizione può essere ricavata anche direttamente, in modo assai semplice (si veda [25]).

TEOREMA 4.1.9. *Sia f come sopra. Condizione necessaria affinché $p_0 \in M$ sia un punto di biforcazione per la (4.1.10) è che $w_f(p_0) = 0$.*

Dimostrazione. Poiché p_0 è un punto di biforcazione, esiste una successione di T -coppie non banali

$$\{(\lambda_n, x_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset (0, +\infty) \times C_T(M)$$

tali che $\lambda_n \rightarrow 0$ e $x_n \rightarrow \bar{p}_0$, con \bar{p}_0 la funzione costantemente uguale a p_0 . Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$0 = x_n(T) - x_n(0) = \lambda_n \int_0^T f(t, x_n(t)) dt.$$

Dunque $\int_0^T f(t, x_n(t)) dt = 0$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Passando al limite per $n \rightarrow +\infty$, si ha $\int_0^T f(t, p_0) dt = 0$. ■

Una condizione sufficiente per la biforcazione nel caso della (4.1.10) si ottiene facilmente dal Teorema 4.1.5 (si veda anche [25]).

TEOREMA 4.1.10. *Sia $f : \mathbb{R} \times M \rightarrow \mathbb{R}^k$ un campo vettoriale tangente di classe C^1 , T -periodico nella prima variabile. Condizione sufficiente affinché $p_0 \in M$, tale che $w_f(p_0) = 0$, sia un punto di biforcazione per la (4.1.10) è che $w'_f(p_0) : T_{p_0}M \rightarrow T_{p_0}M$ sia un isomorfismo.*

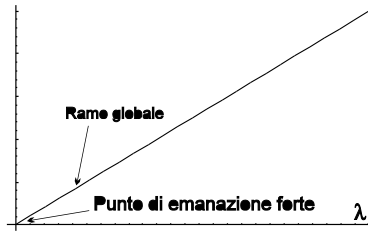


FIGURA 1. Punto di emanazione forte

4.2. Un aiuto per l'immaginazione

Le nozioni di punto di emanazione e di biforcazione, di ramo globale di continuazione e di biforcazione sono concetti astratti, il cui "ambiente naturale" è lo spazio (di dimensione infinita) $[0, \infty) \times C_T(M)$. Tuttavia, per rendersi conto del loro significato geometrico, può risultare utile una rappresentazione visiva. Un modo che già abbiamo utilizzato per illustrarli consiste nel rappresentare $[0, \infty) \times C_T(M)$ mediante un diagramma bidimensionale in cui si pone in ascissa $[0, \infty)$ ed in ordinata $C_T(M)$. Tale tipo di rappresentazione ha un valore soltanto intuitivo; nel seguito proporremo dei diagrammi dotati di un significato rigoroso.

Consideriamo l'equazione differenziale in \mathbb{R}^n

$$(4.2.1) \quad \dot{x} = g(x) + \lambda f(t, x), \quad \lambda \geq 0.$$

Se assumiamo l'unicità della soluzione del problema di Cauchy, lo studio dell'insieme delle T -coppie della (4.2.1) è equivalente a quello dell'insieme dei punti iniziali (di soluzioni T -periodiche). Definiamo la funzione $\mathfrak{T} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ponendo

$$\mathfrak{T}(\lambda, p) = x(T, p, \lambda) - x(0, p, \lambda),$$

dove $x(t, p, \lambda)$ è la soluzione, al tempo t , di (4.2.1) soddisfacente la condizione iniziale $x(0, p, \lambda) = p$. L'insieme dei punti iniziali della (4.2.1) è proprio il luogo degli zeri della funzione \mathfrak{T} che, in virtù del Lemma di Sard, è genericamente una varietà 1-dimensionale. Sfortunatamente quest'insieme si trova in uno spazio di dimensione troppo grande; per questo ci accontenteremo di disegnare (usando dei pacchetti applicativi come Mathematica¹ o Matlab²) dei diagrammi aventi in ascissa λ ed in ordinata $|p|$ con $\mathfrak{T}(\lambda, p) = 0$.

ESEMPIO 4.2.1. Consideriamo i seguenti campi vettoriali in \mathbb{R}^2

$$g(x_1, x_2) = (x_2, -2x_1); \quad f(t; x_1, x_2) = (0, \sin t).$$

Osserviamo che $(0, 0)$ è non T -risonante per la 4.2.1 (con questa scelta di g ed f), pertanto esso è un punto di emanazione forte (si veda figura 1).

ESEMPIO 4.2.2. La non T -risonanza è soltanto sufficiente affinché un punto sia di emanazione forte. Come abbiamo detto, $(0, 0)$ è un punto di emanazione forte per l'equazione (4.1.5), tuttavia esso è T -risonante. Il diagramma corrispondente a questa equazione è schematizzato in figura 2

ESEMPIO 4.2.3. Consideriamo l'equazione (4.1.4). Il punto $(0, 0)$ è di emanazione in senso stretto ma non forte. Si veda il diagramma 3

¹Wolfram Research

²The MathWorks Inc.

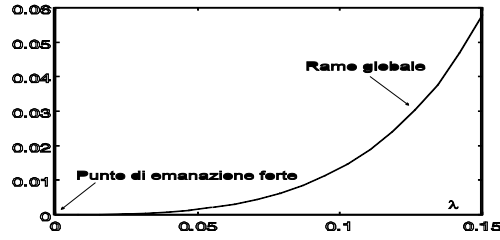
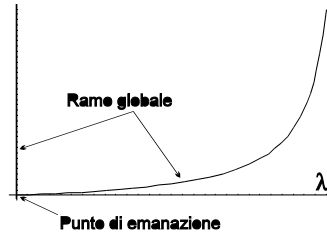
FIGURA 2. Punto di emanazione forte T -risonante

FIGURA 3. Punto di emanazione stretto ma non forte

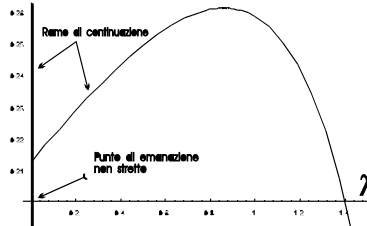


FIGURA 4. Punto di emanazione non stretta

La struttura dell'insieme delle T -coppie può essere anche molto più complessa. Mostriamo un esempio di equazione in \mathbb{R}^2 , tale che per valori arbitrariamente piccoli del parametro λ esistono T -coppie strettamente non banali e, tuttavia, l'unico punto di emanazione è non stretto.

ESEMPIO 4.2.4. Consideriamo l'equazione

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + \lambda(x_1 + \sin t) \end{cases}$$

Il punto $(0,0)$ è T -risonante. Risolvendo esplicitamente l'equazione, si verifica che $(0,0)$ è di emanazione non stretta, come illustrato dal diagramma 4 (per $\lambda < 1$).

Procedendo come sopra, possiamo ottenere dei diagrammi anche nel caso in cui l'insieme degli equilibri è una varietà.

ESEMPIO 4.2.5. Consideriamo i seguenti campi vettoriali in \mathbb{R}^2

$$g(x_1, x_2) = (0, x_1); \quad f(t; x_1, x_2) = (x_2, -x_1 + \sin t).$$

Evidentemente $g^{-1}(0) = \{(0, r) \in \mathbb{R}^2 : r \in \mathbb{R}\}$; dal Teorema 4.1.6 segue subito che $(0,0)$ è un punto di biforcazione.

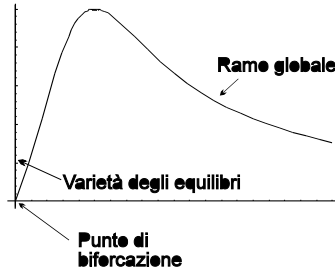


FIGURA 5. Punto di biforcazione

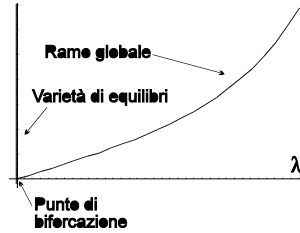


FIGURA 6. Punto di biforcazione nel caso degenere

Un esempio analogo può essere fatto nel caso degenere.

ESEMPIO 4.2.6. Poniamo, in \mathbb{R}^2

$$g(x_1, x_2) = (0, 0) ; f(t; x_1, x_2) = (x_2, -x_1 + \sin t).$$

Dal Teorema 4.1.10 segue che $(0, 0)$ è un punto di biforcazione.

4.3. Applicazioni

I risultati provati sopra si prestano facilmente ad essere utilizzati per provare risultati di esistenza e di molteplicità per equazioni del tipo (4.1.1) e (4.1.10).

4.3.1. Risultati di molteplicità. Il seguente lemma, di natura puramente topologica, risulterà essenziale per ottenere i nostri risultati di molteplicità. Nel seguito, dato uno spazio topologico S e due suoi sottoinsiemi A e B , con $A \subset B$, denoteremo con \overline{A}^B la chiusura di A in B e semplicemente con \overline{A} la chiusura in S . Dato un insieme Z , con il simbolo $\#Z$ intendiamo la cardinalità di Z . Inoltre, se $\mathcal{G} \subset [0, \infty) \times S$ e $r \in [0, \infty)$, poniamo

$$\mathcal{G}_r = \{s \in S : (r, s) \in \mathcal{G}\}.$$

LEMMA 4.3.1. Sia Y uno spazio metrico e sia Γ un connesso localmente compatto di $[0, \infty) \times Y$. Se

$$\Gamma_0 = \{y \in Y : (0, y) \in \Gamma\}$$

è diverso da Γ e contiene almeno $n \geq 1$ componenti connesse di cui almeno $n - 1$ compatte e aperte in Γ_0 , allora esiste $\lambda_* > 0$ per il quale $\#\Gamma_\lambda \geq n$ per ogni $\lambda \in [0, \lambda_*]$. In particolare, esistono $n - 1$ aperti a due a due disgiunti U_1, \dots, U_{n-1} , tali

che, per ogni $i \in \{1, \dots, n-1\}$, $U_i \cap \Gamma_0$ è connesso e compatto, e λ_* può essere scelto in modo tale che per ogni $\lambda \in [0, \lambda_*]$ si abbia

$$\Gamma \cap (\{\lambda\} \times U_i) \neq \emptyset \quad e \quad \Gamma_\lambda \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} U_i \neq \emptyset.$$

Dimostrazione. Se $n = 1$, la proiezione $\pi_1(\Gamma)$ sul primo fattore di $[0, \infty) \times Y$ del connesso Γ è un intervallo (contenente 0) che non si riduce al solo $\{0\}$, essendo $\Gamma \not\subset \{0\} \times Y$. Dunque $\#\Gamma_\lambda \geq 1$ per ogni $\lambda \in [0, \lambda_*]$, con $\lambda_* \in \pi_1(\Gamma)$.

Sia $n \geq 2$ e siano A_1, \dots, A_{n-1} , $n-1$ componenti connesse compatte aperte di Γ_0 . Mostriamo che, per ogni $i \in \{1, \dots, n-1\}$ fissato, è possibile scegliere un intorno aperto W_i di A_i in Y ed un numero $s_i > 0$ in modo tale che $\overline{\Gamma \cap ([0, s_i] \times W_i)}^\Gamma$ sia compatto. Per la locale compattezza di Γ , per ogni $x \in A_i$, esistono un intorno aperto V_x^i di x (in Y) ed un numero $s_x^i > 0$ tali che $\overline{\Gamma \cap ([0, s_x^i] \times V_x^i)}^\Gamma$ è compatto. Poiché A_i è compatto, esistono $k(i)$ punti $x_1^i, \dots, x_{k(i)}^i \in A_i$ tali che, posto $W_i = \bigcup_{j=1}^{k(i)} V_{x_j^i}$, si ha $A_i \subset W_i$. Poniamo $s_i = \min\{s_{x_1^i}, \dots, s_{x_{k(i)}^i}\}$; per $j \in \{1, \dots, k(i)\}$ l'insieme

$$\overline{\Gamma \cap ([0, s_i] \times V_{x_j^i}^i)}^\Gamma$$

è compatto, infatti

$$\overline{\Gamma \cap ([0, s_i] \times V_{x_j^i}^i)}^\Gamma \subset \overline{\Gamma \cap ([0, s_{x_j^i}^i] \times V_{x_j^i}^i)}^\Gamma.$$

La compattezza di $\overline{\Gamma \cap ([0, s_i] \times W_i)}^\Gamma$ segue dal fatto che

$$\overline{\Gamma \cap ([0, s_i] \times W_i)}^\Gamma = \bigcup_{j=1}^{k(i)} \overline{\Gamma \cap ([0, s_i] \times V_{x_j^i}^i)}^\Gamma.$$

Per ogni $i \in \{1, \dots, n-1\}$, scegliamo un numero $0 < \sigma_i < s_i$ ed un aperto U_i tale che $A_i \subset U_i \subset \overline{U_i} \subset W_i$, in tale modo il chiuso (di Γ) $\Gamma \cap ([0, \sigma_i] \times \overline{U_i})$ è contenuto in $\overline{\Gamma \cap ([0, s_i] \times W_i)}^\Gamma$ e pertanto è compatto. Eventualmente restringendo gli U_i , possiamo supporre $\Gamma_0 \cap \overline{U_i} = A_i$ e $\overline{U_i} \cap \overline{U_j} = \emptyset$, per $i, j \in \{1, \dots, n-1\}$ e $i \neq j$.

Proviamo che per ogni $i \in \{1, \dots, n-1\}$ esiste δ_i , $0 < \delta_i < \sigma_i$, tale che

$$([0, \delta_i] \times \text{Fr}(U_i)) \cap \Gamma = \emptyset.$$

Supponiamo per assurdo che per qualche i esista una successione

$$\{(\delta_i^m, y_i^m)\}_{m \in \mathbb{N}}$$

tale che $\delta_i^m \rightarrow 0$ per $m \rightarrow \infty$, e

$$(\delta_i^m, y_i^m) \in ([0, \sigma_i] \times \text{Fr}(U_i)) \cap \Gamma.$$

Per la compattezza possiamo supporre che $(\delta_i^m, y_i^m) \rightarrow (0, y_i^0)$, allora

$$(0, y_i^0) \in \Gamma \cap (\{0\} \times \text{Fr}(U_i));$$

che è una contraddizione.

Poniamo $\lambda_* = \min\{\delta_1, \dots, \delta_{n-1}\}$ e $A_0 = \Gamma_0 \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$. L'aperto

$$V = Y \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} \overline{U_i}$$

è un intorno di A_0 , inoltre, poiché $\text{Fr}_Y(V) = \bigcup_{i=1}^{n-1} \text{Fr}(U_i)$, si ha

$$([0, \lambda_*] \times \text{Fr}(V)) \cap \Gamma = \bigcup_{i=1}^{n-1} \{([0, \lambda_*] \times \text{Fr}(U_i)) \cap \Gamma\} = \emptyset.$$

Da quanto detto, e dalla connessione di Γ , segue che, per ogni $\lambda \in [0, \lambda_*]$, $\#\Gamma_\lambda \geq n - 1$.

La tesi segue ancora dalla connessione di Γ . Supponiamo per assurdo che esista $\bar{\lambda} \in [0, \lambda_*]$ tale che $\#\Gamma_{\bar{\lambda}} = n - 1$. Definiamo

$$\begin{aligned} \Gamma^1 &= \left\{ \bigcup_{i=1}^{n-1} ([0, \bar{\lambda}] \times \bar{U}_i) \cup ([\bar{\lambda}, \infty) \times Y) \right\} \cap \Gamma, \\ \Gamma^2 &= \left\{ [0, \bar{\lambda}] \times \left(Y \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} U_i \right) \right\} \cap \Gamma. \end{aligned}$$

Ovviamente Γ^1 e Γ^2 sono chiusi (in Γ) e $\Gamma^1 \cup \Gamma^2 = \Gamma$. Per la scelta di $\bar{\lambda}$ e degli U_i , $\Gamma^1 \cap \Gamma^2 = \emptyset$. Ciò contraddice la connessione di Γ , dunque $\#\Gamma_{\bar{\lambda}} \geq n$. ■

Ovviamente, nel caso $n \geq 2$, l'ipotesi $\Gamma_0 \neq \Gamma$ del Lemma 4.3.1 è ridondante. Inoltre, procedendo come nella prima parte della sua dimostrazione, si prova il seguente fatto.

OSSERVAZIONE 4.3.2. *Sia Y uno spazio metrico, X un sottospazio topologico localmente compatto di $[0, \infty) \times Y$ e K un compatto aperto di X_0 . Allora esiste un intorno aperto W di K in Y tale che per ogni aperto U , con la proprietà che $K \subset U \subset \bar{U} \subset W$, esiste un numero $\delta_U > 0$ tale che $X \cap ([0, \delta_U] \times U)$ è compatto e $X \cap ([0, \delta_U] \times \text{Fr}(U)) = \emptyset$.*

Gli esempi seguenti mostrano che, nel Lemma 4.3.1, l'ipotesi che almeno $n - 1$ delle componenti connesse di Γ_0 siano compatte non può essere omessa.

ESEMPIO 4.3.3. *Sia $Y = \mathbb{R}$, e sia Γ la chiusura in $[0, \infty) \times Y$ del grafico di $(0, 1] \ni t \mapsto \sin(1/t)$ privato del punto $(0, 0)$. Si osserva che Γ è connesso e localmente compatto, che Γ_0 ha due componenti connesse aperte (non compatte) e che, infine, $\#\Gamma_\lambda = 1$ per ogni $\lambda \in (0, 1]$.*

Nell'esempio precedente Γ_0 non è chiuso. Tuttavia, anche quando Γ è chiuso, l'ipotesi di compattezza di $n - 1$ componenti connesse di Γ_0 non può essere rimossa, come mostrato dal seguente

ESEMPIO 4.3.4. *Poniamo $Y = \mathbb{R}^2$, sia Γ la chiusura in $[0, \infty) \times Y$ della curva*

$$(0, 1] \ni t \mapsto \left(t; \cos \frac{1}{t}, \frac{1}{t} \sin \frac{1}{t} \right).$$

L'insieme Γ è connesso e localmente compatto, inoltre

$$\Gamma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \pm 1, y \in \mathbb{R}\},$$

mentre, per ogni $\lambda \in (0, 1]$, si ha $\#\Gamma_\lambda = 1$.

Un primo risultato di molteplicità è il seguente.

TEOREMA 4.3.5. *Siano $g : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ ed $f : \mathbb{R} \times M \rightarrow \mathbb{R}^k$ campi vettoriali tangenti ad una varietà completa senza bordo $M \subset \mathbb{R}^k$. Sia Z un compatto relativamente aperto di $g^{-1}(0)$. Allora, se $i(g, Z) \neq 0$, esiste un connesso Γ dell'insieme*

delle T -coppie non banali per la (4.1.1) la cui chiusura in $[0, \infty) \times C_T(M)$ incontra Z e vale una delle affermazioni seguenti:

- (1) la chiusura di Γ in $[0, \infty) \times C_T(M)$ interseca $g^{-1}(0) \setminus Z$;
- (2) l'insieme Γ è illimitato.

In particolare, se $Z = g^{-1}(0)$, allora può valere solamente la (2). Inoltre, se vale la (1), e se non esiste un connesso di soluzioni T -periodiche dell'equazione non perturbata $\dot{x} = g(x)$ che congiunge Z con $g^{-1}(0) \setminus Z$, allora esiste $\lambda_f > 0$ tale che, per $0 \leq \lambda \leq \lambda_f$, la (4.1.1) ha almeno due soluzioni T -periodiche con immagine distinta.

Dimostrazione. Poniamo

$$\Omega = [0, \infty) \times C_T(M) \setminus [g^{-1}(0) \setminus Z].$$

Ovviamente $Z \subset \Omega$ e, per definizione di indice di Z , $\deg(g, \Omega \cap M) \neq 0$. Per il Teorema 4.1.2 esiste un insieme connesso Γ di T -coppie non banali la cui chiusura $\bar{\Gamma}$ in $[0, \infty) \times C_T(M)$ incontra Z e non è contenuta in nessun compatto di Ω . Dal momento che M è chiusa in \mathbb{R}^k , per il Lemma 3.1.3, Γ non risulta contenuto in nessun sottoinsieme limitato e completo di Ω . Quindi, se Γ è limitato, il chiuso $\bar{\Gamma}$, che è chiaramente completo, non può essere contenuto in Ω (altrimenti Γ sarebbe relativamente compatto in Ω). Pertanto $\bar{\Gamma}$ deve incontrare $g^{-1}(0) \setminus Z$.

Osserviamo adesso che la seconda parte della tesi segue dal Lemma 4.3.1, infatti il connesso $\bar{\Gamma}$ incontra Z e $g^{-1}(0) \setminus Z$ ed è localmente compatto (si veda l'osservazione che segue il Lemma 3.1.3). ■

Il seguente esempio in \mathbb{R}^3 mostra che l'ipotesi che Z e $g^{-1}(0) \setminus Z$ non siano congiunti da un connesso di soluzioni T -periodiche di $\dot{x} = g(x)$ non può essere rimossa nella seconda parte del Teorema 4.3.5. Consideriamo il campo vettoriale

$$g(x, y, z) = (y, -x, (1 - x^2 - y^2)(z^2 - z)),$$

I punti $z_1 = (0, 0, 0)$ e $z_2 = (0, 0, 1)$ sono zeri isolati di g entrambi con indice non nullo. Se prendiamo

$$f(t; x, y, z) = (0, \sin t, 0),$$

non ci sono soluzioni 2π -periodiche di (4.1.1) per $\lambda > 0$. Incidentalmente, osserviamo che z_1 e z_2 sono collegate dall'insieme connesso di punti iniziali per la (4.1.1) dato da

$$\{(x_0, y_0, z_0) : x_0^2 + y_0^2 = 1 \vee z_0 = 0 \vee z_0 = 1\}.$$

Un altro esempio, forse più significativo, può essere costruito come segue:

Sul piano $M = \{(q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3 : q_3 = 1\} \cong \mathbb{R}^2$ consideriamo i campi vettoriali (tangenti) $g(q) = (q_2, -q_1, 0)$ e $f(t, q) = (0, \sin t, 0)$. Usando un procedimento classico dovuto a Poincaré, associamo ad essi i campi vettoriali tangenti sulla sfera unitaria $\tilde{g} : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ed $\tilde{f} : \mathbb{R} \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ come segue. Siano $S_+^2 = \{(q_1, q_2, q_3) \in S^2 : q_3 > 0\}$ ed $S_-^2 = \{(q_1, q_2, q_3) \in S^2 : q_3 < 0\}$ le semisfere "superiore" ed "inferiore" di S^2 . Definiamo $h_+ : S_+^2 \rightarrow M$ come il diffeomorfismo che associa ad ogni $q \in S_+^2$ l'intersezione di M con la retta per l'origine e q . l'applicazione $h_- : S_-^2 \rightarrow M$ è definita analogamente. Definiamo \tilde{g} ed \tilde{f} su S_+^2 (S_-^2) come i campi

vettoriali tangenti che corrispondono a g ed f sotto h_+ (h_-). Un calcolo diretto mostra che

$$\begin{aligned}\tilde{g}(q) &= (q_2, -q_1, 0), \\ \tilde{f}(t, q) &= q_3 \sin t (-q_1 q_2, 1 - q_2^2, -q_2 q_3).\end{aligned}$$

Dunque \tilde{g} ed \tilde{f} possono essere estesi in modo liscio a tutta la sfera. Ovviamente \tilde{g} ha soltanto due zeri: i poli nord e sud, entrambi con indice uno. I fatti seguenti possono essere facilmente verificati.

(1) Se $\lambda > 0$, ogni soluzione di

$$(4.3.1) \quad \dot{z} = \tilde{g}(z) + \lambda \tilde{f}(t, z)$$

che parte da S_+^2 oppure da S_-^2 corrisponde ad una soluzione di $\dot{x} = g(x) + \lambda f(t, x)$ su M . Dunque, non può essere periodica.

(2) Ogni soluzione di (4.3.1) che parte da un punto dell'equatore è 2π -periodica.

(3) L'immagine di ogni soluzione sull'equatore è l'equatore stesso.

Dunque la (4.3.1) ammette "essenzialmente" soltanto una soluzione 2π -periodica per ogni $\lambda > 0$.

Il Teorema 4.3.5 fornisce informazioni sull'insieme delle T -coppie della (4.1.1). Il seguente risultato è una sua conseguenza immediata.

COROLLARIO 4.3.6. *Siano g , f ed M come nel Teorema 4.3.5, e sia $z \in g^{-1}(0)$ non T -risonante. Se, per piccoli valori di $\lambda > 0$, esiste un'unica soluzione T -periodica dell'equazione (4.1.1), allora la componente connessa Γ dell'insieme delle T -coppie di (4.1.1) che contiene z è illimitata.*

Il risultato di molteplicità contenuto nel Teorema 4.3.5 richiede una conoscenza dettagliata dell'insieme Γ che potrebbe essere difficile da ottenere nella pratica. Allo scopo di ottenere risultati più maneggevoli, è conveniente considerare una situazione meno generale.

TEOREMA 4.3.7. *Sia $g : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ un campo vettoriale tangente su una varietà completa e senza bordo $M \subset \mathbb{R}^k$ con $g^{-1}(0)$ compatto. Supponiamo che z sia un punto di emanazione forte per (4.1.1), con $i(g, z) \neq 0$. Se $i(g, z) \neq \deg(g, M)$, e se non esistono connessi illimitati di soluzioni T -periodiche per l'equazione non perturbata $\dot{x} = g(x)$ che incontrano $g^{-1}(0)$, allora, data f come in (4.1.1), esiste $\lambda_f > 0$ tale che (4.1.1) ha (almeno) due soluzioni T -periodiche con immagine distinta per $\lambda \in [0, \lambda_f]$.*

Dimostrazione. L'insieme $Z = g^{-1}(0) \setminus \{z\}$ è compatto con indice

$$i(g, Z) = \deg(g, M) - i(g, z) \neq 0.$$

Definiamo

$$\Omega_0 = [0, \infty) \times C_T(M) \setminus Z, \quad \Omega_1 = [0, \infty) \times C_T(M) \setminus \{z\}.$$

Per il Teorema 4.1.2, esiste Γ^0 (risp. Γ^1), insieme connesso di T -coppie non banali per la (4.1.1), che non è contenuto in nessun sottoinsieme limitato e completo di Ω_0 (Ω_1) la cui chiusura incontra z (Z). Poiché non esistono connessi illimitati di soluzioni T -periodiche di $\dot{x} = g(x)$, per il Lemma 3.1.3, né Γ^0 né Γ^1 possono essere contenuti nello spazio metrico completo $\{0\} \times C_T(M)$. Denotiamo con $B(z, \varepsilon)$ la palla aperta di raggio ε in $C_T(M)$ centrata in z ed indichiamo con $S(z, \varepsilon)$ la

sua frontiera. Sia X l'insieme delle T -coppie di (4.1.1), poiché z è un punto di emanazione forte, z è una componente connessa compatta aperta di X_0 , dell'insieme delle T -coppie. Per l'Osservazione 4.3.2, dato $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo, esiste $\lambda_\varepsilon > 0$ tale che $[0, \lambda_\varepsilon] \times \overline{S(z, \varepsilon)}$ non contiene T -coppie. Per il Lemma 3.1.3, $\overline{\Gamma^0}$ non è contenuto in $[0, \lambda_\varepsilon] \times \overline{B(z, \varepsilon)}$. Dunque, essendo $\overline{\Gamma^0}$ connesso, $\overline{\Gamma^0} \cap (\{\lambda\} \times B(z, \varepsilon)) \neq \emptyset$ per ogni $\lambda \in [0, \lambda_\varepsilon]$. Denotiamo con G^1 la componente connessa dell'insieme delle T -coppie contenente $\overline{\Gamma^1}$. Ci sono due sole possibilità: o $\overline{\Gamma^0} \cap G^1 = \emptyset$ oppure $\overline{\Gamma^0} \subset G^1$. Vediamo che in entrambi i casi, per piccoli valori di λ , ci sono almeno due soluzioni T -periodiche di (4.1.1) con immagine distinta.

Supponiamo dapprima $\overline{\Gamma^0} \cap G^1 = \emptyset$. In questo caso G^1 è contenuta in Ω_1 ed è illimitata. Infatti, se fosse limitata, allora, per il Lemma 3.1.3, sarebbe un sottoinsieme compatto di Ω_1 . Poiché G^1 è illimitata, essa non può essere contenuta in $\{0\} \times C_T(M)$ per ipotesi. Dunque la proiezione $\pi_1(G^1)$ su $[0, \infty)$ di G^1 è un intervallo non banale, cioè, esiste $\delta_1 > 0$ tale che $[0, \delta_1] \subset \pi_1(G^1)$. Scegliamo $\lambda_f = \min\{\delta_1, \lambda_\varepsilon\}$; la connessione di G^1 implica che per ogni $\lambda \in [0, \lambda_f]$ esiste almeno una T -coppia in $\{\lambda\} \times \left(C_T(M) \setminus \overline{B(z, \varepsilon)}\right)$, altrimenti è facile vedere che G^1 sarebbe sconnesso da un chiuso della forma $\{\lambda\} \times (C_T(M) \setminus B(z, \varepsilon))$. Quindi, per ogni $\lambda \in [0, \lambda_f]$ esiste una soluzione in $\overline{B(z, \varepsilon)}$ ed una in $C_T(M) \setminus B(z, \varepsilon)$.

Consideriamo adesso il caso in cui $\overline{\Gamma^0} \subset G^1$. Si ha evidentemente $z \in G^1$ e, per il Lemma 4.3.1, esiste un intorno U di z in $C_T(M)$ ed un numero $\lambda_f > 0$ tale che

$$G^1 \cap (\{\lambda\} \times U) \neq \emptyset \text{ e } G^1_\lambda \setminus U \neq \emptyset,$$

per ogni $\lambda \in [0, \lambda_f]$. Da cui segue subito la tesi. \blacksquare

Notiamo che, se M è compatta e senza bordo e se z è uno zero isolato di g tale che $i(g, z) \neq \chi(M)$, allora, per il Teorema di Poincaré-Hopf, $\deg(g, M) = \chi(M) \neq i(g, z)$. Inoltre, se il punto z è di emanazione forte per (4.1.1), tutte le condizioni del Teorema 4.3.7 sono soddisfatte e, per piccoli valori di λ , la (4.1.1) ha almeno due soluzioni T -periodiche. Abbiamo pertanto il

COROLLARIO 4.3.8. *Sia $g : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ un campo vettoriale tangente ad una varietà differenziabile compatta e senza bordo $M \subset \mathbb{R}^k$. Supponiamo che esista uno zero isolato z di g , con indice $i(g, z) \neq 0$, e che z sia un punto di emanazione forte per (4.1.1). Se $i(g, z) \neq \chi(M)$ allora, data f come in (4.1.1), esiste $\lambda_f > 0$ tale che (4.1.1) ha (almeno) due soluzioni T -periodiche con immagine distinta per $\lambda \in [0, \lambda_f]$.*

Nel caso che si abbia più di uno zero isolato con indice non nullo, ragionando come nel Teorema 4.3.7, anche se al prezzo di una maggiore complicazione formale, si ottiene il

TEOREMA 4.3.9. *Sia $g : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ un campo vettoriale tangente su una varietà completa e senza bordo $M \subset \mathbb{R}^k$ con $g^{-1}(0)$ compatto. Supponiamo che z_1, \dots, z_{n-1} siano zeri isolati di g e punti di emanazione forte per (4.1.1), con $i(g, z_i) \neq 0$, per $i = 1, \dots, n-1$. Se*

$$\deg(g, M) \neq \sum_{i=1}^{n-1} i(g, z_i),$$

e, se non esistono connessi illimitati di soluzioni T -periodiche per l'equazione non perturbata $\dot{x} = g(x)$ che incontrano $g^{-1}(0)$, allora, dato f come in (4.1.1), esiste

$\lambda_f > 0$ tale che (4.1.1) ha (almeno) n soluzioni T -periodiche con immagini a due a due distinte per $\lambda \in [0, \lambda_f]$.

Notiamo che, se ognuno degli z_1, \dots, z_{n-1} è non T -risonante, allora, per il Teorema 4.1.3, z_1, \dots, z_{n-1} sono punti di emanazione forte. Inoltre, se M è una varietà compatta e senza bordo, non possono esistere connessi illimitati di soluzioni T -periodiche per l'equazione non perturbata $\dot{x} = g(x)$. Se

$$\sum_{i=1}^{n-1} i(g, z_i) \neq \chi(M),$$

per il Teorema di Poincaré-Hopf,

$$\deg(g, M) = \chi(M) \neq \sum_{i=1}^{n-1} i(g, z_i).$$

Dunque, in queste ipotesi, si ha il

COROLLARIO 4.3.10. *Sia $g : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ un campo vettoriale continuo tangente ad una varietà differenziabile compatta e senza bordo $M \subset \mathbb{R}^k$. Assumiamo che g abbia $n - 1$ zeri z_1, \dots, z_{n-1} , non T -risonanti per (4.1.1). Allora, se*

$$\sum_{i=1}^{n-1} i(g, z_i) \neq \chi(M),$$

data f come in (4.1.1), esiste $\lambda_f > 0$ tale che (4.1.1) ha (almeno) n soluzioni T -periodiche con immagini a due a due distinte per $\lambda \in [0, \lambda_f]$.

4.3.2. Risultati di esistenza per piccole perturbazioni. Le tecniche espresse nella prima parte del presente capitolo possono essere utilizzate anche per provare semplici risultati di esistenza di soluzioni armoniche per piccole perturbazioni T -periodiche di equazioni autonome.

TEOREMA 4.3.11. *Sia $g : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ un campo vettoriale tangente ad una varietà senza bordo $M \subset \mathbb{R}^k$. Supponiamo che esista un aperto U di M tale che $\deg(g, U)$ sia ben definito e non nullo e che l'insieme*

$$K_U = \{x \in C_T(M) : \dot{x}(t) = g(x(t)) \text{ e } x([0, T]) \subset U\}$$

sia compatto. Allora, dato un campo vettoriale tangente continuo e T -periodico $f : \mathbb{R} \times M \rightarrow \mathbb{R}^k$, esiste $\lambda_f > 0$ tale che (4.1.1) ha (almeno) una soluzione T -periodica per $\lambda \in [0, \lambda_f]$.

Dimostrazione. Poniamo $\Omega = [0, \infty) \times C_T(U)$. Per il Teorema 4.1.2 esiste un ramo globale (relativamente ad Ω) Γ di T -coppie non banali. È sufficiente provare che la chiusura $\bar{\Gamma}$ di Γ in $[0, \infty) \times C_T(M)$ non è contenuta in $\{0\} \times C_T(M)$. Supponiamo che lo sia; in tale caso $\bar{\Gamma}$ è contenuto in $\{0\} \times K_U$ e dunque è compatto. Questo non è possibile perché Γ è un ramo globale. ■

COROLLARIO 4.3.12. *Sia $g : Y \rightarrow \mathbb{R}^k$ un campo vettoriale tangente ad una varietà con bordo $Y \subset \mathbb{R}^k$. Supponiamo che V sia un aperto relativamente compatto di Y tale che non esistono orbite T -periodiche di $\dot{x} = g(x)$ che sono contenute nella chiusura \bar{V} di V ed incontrano $\text{Fr}(V) \cup (V \cap \partial Y)$. Allora, se $\deg(g, V \setminus \partial Y) \neq 0$, data f come nel Teorema 4.3.11, esiste $\lambda_f > 0$ tale che (4.1.1) ha (almeno) una soluzione T -periodica per $\lambda \in [0, \lambda_f]$.*

Dimostrazione. Poniamo $M = Y \setminus \partial Y$ e $U = V \setminus \partial Y$. Il fatto che non esistano orbite T -periodiche di $\dot{x} = g(x)$ contenute in \bar{V} che incontrano $\text{Fr}(V) \cup (V \cap \partial Y)$ implica che $K_{\bar{V}} = K_U$. D'altra parte, essendo \bar{V} un compatto, anche $K_{\bar{V}}$ è compatto. La conclusione segue dall'ipotesi $\deg(g, U) \neq 0$. ■

Un aperto V , come nel corollario appena provato, è detto una *trappola* per le soluzioni T -periodiche dell'equazione non perturbata. Una conseguenza di questo teorema è il seguente

COROLLARIO 4.3.13. *Sia $g : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ un campo vettoriale tangente ad una varietà differenziabile senza bordo $M \subset \mathbb{R}^k$. Sia U un aperto relativamente compatto di M . Supponiamo che, per ogni $p \in \text{Fr}U$,*

$$(4.3.2) \quad \{g(p), -g(p)\} \not\subset C_p(\bar{U})$$

dove $C_p(\bar{U})$ denota il cono tangente in p alla chiusura \bar{U} di U . Allora, se $\deg(g, U) \neq 0$, data f come nel Teorema 4.3.11, l'equazione (4.1.1) ha (almeno) una soluzione T -periodica per λ sufficientemente piccolo.

Dimostrazione. Sia x una qualunque soluzione T -periodica di $\dot{x} = g(x)$ con immagine contenuta in \bar{U} . Ovviamente si ha

$$C_p(x([0, T])) \subset C_p(\bar{U})$$

per ogni $p \in x([0, T])$; quindi, se $x([0, T])$ incontrasse $\text{Fr}U$ in un punto p avremmo

$$\pm g(p) \in C_p(x([0, T])) \subset C_p(\bar{U});$$

contro la condizione (4.3.2). La tesi segue dal Corollario precedente. ■

COROLLARIO 4.3.14. *Sia $g : Y \rightarrow \mathbb{R}^k$ un campo vettoriale tangente ad una varietà differenziabile compatta con bordo $Y \subset \mathbb{R}^k$ con caratteristica di Eulero-Poincaré $\chi(Y) \neq 0$. Supponiamo che g punti strettamente all'esterno (o all'interno) lungo ∂Y . Allora, data f come nel Teorema 4.3.11, l'equazione (4.1.1) ha (almeno) una soluzione T -periodica per λ sufficientemente piccolo.*

Un'applicazione leggermente più elaborata del Teorema 4.3.11 ai sistemi piani è la seguente.

COROLLARIO 4.3.15. *Sia $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g = (g_1, g_2)$, un'applicazione di classe C^1 . Supponiamo che $\dot{x} = g(x)$ ammetta una soluzione non banale con periodo minimo $T_0 > 0$. Allora, date $f_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2\}$, funzioni continue T -periodiche nella prima variabile, con $T \neq kT_0$, $k \in \mathbb{N}$, il sistema piano*

$$(4.3.3) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = g_1(x_1, x_2) + \lambda f_1(t; x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = g_2(x_1, x_2) + \lambda f_2(t; x_1, x_2) \end{cases}$$

ha (almeno) una soluzione T -periodica per λ sufficientemente piccolo.³

Dimostrazione. Sia $\xi : [0, T_0] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una soluzione T_0 -periodica di $\dot{x} = g(x)$. Siccome l'immagine di ξ è una curva di Jordan, essa è la frontiera comune a due aperti disgiunti, di cui uno limitato e omeomorfo alla palla unitaria $B(0, 1)$ (vedi per esempio [15]). Denotiamo con U quest'ultima parte del piano. Osserviamo che g è necessariamente tangente alla frontiera di U , dunque, esso è omotopo ad

³È sufficiente, invece di supporre g di classe C^1 , assumere l'unicità della soluzione del problema di Cauchy

un campo che punta strettamente verso l'esterno di U . Allora, per la proprietà di omotopia e per il Teorema di Poincaré-Hopf, $\deg(g, U) = 1$.

Per vedere che U è una trappola per le soluzioni T -periodiche di $\dot{x} = g(x)$, basta osservare che per l'unicità delle soluzioni del problema di Cauchy per $\lambda = 0$, non ci possono essere soluzioni T -periodiche che incontrano ∂U . La tesi segue dal Corollario 4.3.14. ■

Molteplicità di oscillazioni forzate

In questo capitolo raccogliamo il frutto del lavoro svolto nelle pagine precedenti. Esso è dedicato alla ricerca di una stima a priori del numero di possibili oscillazioni forzate su una varietà completa N . Più precisamente studieremo l'insieme delle soluzioni T -periodiche di equazioni della forma

$$(5.0.4) \quad \ddot{x}_\pi = h(x, \dot{x}) + \lambda f(t, x, \dot{x}) , \quad \lambda \geq 0,$$

dove, come nel paragrafo 3 del capitolo 1, $h : TN \rightarrow \mathbb{R}^s$ e $f : \mathbb{R} \times TN \rightarrow \mathbb{R}^s$ sono applicazioni continue tali che $h(x, y)$ e $f(t; x, y)$ appartengono a $T_x N$ per ogni $(t; x, y) \in \mathbb{R} \times TN$ ed f è T -periodica rispetto alla prima variabile. Diremo che $(\lambda, x) \in [0, \infty) \times C_T^1(M)$ è una T -coppia per l'equazione del secondo ordine (5.0.4), se x è una soluzione di (5.0.4) corrispondente a λ . In particolare diremo che (λ, x) è *banale* se $\lambda = 0$ e x è costante.

L'equazione (5.0.4) può essere scritta equivalentemente su $M = TN$ nella forma

$$(5.0.5) \quad \dot{\xi} = \hat{h}(\xi) + \lambda \bar{f}(t, \xi),$$

Dove si è posto $\xi = (x, y)$,

$$\begin{aligned} \hat{h}(x, y) &= (y, r(x, y) + g(x, y)) , \\ \bar{f}(t; x, y) &= (0, f(t; x, y)) , \end{aligned}$$

ed r è la reazione vincolare di N . Si verifica immediatamente che \hat{h} ed \bar{f} sono campi vettoriali tangenti su $M = TN \subset \mathbb{R}^{2s}$ (si veda il cap. 1); dunque la (5.0.5) è in realtà un'equazione del primo ordine su M . Denotiamo con $X' \subset [0, \infty) \times C_T(M)$ e con $X \subset [0, \infty) \times C_T^1(N)$ l'insieme di tutte le T -coppie di (5.0.5) ed (5.0.4), rispettivamente. Siano $X'_* \subset X'$ ed $X_* \subset X$ i sottoinsiemi che consistono di tutte quelle banali. Osserviamo che l'applicazione $(\lambda, x) \mapsto (\lambda, (x, \dot{x}))$ è un omeomorfismo di X su X' sotto il quale X_* corrisponde a X'_* ed insiemi limitati corrispondono ad insiemi limitati.

5.1. Risultati generali

Sia $N \subset \mathbb{R}^s$ una varietà completa e sia $h : TN \rightarrow \mathbb{R}^s$ un'applicazione continua tale che $h(x, y)$ appartenga a $T_x N$ per ogni $(x, y) \in TN$. Definiamo $h_0 : N \rightarrow \mathbb{R}^s$, ponendo $h_0(x) = h(x, 0)$. Osserviamo che h_0 è un campo vettoriale tangente ad N . In realtà, poiché la varietà N può essere identificata con la sezione nulla del fibrato TN , possiamo interpretare h_0 come la restrizione di h ad N e, dunque, scrivere $h_0 = h|_N$.

Conviene riformulare il concetto di punto T -risonante per la (5.0.4). Diremo che un punto $z \in h|_N^{-1}(0)$ è T -risonante per l'equazione del secondo ordine (5.0.4) se l'equazione (linearizzata) $\ddot{x} = h'(z, 0)x$ su $T_z N$ ammette soluzioni T -periodiche non banali. Evidentemente z è T -risonante se e soltanto se $(z, 0)$ lo è per la (5.0.5).

È quindi ovvio che z è non T -risonante se e solo se $\frac{2l\pi i}{T} \notin \sigma(\hat{h}'(z, 0))$ per ogni $l \in \mathbb{Z}$.

Poiché, come è noto

$$T_{(z,0)}TN = T_zN \times T_zN,$$

l'applicazione lineare $\hat{h}'(z, 0) : T_{(z,0)}TN \rightarrow T_{(z,0)}TN$ è rappresentata dalla matrice a blocchi

$$\begin{pmatrix} 0 & I \\ D_1h(z, 0) & D_2h(z, 0) \end{pmatrix},$$

dove I è l'identità di T_zN . Poiché il determinante di un endomorfismo di uno spazio vettoriale è indipendente dalla scelta di una base, fissando arbitrariamente una base di T_zN e usando le formule di Schur (si veda per es. [29]) si ha

$$\begin{aligned} \det(\hat{h}'(z, 0) - \mu \bar{I}) &= \det \begin{pmatrix} -\mu I & I \\ D_1h(z, 0) & D_2h(z, 0) - \mu I \end{pmatrix} \\ &= \det(-D_1h(z, 0) - \mu D_2h(z, 0) + \mu^2 I); \end{aligned}$$

dove \bar{I} è l'identità di $T_{(z,0)}TN$. Dunque $\frac{2l\pi i}{T} \in \sigma(\hat{h}'(z, 0))$, per qualche $l \in \mathbb{Z}$, se e soltanto se

$$(5.1.1) \quad \det \left(D_1h(z, 0) + \frac{2l\pi i}{T} D_2h(z, 0) + \left(\frac{2l\pi}{T} \right)^2 I \right) = 0.$$

Da questa formula, per $l = 0$, si ottiene subito che, se $z \in h|_N^{-1}(0)$ è non T -risonante, allora $\det h|'_N(z) = \det D_1h(z, 0) \neq 0$; e dunque $i(h|_N, z) \neq 0$. Finalmente, dal Corollario 2.2.3 segue che, se z è non T -risonante, allora $i(\hat{h}, (z, 0)) \neq 0$.

In alcuni casi particolari, dalla (5.1.1), si possono ricavare delle semplici condizioni affinché $z \in h|_N^{-1}(0)$ sia non T -risonante. Per esempio, se $D_2h(z, 0) = 0$, z è non T -risonante se e solo se

$$- \left(\frac{2l\pi}{T} \right)^2 \notin \sigma(h|'_N(z)).$$

Un altro caso interessante si ha per $h(q, v) = g(q) - \eta v$, dove $g : N \rightarrow \mathbb{R}^s$ è un campo vettoriale di classe C^1 tangente ad N ed $\eta \geq 0$ (fisicamente il termine $-\eta v$ rappresenta un attrito). Si ottiene subito che $z \in g^{-1}(0)$ è non T -risonante se e solo se

$$- \left(\frac{2l\pi}{T} \right)^2 + \eta \frac{2l\pi i}{T} \notin \sigma(g'(z)).$$

In particolare, se z è uno zero non degenero per $g = \text{grad}\gamma$, con $\gamma : M \rightarrow \mathbb{R}$ funzione di classe C^2 e $\eta \neq 0$, allora z è non T -risonante qualunque sia $T > 0$.¹ Se invece

¹Per mostrarlo, facciamo vedere che $g'(z) : T_zM \rightarrow T_zM$ coincide con l'hessiano di γ e quindi è autoaggiunto. Infatti, sia G una estensione C^2 di g su un intorno di z in \mathbb{R}^k ; si ha $D_vG(z) = g'(z)v$, per ogni $v \in T_zM$, dove D_vG denota la derivata direzionale (in \mathbb{R}^k) di G nella direzione di v . Poiché $g(z) = 0$, $D_vG(z) \in T_zM$ (vedi e.g. [43]). Allora, dal momento che la derivata covariante $\nabla_v g$ non è altro che la proiezione ortogonale di D_vG su T_zM (vedi e.g. [5]), si ha

$$\begin{aligned} g'(z)v &= D_vG(z) = \nabla_v g(z) \\ &= \nabla_v \text{grad}\gamma(z) = \text{Hess}\gamma(z)v, \end{aligned}$$

per ogni $v \in T_zM$, l'ultima uguaglianza essendo una delle possibili definizioni di hessiano (vedi e.g. [11]).

è $D_1h(z, 0) = 0$ allora la condizione di non risonanza diventa $\frac{2l\pi i}{T} \notin \sigma(D_2h(z, 0))$ per ogni $l \in \mathbb{Z}$.

Dai risultati di molteplicità per equazioni del primo ordine ottenuti nel capitolo precedente si ottiene il seguente

TEOREMA 5.1.1. *Siano h , f ed N come sopra e supponiamo che $h|_N^{-1}(0)$ sia compatto. Se $z \in h|_N^{-1}(0)$ è non T -risonante e tale che $i(h|_N, z) \neq \deg(h|_N, N)$, e se inoltre non esiste alcun connesso illimitato di soluzioni T -periodiche di $\ddot{x}_\pi = h(x, \dot{x})$ che incontra $h|_N^{-1}(0)$, allora esiste $\lambda_f > 0$ tale che (5.0.4) ha almeno due soluzioni T -periodiche, con immagine distinta, per $\lambda \in [0, \lambda_f]$.*

Dimostrazione. Per il Teorema 2.2.2, si ha

$$0 \neq \deg(-h|_N, N) = \deg(\hat{h}, TN).$$

Come osservato sopra, la non T -risonanza di $z \in h|_N^{-1}(0)$ assicura che

$$i(\hat{h}, (z, 0)) \neq 0$$

e che $(z, 0) \in \hat{h}^{-1}(0)$ è non T -risonante. La tesi segue ora applicando il Teorema 4.3.7 all'equazione (5.0.5). \blacksquare

Procedendo come nella dimostrazione appena conclusa, anche se con una maggiore complicazione formale, e applicando il Teorema 4.3.9, al posto del 4.3.7, si ottiene il seguente risultato più generale.

TEOREMA 5.1.2. *Siano h , f ed N come sopra e supponiamo che $h|_N^{-1}(0)$ sia compatto. Se z_1, \dots, z_k sono zeri non T -risonanti di $h|_N$ tali che*

$$\sum_{i=1}^k i(h|_N, z_i) \neq \deg(h|_N, N),$$

e se inoltre non esiste alcun connesso illimitato di soluzioni T -periodiche di $\ddot{x}_\pi = h(x, \dot{x})$ che incontra $h|_N^{-1}(0)$, allora esiste $\lambda_f > 0$ tale che (5.0.4) ha almeno $k + 1$ soluzioni T -periodiche, con immagini a due a due distinte, per $\lambda \in [0, \lambda_f]$.

Se N è una varietà compatta (senza bordo) allora, per il Teorema di Poincaré-Hopf,

$$\deg(h|_N, N) = \chi(N).$$

Si ha dunque il seguente

COROLLARIO 5.1.3. *Sia N una varietà compatta (senza bordo) e siano h ed f come nel teorema precedente. Se z_1, \dots, z_k sono zeri non T -risonanti di $h|_N$ tali che $\sum_{i=1}^k i(h|_N, z_i) \neq \chi(N)$ e se inoltre non esiste alcun connesso illimitato di soluzioni T -periodiche di $\ddot{x}_\pi = h(x, \dot{x})$ che incontra $h|_N^{-1}(0)$, allora esiste $\lambda_f > 0$ tale che (5.0.4) ha almeno $k + 1$ soluzioni T -periodiche, con immagini a due a due distinte, per $\lambda \in [0, \lambda_f]$.*

Dunque, tutti gli autovalori di $g'(z)$ sono reali ed essendo z non degenera, sono anche non nulli. Quindi, se $\eta \neq 0$,

$$-\left(\frac{2l\pi}{T}\right)^2 + \eta \frac{2l\pi i}{T} \notin \sigma(g'(z)) \subset \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

qualunque sia $l \in \mathbb{Z}$. Pertanto la condizione di non T -risonanza è sempre soddisfatta.

Osserviamo che nei teoremi 5.1.1, 5.1.2 e nel Corollario 5.1.3 l'ipotesi più difficile da verificare è la non esistenza di connessi illimitati di soluzioni T -periodiche di $\ddot{x}_\pi = h(x, \dot{x})$ che incontrano $h|_N^{-1}(0)$.

Quando h ha la seguente forma particolare:

$$(5.1.2) \quad h(x, \dot{x}) = g(x, \dot{x}) - \nu(|\dot{x}|)\dot{x},$$

dove $g : TN \rightarrow \mathbb{R}^s$ è un campo vettoriale tangente ad N limitato e $\nu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua non negativa, tale che

$$(5.1.3) \quad \liminf_{z \rightarrow +\infty} \nu(z) = \ell > 0,$$

allora l'insieme delle soluzioni T -periodiche di (5.0.4) è limitato a priori. Più in generale vale il seguente

LEMMA 5.1.4. *Supponiamo che g , h e ν siano come in (5.1.2) e che $f : \mathbb{R} \times TN \rightarrow \mathbb{R}^s$ sia un campo vettoriale continuo, limitato, T -periodico nella prima variabile e tale che $f(t; x, y) \in T_x N$ per ogni $(t; x, y) \in \mathbb{R} \times TN$. Allora, dato $\lambda_0 \in [0, +\infty)$, ogni insieme connesso di T -coppie in $[0, \lambda_0] \times C_T^1(N)$ dell'equazione del secondo ordine su N*

$$(5.1.4) \quad \ddot{x}_\pi = g(x, \dot{x}) - \nu(|\dot{x}|)\dot{x} + \lambda f(t, x, \dot{x}),$$

è limitato.

Dimostrazione. Definiamo $\kappa : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ponendo

$$\kappa(\lambda) = \sup_{(q, v) \in TS} |g(q, v)| + \lambda \sup_{(t; q, v) \in \mathbb{R} \times TS} |f(t; q, v)|.$$

Per la condizione (5.1.3) esiste $\zeta > 0$ tale che, se $|w| > \zeta$ allora $\nu(w) > \ell/2$. Supponiamo per assurdo che esista una soluzione T -periodica di $x : \mathbb{R} \rightarrow S$ (5.1.4), corrispondente ad un dato $\lambda \geq 0$, tale che

$$\|\dot{x}\|_0 > \max \left\{ \zeta, 2 \frac{\kappa(\lambda)}{\ell} \right\}.$$

Definiamo $\vartheta(t) = |\dot{x}(t)|^2$ e sia $\tau \in \mathbb{R}$ tale che $\vartheta(\tau) = \max\{\vartheta(t) : t \in \mathbb{R}\}$. Poiché ϑ è differenziabile,

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{\vartheta}(\tau) = 2 \langle \dot{x}(\tau), \ddot{x}(\tau) \rangle \\ &= 2 \langle \dot{x}(\tau), g(x(\tau), \dot{x}(\tau)) + \lambda f(t, x(\tau), \dot{x}(\tau)) \rangle \\ &\quad - 2\nu(|\dot{x}(\tau)|) |\dot{x}(\tau)|^2 \\ &\leq 2 |\dot{x}(\tau)| \kappa(\lambda) - \ell |\dot{x}(\tau)|^2. \end{aligned}$$

Dunque

$$\|\dot{x}\|_0 \leq 2 \frac{\kappa(\lambda)}{\ell},$$

che è una contraddizione. Si è dunque provato che ogni soluzione T -periodica x di (5.1.4) soddisfa $\|\dot{x}\|_0 \leq \max\{\zeta, 2\kappa(\lambda)/\ell\}$. ■

TEOREMA 5.1.5. *Supponiamo che $g : TN \rightarrow \mathbb{R}^s$ ed $f : \mathbb{R} \times TN \rightarrow \mathbb{R}^s$ siano campi vettoriali continui e limitati tale che $g(x, y)$ ed $f(t; x, y)$ appartengano a $T_x N$ per ogni $(t; x, y) \in \mathbb{R} \times TN$, che f sia T -periodica nella prima variabile e che $g|_N^{-1}(0)$*

sia compatto. Sia inoltre $\nu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un'applicazione continua che soddisfa (5.1.3). Se z_1, \dots, z_k sono zeri non T -risonanti di $g|_N$ tali che

$$\sum_{i=1}^k i(g|_N, z_i) \neq \deg(g|_N, N),$$

allora esiste $\lambda_f > 0$ tale che l'equazione

$$\ddot{x}_\pi = g(x, \dot{x}) - \nu(|\dot{x}|)\dot{x} + \lambda f(t, x, \dot{x}),$$

ha almeno $k + 1$ soluzioni T -periodiche con immagini a due a due distinte per $\lambda \in [0, \lambda_f]$.

Dimostrazione. Sia $h : TN \rightarrow \mathbb{R}^s$ definito come in (5.1.2). Ovviamente $h|_N(z) = g(z, 0)$, dunque

$$\begin{aligned} \deg(h|_N, N) &= \deg(g|_N, N) \\ &\neq \sum_{i=1}^k i(g|_N, z_i) = \sum_{i=1}^k i(h|_N, z_i). \end{aligned}$$

La tesi segue dal Lemma 5.1.4 e dal Teorema 5.1.2. ■

Nel caso di una varietà compatta (senza bordo) e per campi vettoriali indipendenti dalla velocità, il teorema appena provato assume una forma particolarmente semplice.

COROLLARIO 5.1.6. *Supponiamo che $g : N \rightarrow \mathbb{R}^s$ ed $f : \mathbb{R} \times N \rightarrow \mathbb{R}^s$ siano campi vettoriali tangenti alla varietà compatta $N \subset \mathbb{R}^s$ con f T -periodica nella prima variabile. Sia inoltre $\nu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un'applicazione continua soddisfacente (5.1.3). Se z_1, \dots, z_k sono zeri non T -risonanti di g tali che*

$$\sum_{i=1}^k i(g, z_i) \neq \chi(N),$$

allora esiste $\lambda_f > 0$ tale che l'equazione

$$\ddot{x}_\pi = g(x) - \nu(|\dot{x}|)\dot{x} + \lambda f(t, x),$$

ha almeno $k + 1$ soluzioni T -periodiche con immagini a due a due distinte per $\lambda \in [0, \lambda_f]$.

Dimostrazione. Basta osservare che per il Teorema di Poincaré-Hopf,

$$\deg(g, N) = \chi(N).$$

■

5.2. Risultati di molteplicità sulle sfere

Analizziamo adesso il caso particolare in cui $N = S_\rho^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ è la sfera n -dimensionale di raggio ρ centrata nell'origine (dotata della struttura riemanniana indotta dall'inclusione in \mathbb{R}^{n+1}).

Data la particolare geometria di S_ρ^n , l'equazione (5.0.4) può essere scritta nella forma seguente

$$(5.2.1) \quad \ddot{x} = -\frac{|\dot{x}|^2}{\rho^2}x + h(x, \dot{x}) + \lambda f(t, x, \dot{x}),$$

dove $h : TS_\rho^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ed $f : \mathbb{R} \times TS_\rho^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ sono campi vettoriali tangenti ad S_ρ^n .

Se h e f sono limitati, allora è possibile provare la non esistenza di connessi illimitati di soluzioni T -periodiche di $\ddot{x}_\pi = h(x, \dot{x})$ che incontrano $h|_N^{-1}(0)$. Per fare ciò abbiamo bisogno della nozione di *indice di avvolgimento* in dimensione maggiore o uguale a tre; di cui diamo una breve descrizione, per ulteriori dettagli ci riferiamo a [23].

Data una curva continua chiusa $\sigma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, l'indice di avvolgimento di σ rispetto a 0 è il numero (algebrico) di "giri" di σ attorno a 0, ed è dato da $\mathfrak{I}_0(\sigma) = \deg(\hat{\sigma})$, dove $\hat{\sigma} : S^1 \rightarrow S^1$ è definito da $\hat{\sigma}(t) = \sigma(t)/|\sigma(t)|$.²

Più in generale, sempre in dimensione 2, sia P un piano affine orientato e $q \in P$. Se $\sigma : [0, T] \rightarrow P \setminus \{q\}$ è una curva continua tale che $\sigma(0) = \sigma(T)$, poniamo, per definizione, $\mathfrak{I}_q(\sigma) = \mathfrak{I}_0(A \circ \sigma)$, dove $A : P \rightarrow \mathbb{R}^2$ è un isomorfismo affine che preserva l'orientazione e tale che $A(q) = 0$. È facile verificare che questa definizione non dipende dalla scelta di A .

Sia E uno spazio affine orientato dotato di un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e sia α un asse orientato in E (i.e. un sottospazio affine di E , 2-codimensionale ed orientato). Orientiamo E/α in modo tale che l'orientazione risultante di $(E/\alpha) \times \alpha$ (come prodotto) coincida con quella indotta dall'identificazione canonica $E \cong (E/\alpha) \times \alpha$. Se $\sigma : [0, T] \rightarrow E \setminus \{\alpha\}$ è continua e tale che $\sigma(0) = \sigma(T)$, definiamo

$$w(\sigma, \alpha) = \mathfrak{I}_0(\pi \circ \sigma),$$

dove $\pi : E \rightarrow E/\alpha$ è la proiezione canonica.

Sia q un punto in E e $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow E$ una curva C^1 tale che, per ogni $t \in \mathbb{R}$, $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ ed i vettori $\gamma(t) - q$ e $\dot{\gamma}(t)$ siano linearmente indipendenti. Dato $\tau \in \mathbb{R}$, denotiamo con $\alpha_{\tau, q}$ l'asse orientato passante per q e ortogonale al piano orientato P_τ generato dai vettori $\gamma(\tau) - q$ e $\dot{\gamma}(\tau)$.³ Diremo che γ è q -ammissibile se $\gamma(t) \notin \alpha_{\tau, q}$ per ogni $t, \tau \in \mathbb{R}$. Se γ è una curva T -periodica e q -ammissibile, osserviamo che $w(\gamma|_{[0, T]}, \alpha_{\tau, q})$ è indipendente dalla scelta di τ (per la proprietà di invarianza per omotopia del grado). Quindi, possiamo definire l'*indice di avvolgimento di γ rispetto a q* come segue

$$\mathfrak{I}_q(\gamma) = w(\gamma|_{[0, T]}, \alpha_{\tau, q}).$$

È importante osservare che la funzione $\mathfrak{I}_q : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}$, dove

$$\Omega = \{\gamma \in C_T^1(E) : \gamma \text{ è } \sigma\text{-ammissibile}\},$$

è continua.

LEMMA 5.2.1. *Siano $h : TS_\rho^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ed $f : \mathbb{R} \times TS_\rho^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ campi vettoriali limitati tangenti ad S_ρ^n . Dato $\lambda_0 \geq 0$, ogni insieme connesso di T -coppie in $[0, \lambda_0] \times C_T^1(S_\rho^n)$ dell'equazione (5.2.1) è limitato.*

Dimostrazione. Definiamo la funzione $\kappa : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ponendo

$$\kappa(\lambda) = \sup_{(q, v) \in TS} |h(q, v)| + \lambda \sup_{(t; q, v) \in \mathbb{R} \times TS} |f(t; q, v)|.$$

²Con $\deg(\hat{\sigma})$ denotiamo il grado di Brouwer di $\hat{\sigma} : S^1 \rightarrow S^1$; si veda per esempio [14] o [43].

³L'orientazione di P_τ è data dalla base ordinata $\{\gamma(\tau) - q, \dot{\gamma}(\tau)\}$ e quella di $\alpha_{\tau, q}$ deve essere scelta in accordo con l'orientazione di E nell'identificazione $E \cong \alpha_{\tau, q} \times P_\tau$.

Supponiamo che $x : \mathbb{R} \rightarrow S$ sia un soluzione T -periodica di (5.2.1) corrispondente ad un dato $\lambda \geq 0$. Poniamo $u(t) = |\dot{x}(t)|$, ed assumiamo che $\|\dot{x}\|_0 \geq 2\kappa(\lambda)T$.⁴ Come nella dimostrazione del Lemma 1 in [21] e dei Lemmi 2 e 3 in [23] si può provare che x è ammissibile relativamente all'origine e che il suo indice di avvolgimento soddisfa

$$(5.2.2) \quad \mathfrak{J}(x) \geq \frac{T}{2\pi} (\|\dot{x}\|_0 - \kappa(\lambda)T).$$

Supponiamo per assurdo che esista un insieme connesso ed illimitato Γ di T -coppie non banali per (5.2.1); osserviamo che la sua chiusura $\bar{\Gamma}$ è un insieme (connesso ed illimitato) di T -coppie (eventualmente banali). Per il teorema di estensione di Tietze esiste una funzione continua $\omega : \bar{\Gamma} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\omega(\lambda, x) = \mathfrak{J}(x)$ se $\|x\|_1 \geq 2\kappa(\lambda)T + \rho$. La disuguaglianza (5.2.2) mostra che l'immagine di ω è illimitata. Inoltre, poiché $\bar{\Gamma}$ è connesso, questa immagine deve essere, in realtà, un intervallo illimitato. Questo è impossibile perché ω assume valori interi al di fuori dell'insieme

$$K = \{(\lambda, x) \in \bar{\Gamma} : \|x\|_1 \leq 2\kappa(\lambda_0)T + \rho\},$$

che è compatto per il teorema di Ascoli-Arzelà. \blacksquare

Siano $g : TS_\rho^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ed $f : \mathbb{R} \times TS_\rho^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ campi vettoriali limitati tangenti ad S_ρ^n ; consideriamo l'equazione

$$(5.2.3) \quad \ddot{x} = -\frac{|\dot{x}|^2}{\rho^2}x + g(x, \dot{x}) - \eta\nu(|\dot{x}|)\dot{x} + \lambda f(t, x, \dot{x}),$$

dove ν è come nel Lemma 5.1.4 e η è un numero reale non negativo. Mettendo insieme i Lemmi 5.1.4 e 5.2.1 si ha che, dato $\lambda_0 \geq 0$, ogni insieme connesso di T -coppie in $[0, \lambda_0] \times C_T^1(S_\rho^n)$ dell'equazione (5.2.3) è limitato. Quindi, in particolare, ogni connesso di soluzioni T -periodiche di

$$(5.2.4) \quad \ddot{x} = -\frac{|\dot{x}|^2}{\rho^2}x + g(x, \dot{x}) - \eta\nu(|\dot{x}|)\dot{x}, \quad \eta \geq 0,$$

in $C_T^1(S_\rho^n)$ è limitato.

Quanto detto finora ci permette di dare il risultato principale di questo capitolo

TEOREMA 5.2.2. *Siano $g : TS_\rho^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ed $f : \mathbb{R} \times TS_\rho^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ campi vettoriali tangenti ad S_ρ^n , con f T -periodica in t e g limitata. Siano inoltre $\nu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua soddisfacente (5.1.3) e $\eta \geq 0$. Se z_1, \dots, z_k sono zeri non T -risonanti di $g|_N$ tali che*

$$(5.2.5) \quad \sum_{i=1}^k i(g|_N, z_i) \neq \begin{cases} 2 & \text{se } n \text{ è pari,} \\ 0 & \text{se } n \text{ è dispari,} \end{cases}$$

allora, esiste $\lambda_f > 0$ tale che per $\lambda \in [0, \lambda_f]$ l'equazione (5.2.3) ha almeno $k + 1$ soluzioni T -periodiche con immagini a due a due disgiunte.

⁴In generale, data una funzione $\xi \in C_T^\alpha(M)$, $0 \leq \alpha < \infty$, con $\|\xi\|_\alpha$ denotiamo la norma α di ξ , cioè

$$\sum_{k=0}^{\alpha} \max \left\{ \left| \xi^{(k)}(t) \right| : t \in [0, T] \right\}.$$

Dimostrazione. Per quanto osservato sopra, ogni connesso di soluzioni T -periodiche dell'equazione (5.2.4) è limitato in $C_T^1(S_\rho^n)$. Come è noto, $\chi(S_\rho^n)$ vale 0 se n è dispari e 2 se pari; Dunque la condizione (5.2.5) equivale a $\sum_{i=1}^k i(g|_N, z_i) \neq \chi(S_\rho^n)$. La tesi segue dunque dal Lemma 5.1.4. ■

Nel caso in cui $k = 1$, il teorema appena provato assume una forma lievemente più semplice:

COROLLARIO 5.2.3. *Siano g, f, ν e η come nel Teorema 5.2.2. Supponiamo che $g|_N$ abbia uno zero non T -risonante. Allora, esiste $\lambda_f > 0$ tale che l'equazione (5.2.3) ha almeno 2 soluzioni T -periodiche con immagini disgiunte per $\lambda \in [0, \lambda_f]$.*

Dimostrazione. Sia z uno zero non T -risonante di $g|_N$. Basta osservare che, allora, $i(g|_N, z) = \pm 1$ è necessariamente diverso da $\chi(S_\rho^n)$ che vale 0 oppure 2. ■

5.2.1. Il pendolo fisico. Vediamo un'applicazione, fisicamente rilevante, di quanto fatto nei paragrafi precedenti. Ci occuperemo delle oscillazioni forzate di un punto materiale di massa m vincolato ad una sfera $S = S_\rho^2$ di raggio ρ e sottoposto all'azione di tre forze: un campo vettoriale posizionale, un possibile attrito ed un termine forzante T -periodico. In particolare studiamo la molteplicità delle soluzioni T -periodiche, per piccoli valori di $\lambda > 0$, della seguente equazione:

$$(5.2.6) \quad m \ddot{x} = -\frac{m|\dot{x}|^2}{\rho^2} \dot{x} + \gamma(x) - \eta \dot{x} + \lambda f(t, x, \dot{x}),$$

dove $\gamma : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $f : \mathbb{R} \times TS \rightarrow \mathbb{R}^3$ sono campi vettoriali tangenti ad S ed $\eta \geq 0$.

Come osservato nel Corollario 5.2.3, è sufficiente che γ abbia uno zero non T -risonante affinché, per piccoli valori di $\lambda > 0$, vi siano due soluzioni T -periodiche con immagine distinta di (5.2.6). Un caso rilevante si ha quando γ è la componente tangenziale della forza di gravità $(0, 0, -m\mathbf{g})$ (\mathbf{g} rappresenta l'accelerazione gravitazionale), cioè quando

$$\gamma_{\mathbf{g}}(q) = \frac{m\mathbf{g}}{r^2} (q_3q_1, q_3q_2, -(r^2 - q_3^2)),$$

$q = (q_1, q_2, q_3)$. Per questa scelta di $\gamma = \gamma_{\mathbf{g}}$ la (5.2.6) è detta *equazione del pendolo gravitazionale forzato*. Il Corollario 5.2.3, implica la seguente affermazione:

Il pendolo gravitazionale T -forzato ha almeno due soluzioni T -periodiche essenzialmente differenti.

Più precisamente, vale il seguente

COROLLARIO 5.2.4. *Dato un campo vettoriale T -periodico, $f : \mathbb{R} \times TS \rightarrow \mathbb{R}^3$, tangente alla sfera S , esiste un $\lambda_f > 0$ tale che per $\lambda \in [0, \lambda_f]$ l'equazione*

$$m \ddot{x} = -\frac{m|\dot{x}|^2}{\rho^2} \dot{x} + \gamma_{\mathbf{g}}(x) - \eta \dot{x} + \lambda f(t, x, \dot{x}),$$

con $\eta \geq 0$, ha almeno due soluzioni T -periodiche con immagine distinta.

Dimostrazione. L'equazione linearizzata, per $\lambda = 0$, nel polo nord $\mathcal{N} = (0, 0, 1)$ è

$$m \ddot{x} = \frac{m\mathbf{g}}{\rho} x - \eta \dot{x}, \quad x \in \mathbb{R}^2 \cong T_{\mathcal{N}}S.$$

Dunque, come si verifica subito, \mathcal{N} è non T -risonante per ogni $T > 0$. ■

Osserviamo che, se $\eta = 0$ e $T = 2\pi\sqrt{mg/\rho}$, allora il polo sud $\mathcal{S} = (0, 0, -1)$ è T -risonante. Dunque, in questo caso, il risultato di molteplicità del corollario appena provato non può essere meramente ottenuto applicando il teorema della funzione implicita.

Bibliografia

- [1] Abraham R. – Robbin J., *Transversal Mappings and Flows*, W.A.Benjamin, Inc., New York, 1967.
- [2] Amann H. – Weiss S., *On the Uniqueness of the Topological Degree*, Math. Z. 130(1973), 37-54.
- [3] Arnol'd V. I., *Metodi matematici della meccanica classica*, Nuova biblioteca di cultura 204, Editori riuniti.
- [4] Bartsh T. – Mawhin J., *The Leray-Schauder degree of S^1 -equivariant operators associated to autonomous neutral equations in spaces of periodic functions*, J. of Differential Equations 92 (1991), 90-99.
- [5] Boothby W.M., *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian manifolds*, Academic Press, New York, 1975.
- [6] Borsuk K. *Theory of Retracts*, Polish Sci. Publ. Warsaw, 1967.
- [7] Brown R.F., *An elementary proof of the uniqueness of the fixed point index*, Pacific J. Math. 35(1970), 549-558.
- [8] Capietto A., *Continuation theorems for periodic boundary value problems*, Ph. D Thesis, SISSA, Trieste, 1990.
- [9] Capietto A., *Continuation results for operator equations in metric ANRs*, Boll. Un. Mat. Ital. (7) 8-B (1994), 135-150.
- [10] Capietto A. – Mawhin J. – Zanolin F., *Continuation Theorems for Periodic Perturbations of Autonomous Systems*, Trans. Amer. Math. Soc. 329 (1992), 41-72.
- [11] do Carmo M.P., *Riemannian Geometry*, Birkhäuser, Boston, 1992.
- [12] Chow S.N. – Mallet-Paret J., *The Fuller Index and global Hopf Bifurcation*, J. Differential Equations 29 (1978), 66-85.
- [13] Dold A., *Fixed point index and fixed point theorems for euclidean neighborhood retracts*, Topology 4(1965), 1-8.
- [14] Dold A., *Lectures on Algebraic Topology*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag, 1980.
- [15] Dugundji J. *Topology*, Allyn and Bacon series in adv. Math., Allyn and Bacon inc.
- [16] Dugundji J. – Granas A., *Fixed Point Theory*, Vol. 1, Polska Academia Nauk, Monografie Matematyczne, Tom 61, Warsaw, 1982.
- [17] Führer L., *Theorie des Abbildungsgrades in endlichdimensionalen Räumen*, Inaugural Dissertation, Freie Universität Berlin 1971.
- [18] Furi M. *Second order differential equations on manifolds and forced oscillations*, Proc. Conference on Topological Methods in Differential Equations and Inclusions, Université de Montréal, 1994, NATO ASI series C, Kluwer Acad. publ., Dordrecht NL.
- [19] Furi M. – Pera M. P., *Global branches of periodic solutions for forced differential equations on nonzero Euler characteristic manifolds*, Boll. Un. Mat. Ital. 3-C (1984), 157-170.
- [20] Furi M. – Pera M. P., *A continuation principle for forced oscillations on differentiable manifolds*, Pacific J. of Math. 121(1986), 321-338.
- [21] Furi M. – Pera M. P., *The forced spherical pendulum does have forced oscillations*, Delay Differential Equations and Dynamical Systems (ed. S. Busenberg ed M. Martelli), Lecture Notes in Math. 1475, Springer-Verlag, Berlin, 1991, 176-193.
- [22] Furi M. – Pera M. P., *A continuation principle for periodic solutions of forced motion equations on manifolds and applications to bifurcation theory*, Pacific J. of Math. 160(1993), 219-244.

- [23] Furi M. – Pera M. P., *On the notion of winding number for closed curves and applications to forced oscillations on even dimensional spheres*, Boll. Un. Mat. Ital. 7-A (1993), 397-407.
- [24] Furi M. – Pera M. P., *Global bifurcation of fixed points and the Poincaré translation operator*, apparirà su Ann. Mat. pura ed app.
- [25] Furi M. – Pera M. P., *Remarks on global branches of harmonic solutions to periodic ODE's on manifolds*, apparirà in Boll. Un. Mat. Ital.
- [26] Furi M. – Spadini M., *On the fixed point index of the flow and applications to periodic solutions of differential equations on manifolds*, Boll. Un. Mat. Ital. vol. 10-A (1996), 333-346.
- [27] Furi M. – Spadini M., *On the set of harmonic solutions of periodically perturbed autonomous differential equations on manifolds*, apparirà su J. of Nonlin. Anal. TMA.
- [28] Furi M. – Spadini M., *Bifurcation and multiplicity for forced oscillations of the spherical pendulum*, preprint.
- [29] Gantmacher F.R., *Théorie des matrices (tome 1)*, Collection universitaire de mathématiques, Dunod, Paris 1966.
- [30] Granas A., *The Leray-Schauder index and the fixed point theory for arbitrary ANR's*, Bull. Soc. Math. France 100 (1972), 209-228.
- [31] Guillelmin V. – Pollack A., *Differential Topology*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1974.
- [32] Hirsch M.W., *Differential Topology*, - Graduate Texts in Math., Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- [33] Krasnosel'skii M.A., *Translation along trajectories of differential equations*, Transl. Math. Monographs vol. 19, Amer. Math. Soc. Providence R.I., 1968.
- [34] Krasnosel'skii M.A. – Zabreiko P.P., *Geometrical methods of nonlinear analysis*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 263, Springer-Verlag.
- [35] Lang S., *Differentiable Manifolds*, - Addison-Wesley, 1972.
- [36] Leray J. – Schauder J., *Topologie et équations fonctionnelles*, Ann. Sci. École Normale Sup. (3) 51 (1934), 45-78.
- [37] Lloyd N.G., *Degree Theory*, Cambridge Tracts in Math. 73, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1978.
- [38] Palis J. jr – de Melo W., *Geometric theory of dynamical system*, Springer-Verlag, New York, 1982.
- [39] Peixoto M.M., *On an approximation theorem of Kupka and Smale*, Journal of Diff. Equations 3 (1966), 217-227.
- [40] Mawhin J., *Topological Degree Methods in Nonlinear Boundary Value Problems*, CBMS Series, vol. 40, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1979.
- [41] Mawhin J., *Topological Degree and Boundary Value Problems for Nonlinear Differential Equations*, C.I.M.E. course on topological methods for ordinary differential equations, ed. M.Furi e P.Zecca, Lecture Notes in Math. 1537, Springer-Verlag 1991, 74-142.
- [42] Mawhin J., *Continuation theorems and periodic solutions of ordinary differential equations*, Proc. Conference on Topological Methods in Differential Equations and Inclusions, Université de Montréal, 1994, NATO ASI series C, Kluwer Acad. publ., Dordrecht NL.
- [43] Milnor J.W., *Topology from the differentiable viewpoint*, Univ. Press of Virginia 1965.
- [44] Milnor J.W., *Morse Theory*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1963
- [45] Morassi P., *Principi di continuazione per equazioni funzionali dipendenti da un parametro e applicazioni alla biforcazione di soluzioni periodiche di equazioni differenziali ordinarie*, tesi di Dottorato, Università di Firenze, 1993.
- [46] Morassi P., *Bifurcation of harmonic solutions for periodically perturbed autonomous differential equations from a manifold of equilibria*, apparirà su Nonlin. Anal. TMA.
- [47] Nussbaum R.D., *The fixed point index and fixed point theorems*, in *Topological Methods for Ordinary Differential Equations*, Lecture Notes in Math. n.1537, Springer-Verlag, Berlin, 1993, 143-205.
- [48] Tromba A.J., *The Euler characteristic of vector fields on Banach manifolds and a globalization of Leray-Schauder degree*, Adv. in Math. 28(1978), 148-173.
- [49] Yorke J.A., *Invariance for ordinary differential equations*, Math. Systems Theory 1, 353-372.
- [50] Zanolin F., *Continuation theorems for the periodic problem via the translation operator*, preprint.

Glossario dei simboli

\emptyset	Insieme vuoto.
$A \cup B$	A unito B .
$A \cap B$	A intersecato B .
$A \setminus B$	Differenza insiemistica di A e B .
$A - B$	Differenza di A e B in \mathbb{R}^n ossia $\{a - b : a \in A, b \in B\}$.
$f^{-1}(Z)$	Retroimmagine di Z mediante f .
$\langle v, w \rangle$	Prodotto scalare di v e w .
$ v $	Norma euclidea di v .
$C^\alpha(U, V)$	Funzioni di classe C^α da U in V .
$f'(p)$	Derivata di f in p .
$f \circ g$	f composto con g .
$D_E f(p)$	Derivata parziale di f in p lungo il sottospazio E .
$L(E, F)$	Spazio degli operatori lineari da E in F .
$L^2(E, F)$	Spazio degli operatori bilineari da $E \times E$ in F .
$f''(p)$	Derivata seconda di f in p .
S^k	Sfera k -dimensionale in \mathbb{R}^{k+1} .
S_r^k	Sfera k -dimensionale in \mathbb{R}^{k+1} di raggio r .
$C_p(X)$	Cono tangente ad X in p .
$T_p(X)$	Spazio tangente ad X in p .
TX	Fibrato tangente ad X .
Tf	Applicazione tangente associata a $f : X \rightarrow Y$.
$N_p M$	Spazio ortogonale a $T_p M$ in $\mathbb{R}^k \supset M$.
$N(Z, M)$	Fibrato normale a Z in M .
$\text{grad} f$	Gradiente di f .
∂M	Bordo di M .
∂f	Restrizione di f a ∂M .
$f \pitchfork Z$	f é trasversa a Z .
\dot{x}	Derivata di x rispetto a t .
\ddot{x}	Derivata seconda di x rispetto a t .
∇	Connessione riemanniana.
$\nabla_v f$	Derivata covariante del campo vettoriale f nella direzione v .
$\ddot{x}_\pi(t)$	Proiezione ortogonale sullo spazio tangente di $\ddot{x}(t)$.
\hat{h}	Campo vettoriale del secondo ordine associato ad h .
$\text{in}(f, Z)$	Indice di intersezione di f con Z .
$\text{dist}(C, K)$	Distanza tra i chiusi C e K .
$\text{deg}(g, U)$	Grado di g in U .
$i(g, p)$	Indice dello zero non degenerare p (di g).
$i(g, Z)$	Indice del compatto $Z \subset g^{-1}(0)$.

$\chi(M)$	Caratteristica di Eulero-Poincaré di M .
$\text{Fix}(f)$	Insieme dei punti fissi di f .
Δ	Diagonale del quadrato cartesiano di uno spazio topologico.
$\text{ind}(f, U)$	Indice di punto fisso di f in U .
$\text{Fr}U$	Frontiera di U nello spazio ambiente.
$\{\Phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$	Flusso locale.
A_T	Unione di tutte le orbite τ -periodiche, con $0 < \tau \leq T$.
$h_0, h _N, h(\cdot, 0)$	Restrizioni di h alla sezione nulla di TN .
$C_T^\alpha(M)$	Spazio delle funzioni T -periodiche di classe C^α , da \mathbb{R} in M .
X	Insieme delle T -coppie.
S	Insieme dei punti iniziali.
W_s	Sezione dell'insieme $W \subset \mathbb{R} \times B$ corrispondente a $s \in \mathbb{R}$.
\overline{W}	Chiusura di W nello spazio ambiente.
\overline{W}^A	Chiusura di W relativa a A .
$\text{int}K$	Interno di K .
M^p	Insieme di sottolivello su M .
$A \cong B$	A é isomorfo a B .
$\text{Im}(A)$	Immagine di A .
$\text{ker}(A)$	Nucleo di A .
$\sigma(A)$	Spettro di A .
$w_f(p)$	Vento medio di f in p .
$\#Z$	Cardinalità di Z .
$\ x\ _\alpha$	Norma C^α , $0 \leq \alpha < \infty$, di $x \in C_T^\alpha(M)$.
$\text{Hess}(f)$	Hessiano di f .
$\text{deg}(\hat{\sigma})$	Grado di Brouwer di $\hat{\sigma} : S^n \rightarrow S^n$.
$\mathfrak{I}(\gamma)$	Indice di avvolgimento di γ .
\mathbf{g}	Accelerazione gravitazionale.

Indice analitico

- T -coppia, 29, 30
- T -coppia
 - banale, 30
 - omotopicamente banale, 46
 - per un'equazione del secondo ordine, 63
 - strettamente non banale, 46
- accelerazione gravitazionale, 70
- applicazione
 - \mathbb{Z} -ammissibile, 12
 - ammissibile per l'indice di punto fisso, 16
- attrito, 64
- bordo, 6
- Brown (Corollario di), 6
- campo vettoriale
 - T -iperbolico, 48
 - ammissibile, 14
 - del secondo ordine, 11
 - interno, 5
 - non degenerare, 15
 - tangente, 5
- caratteristica di Eulero-Poincaré, 16
- carta locale, 4
- connessione riemanniana, 10
- cono tangente, 2
- curva di Jordan, 60
- derivata, 1
- derivata
 - covariante, 10, 64
 - direzionale, 1
 - estesa, 3
 - parziale, 2
 - seconda, 2
- diffeomorfismo, 3
- fibrato
 - normale, 5
 - tangente, 5
- flusso locale, 19, 25
- forza di gravità, 70
- funzione trasversa, 7
- funzioni coordinate, 4
- gradiente, 5
- grado
 - di Brouwer, 14, 68
 - di un campo vettoriale, 14
- guiding function, 40
- hessiano, 64
- indice
 - di avvolgimento, 68
 - di intersezione, 12
 - di punto fisso, 16
 - di un compatto di zeri di un campo vettoriale, 16
 - di uno zero non degenerare, 15
- insieme
 - di livello regolare, 4
- insieme
 - raggiungibile, 22
- Krasnosel'skii, 19, 20, 24, 40, 41
- nastro di Möbius, 8
- norma
 - C^α , 69
 - euclidea, 1
- numero di Betti, 16
- omotopia, 12
- omotopia
 - \mathbb{Z} -ammissibile, 12
 - ammissibile per il grado di un campo vettoriale tangente, 15
 - ammissibile per l'indice di punto fisso, 17
- operatore di traslazione, 20
- orbita periodica, 20
- orientazione, 7
- orientazione
 - bordo, 8
 - prodotto, 8
 - standard, 8
- parametrizzazione, 4
- pendolo gravitazionale forzato, 70
- principio di continuazione, 38

- problema di Cauchy, 9
- proprietà
 - di additività per il grado di un campo vettoriale, 15
 - di additività per l'indice di intersezione, 14
 - di additività per l'indice di punto fisso, 17
 - di esistenza per l'indice di punto fisso, 17
 - di Kamke delle soluzioni massimali, 10
 - di normalizzazione per l'indice di punto fisso, 17
 - di omotopia per il grado di un campo vettoriale, 15
 - di omotopia per l'indice di intersezione, 14
 - di omotopia per l'indice di punto fisso, 17
 - di soluzione per il grado di un campo vettoriale, 15
 - di soluzione per l'indice di intersezione, 13
 - di taglio per il grado di un campo vettoriale, 15
 - di taglio per l'indice di intersezione, 14
 - di taglio per l'indice di punto fisso, 17
- punto
 - T -risonante, 47
 - T -risonante per un'equazione del secondo ordine, 63
 - critico, 4
 - di biforcazione, 48, 50
 - di emanazione, 45
 - di emanazione forte, 46
 - di emanazione stretto, 46
 - iniziale, 30
 - iniziale banale, 30
 - regolare, 4
 - singolare, 3
- ramo globale
 - di biforcazione, 50
 - di continuazione, 45
- reazione vincolare, 10
- retrato
 - assoluto d'intorno (ANR), 4
 - di deformazione, 41
- retrazione, 41
- Sard (Lemma di), 6
- spazio tangente, 3
- spazio tangente
 - ad una varietà, 6
- spazio vettoriale orientato, 7
- T -irreversibilità, 20
- Teorema
 - degli intorni tubolari, 5
 - della funzione implicita, 2
 - della funzione inversa, 2
 - di Ascoli-Arzelà, 29
 - di Kupka-Smale, 20, 22
 - di Poincaré-Hopf, 16
 - di Tietze, 69
- Teoria di Morse, 41
- tipo di omotopia, 16
- topologia fine (di Whitney), 42
- trappola, 60
- trasversalità, 7
- valore
 - critico, 4
 - regolare, 4
- varietà
 - con bordo, 6
 - differenziabile, 4
 - lisce, 4
 - orientata, 8
- vento medio, 50
- vettore tangente, 2
- vettore tangente
 - al fibrato tangente, 11