L'INDICE DI PUNTO FISSO
(NOTE INFORMALI)

MARCO SPADINI

1. Teoria classica

La teoria dell'indice di punto fisso è stata sviluppata da moti autori in altrettanti contesti diversi. I principali riferimenti sono R.D.Nussbaum e A.Granas ([13], [7]) per una forma più analitica e A.Dold ([3]) per una più algebrica.

1.1. **Una formulazione astratta.**

È possibile introdurre la nozione di indice di punto fisso in un contesto molto generale; per $f : W \to X$ con $W \subset X$ aperto, poniamo

$$\mathrm{Fix}(f) = \{x \in W : f(x) = x\}\,.$$

Un'applicazione continua $H : W \times [0,1] \to X$ è detta omotopia. Più avanti distingueremo alcune categorie di spazi topologici con opportune classi di applicazioni ed omotopie che chiameremo *ammissibili*.

Sia $\mathcal{C}$ una categoria di spazi topologici in cui siano fissate delle classi $\mathcal{U}$ e $\overline{\mathcal{U}}$ di applicazioni (definite su aperti) ed omotopie ammissibili. Con il termine *indice di punto fisso* intendiamo una funzione $\mathrm{Ind} : \mathcal{U} \to \mathbb{Z}$ soddisfacente le seguenti condizioni ($f : U \to X$ sia in $\mathcal{U}$)

1. (**Taglio**) Se $V \subset U$ è aperto e $\mathrm{Fix}(f) \subset V$, allora $f|_V \in \mathcal{U}$ e $\mathrm{Ind}(f) = \mathrm{Ind}(f|_V)$.
2. (**Additività**) Supponiamo che $U = U_1 \cup U_2$ (U_1 e U_2 aperti) e che $\mathrm{Fix}(f|_{U_1}) \cap \mathrm{Fix}(f|_{U_2}) = \emptyset$, allora $f|_{U_1}$ e $f|_{U_2}$ appartengono ad $\mathcal{U}$ e
$$\mathrm{Ind}(f) = \mathrm{Ind}(f|_{U_1}) + \mathrm{Ind}(f|_{U_1})$$
3. (**Esistenza**) Se $\mathrm{Ind}(f) \neq 0$, allora $\mathrm{Fix}(f) \neq \emptyset$.
4. (**Omotopia**) Sia $H : U \times [0,1] \to X$ un'omotopia ammissibile. Allora
$$\mathrm{Ind}\,(H(\cdot,0)) = \mathrm{Ind}\,(H(\cdot,1))\,.$$
5. (**Moltiplicatività**) Se $f_1 : U_1 \to X_1$ ed $f_2 : U_2 \to X_2$ sono in $\mathcal{U}$, allora l'applicazione prodotto
$$f_1 \times f_2 : U_1 \times U_2 \to X_1 \times X_2$$
sta in $\mathcal{U}$, e
$$\mathrm{Ind}\,(f_1 \times f_2) = \mathrm{Ind}(f_1) \cdot \mathrm{Ind}(f_2)$$
6. (**Commutatività**) Siano $U_1 \subset X_1$ ed $U_2 \subset X_2$ aperti con $X_1, X_2 \in \mathcal{C}$ e siano $f_1 : U_1 \to X_2$ e $f_2 : U_2 \to X_1$ applicazioni in $\mathcal{C}$. Se una delle composizioni
$$f_2 \circ f_1 : f_1^{-1}(U_2) \to X_1 \;\text{ oppure }\; f_1 \circ f_2 : f_2^{-1}(U_1) \to X_2$$

sta in $\mathcal{U}$, allora anche l'altra sta in $\mathcal{U}$ e

$$\mathrm{Ind}\,(f_1 \circ f_2) = \mathrm{Ind}\,(f_2 \circ f_1)\,.$$

7. (**Normalizzazione**) Se $U = X$ ed $f : X \to X$ sta in $\mathcal{U}$, allora f è di Lefschetz[1] e

$$\mathrm{Ind}(f) = \Lambda(f).$$

Talvolta la (7) è rimpiazzata dalla più semplice

(7') (**Normalizzazione debole**) Sia $f : X \to X$ un'applicazione costante, e f sta in $\mathcal{U}$, allora $\mathrm{Ind}(f) = 1$.

Talvolta è utile anche una riformulazione più forte della proprietà di additività

(2') (**Additività forte**) Se U_1 e U_2 sono aperti disgiunti di X tali che $\mathrm{Fix}(f) \subset U_1 \cup U_2$ allora $f|_{U_1}$ e $f|_{U_2}$ appartengono ad $\mathcal{U}$ e

$$\mathrm{Ind}(f) = \mathrm{Ind}(f|_{U_1}) + \mathrm{Ind}(f|_{U_2}).$$

Osserviamo che la (2') implica la (1). Infatti, se $\mathrm{Fix}(f) \subset V$, si ha

$$\mathrm{Ind}(f) = \mathrm{Ind}(f|_V) + \mathrm{Ind}(f|_\emptyset) = \mathrm{Ind}(f|_V),$$

essendo, sempre per la (2'), $\mathrm{Ind}(f|_\emptyset) = 0$.

Il problema di una presentazione così astratta di questa teoria è che non è neppure chiaro a priori se, e per quali categorie, un indice di punto fisso esista davvero. Un altro problema è se questa lista di assiomi determini in modo univoco un indice di punto fisso. Per alcune categorie di spazi topologici e per alcune classi di applicazioni si può costruire un indice con le proprietà richieste e che risulta univocamente determinato.

1.2. **Una teoria più concreta.** Vediamo la nozione di indice di punto fisso, dapprima negli spazi normati, e poi nei retratti assoluti d'intorno (ANR).

Sia X uno spazio normato e W un suo aperto. Consideriamo un'applicazione continua $f : W \to X$ tale che l'insieme $\mathrm{Fix}(f)$ sia compatto, supponiamo inoltre che esista un intorno aperto V di $\mathrm{Fix}(f)$ tale che $f|_V$ sia compatta. In tale caso la f è detta *ammissibile*[2].

Con queste notazioni poniamo

$$\mathrm{Ind}(f) = \deg\,(I - f, W, 0)$$

dove $\deg\,(I - f, W, 0)$ denota il grado di $I - f$ con $I : W \to X$ l'identità. Spesso, in questo caso, $\mathrm{Ind}(f)$ è detto *indice di Leray-Schauder*.

Una omotopia $H : W \times [0, 1] \to X$ sarà detta *ammissibile* se l'insieme

$$\{(x, t) \in W \times [0, 1] : H(x, t) = x\}$$

è compatto.

[1] La definizione generale è un po' complicata, si veda per es. [7]. Nel caso di spazi X aventi omologia finita ha senso considerare $f_* : H(X) \to H(X)$, dove $H(X)$ è il funtore di omologia singolare a coefficienti razionali, si pone

$$\Lambda(f) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \mathrm{tr}\,(f_{*i})\,.$$

[2] Notiamo che la seconda condizione è automaticamente soddisfatta, per f continua e t.c. $\mathrm{Fix}(f)$ sia compatto, quando X ha dimensione finita

Con queste definizioni, usando le proprietà del grado, si può provare che le proprietà 1) — 7) del paragrafo precedente sono soddisfatte.

Ricordo che uno spazio topologico X si dice r-dominato da un aperto V di Y se X è omeomorfo ad un chiuso $X_1 \subset V$ ed esiste una retrazione continua $r : V \to X_1$.

Uno spazio topologico X è detto *retratto assoluto d'intorno* (o ANR) se è r-dominato da un aperto di uno spazio normato; X è detto *retratto assoluto* (o AR) se è r-dominato da uno spazio normato. Notiamo che se X è ρ-dominato da un aperto V di Y, allora esistono due applicazioni $r : V \to X$ ed $s : X \to V$ tali che $r \circ s$ è l'identità di X, infatti se $\phi : X \to \phi(X) \subset V$ è un omeomorfismo, basta prendere $r = \phi^{-1} \circ \rho$ e $s = \phi$. Ricordo alcune delle proprietà fondamentali di questi spazi:

- Se X è r-dominato da Y, ed Y è un ANR allora X lo è.
- Se $U \subset X$ è aperto ed X è un ANR allora U è un ANR.
- Se X è un convesso di uno spazio normato, allora X è un ANR.
- Uno spazio metrizzabile che è localmente un ANR lo è globalmente. In particolare le varietà differenziabili sono degli ANR.
- Lo spazio X è un ANR (risp. AR) se e solo se per ogni coppia (M, C) con M uno spazio metrico ed $C \subset M$ un suo chiuso e per ogni funzione continua $g : C \to X$ esiste un'estensione continua $G : W \to X$ ad un intorno aperto W di C (risp. a tutto M).

Possiamo dare una nozione di indice di punto fisso per applicazioni continue su ANR. Le classi delle funzioni e delle omotopie ammissibili sono definite in modo analogo al caso delle applicazioni tra spazi di Banach.

Sia X un ANR ed U un suo aperto, sia inoltre $f : U \to X$ un'applicazione ammissibile. Supponiamo che X sia ρ-dominato da un aperto V di uno spazio normato E e siano $r : V \to X$ ed $s : X \to V$ due applicazioni continue tali che $r \circ s$ è l'identità di X, allora la composizione

$$s \circ f \circ r : r^{-1}(U) \to E$$

è ammissibile. Infatti, per la definizione di r ed s, si ha

$$s(\{x \in U : f(x) = x\}) = \left\{y \in r^{-1}(U) : s \circ f \circ r(y) = y\right\}.$$

Poniamo

$$\mathrm{Ind}(f) = \mathrm{Ind}(s \circ f \circ r);$$

usando la proprietà di commutatività si prova che questa definizione non dipende dalla scelta di r, s e V.

Ancora, con queste definizioni si osserva che le proprietà 1)—7) sono verificate. R.F.Brown [2] ha dimostrato che, per ANR compatti gli assiomi (1), (2'), (3), (6) e (7') determinano univocamente l'indice di punto fisso.

2. L'indice di punto fisso nelle varietà differenziabili

Passo ora a descrivere una costruzione del tutto diversa dell'indice di punto fisso nel caso delle varietà differenziabili. Essa è basata sulla teoria dell'indice d'intersezione. È importante notare che le varietà differenziabili sono dei particolari esempi di ANR, la costruzione che effettuerò, sebbene completamente diversa da quella vista sopra, porterà allo stesso indice; sussiste infatti un risultato di unicità.

2.1. **Alcuni elementi essenziali.** Sia $f : M \to N$ un'applicazione C^1 tra varietà differenziabili, diremo che f è *trasversa alla sottovarietà $Z \subset N$, nel punto $x \in M$*, quando $x \notin f^{-1}(Z)$ oppure, se $x \in M$, quando

$$T_{f(x)}Z + f'(x)(T_x M) = T_{f(x)}N.$$

Se questo accade per ogni $x \in f^{-1}(Z)$ si dice che f è trasversa a Z e si scrive $f \pitchfork Z$. Vale il seguente risultato (vedi e.g. [8]).

Teorema 2.1. *Consideriamo un'applicazione $f : M \to N$ di classe C^∞ tra due varietà differenziabili M ed N, di cui N priva di bordo. Se sia f che $\partial f = f|_{\partial M}$ sono trasverse ad una sottovarietà $Z \subset N$, priva di bordo. Allora $f^{-1}(Z)$ è una sottovarietà C^∞ di M con*

$$\partial f^{-1}(Z) = \partial M \cap f^{-1}(Z).$$

Inoltre $\dim(M) - \dim\big(f^{-1}(Z)\big) = \dim(N) - \dim(Z)$.

La trasversalità è una proprietà generica, in altre parole, fissata la sottovarietà Z, "quasi tutte" le applicazioni da M in N sono trasverse a Z. Il significato di questa affermazione è chiarito dal seguente risultato (vedi ad esempio [9]),

Teorema 2.2. *Siano M, N e Z come nel Teorema 2.1 e $f : M \to N$ un'applicazione continua. Fissata una funzione continua $\eta : M \to (0, \infty)$, esiste una $g : M \to N$, di classe C^∞, tale che $g \pitchfork Z$ e $|f(x) - g(x)| < \eta(x)$ per ogni $x \in M$.*

Le varietà differenziabili sono casi particolari di retratti assoluti d'intorno (o ANR), come mostrato dal seguente teorema (vedi e.g. [8]).

Sia $M \subset \mathbb{R}^k$ una varietà C^∞, compatta e senza bordo. Fissato $\varepsilon > 0$, indichiamo con M_ε l'insieme aperto dei punti di $\mathbb{R}^k$ distanti meno di ε da M. Più in generale, data una funzione $\varepsilon : M \to (0, \infty)$, definiamo

$$M_\varepsilon = \big\{x \in \mathbb{R}^k : |y - x| < \varepsilon(y)\,,\ \text{per almeno un } y \in M\big\}$$

Teorema 2.3 (degli intorni tubolari)**.** *Sia $M \subset \mathbb{R}^k$ una varietà C^∞ senza bordo. Allora esiste una funzione C^∞, $\varepsilon : M \to (0, +\infty)$, tale che ad ogni punto $x \in M_\varepsilon$ corrisponde un unico punto $\pi(x) \in M$ di minima distanza, e la funzione $\pi : M_\varepsilon \to M$ è C^∞. Inoltre, se M è compatta, la funzione ε può essere scelta costante.*

2.2. **L'indice di intersezione.** Siano M ed N varietà differenziabili senza bordo, $f : M \to N$ un'applicazione continua, e $Z \subset N$ una sottovarietà chiusa di N priva di bordo. Supponiamo che la codimensione di Z in N eguagli la dimensione di M e che sia M sia il fibrato normale $N(Z, N)$ siano orientati. Se $f^{-1}(Z)$ è compatto, diremo che f è *Z-ammissibile.* In questo caso si può associare alla coppia (f, Z) un intero, $\mathrm{in}(f, Z)$, chiamato indice di intersezione di f con Z, che, in termini semplici, conta (algebricamente) il numero delle intersezioni dell'immagine di f con Z (vedi per es. [9], e [8]). Quest'intero, nel caso particolare che $Z = \{q\}$, $q \in N$, e che M e $T_q N$ siano orientati (e abbiano la stessa dimensione), non è altro che il grado di Brouwer di f rispetto a q (vedi per es. [12]). Come vedremo, non è sempre necessario supporre che M ed $N(Z, N)$ siano orientabili. Quest'ipotesi non occorre, per esempio, quando un'orientazione di M, in ogni punto $p \in f^{-1}(Z)$, determina univocamente un'orientazione del fibrato $N(Z, N)$ in $f(p)$. Mostreremo che questa situazione si verifica per le definizioni (basate sulla teoria dell'intersezione) del grado di un campo vettoriale tangente e dell'indice di punto fisso.

Per definire $\mathrm{in}(f,Z)$, supponiamo dapprima che f sia liscia e trasversa a Z. Sia $p \in f^{-1}(Z)$; denotiamo con $\pi_{f(p)}$ la proiezione ortogonale di $T_{f(p)}N$ sul sottospazio $N_{f(p)}(Z,N)$ di $\mathbb{R}^k$. Poiché $f \pitchfork Z$, la composizione

$$T_pM \ \xrightarrow{f'(p)}\ T_{f(p)}N \ \xrightarrow{\pi_{f(p)}}\ N_{f(p)}(Z,N) \ ,$$

è lineare e suriettiva; quindi, per l'eguaglianza delle dimensioni, è un isomorfismo.

Il Teorema 2.1 implica che $f^{-1}(Z)$ è discreto, e quindi necessariamente finito, perché è compatto per ipotesi. In questo caso, l'indice di intersezione è definito come la somma

$$\mathrm{in}(f,Z) = \sum_{p\in f^{-1}(Z)} \mathrm{sign}\left(\pi_{f(p)} f'(p)\right),$$

dove $\mathrm{sign}\left(\pi_{f(p)} f'(p)\right)$ è $+1$ o -1 a seconda che $\pi_{f(p)} f'(p)$ preservi o inverta l'orientazione. Come accennato precedentemente, quando i due spazi vettoriali T_pM e $N_{f(p)}(Z,N)$ possono essere canonicamente identificati, non è necessaria l'orientazione delle varietà per definire l'intero $\mathrm{sign}\left(\pi_{f(p)} f'(p)\right)$.

Un'applicazione continua $H : M \times [0,1] \to N$ è detta *omotopia.* Se $H^{-1}(Z)$ è un compatto, allora si dice che H è un'omotopia *Z-ammissibile.* Due applicazioni $f : M \to N$ e $g : M \to N$ si dicono omotope se esiste un'omotopia H tale che $H(\cdot,0) = f$ e $H(\cdot,1) = g$ (*Z-ammissibilmente omotope* se H è Z-ammissibile).

L'indice d'intersezione, come sopra definito, risulta invariante per omotopie Z-ammissibili lisce. Infatti, modificando leggermente i corrispondenti teoremi di [8] e [9], si può provare il seguente risultato:

Teorema 2.4. *Siano M, N e Z varietà come sopra e sia $H : M \times [0,1] \to N$ un'omotopia liscia, Z-ammissibile e tale che $H(\cdot,0) \pitchfork Z$ e $H(\cdot,1) \pitchfork Z$, allora*

$$\mathrm{in}\,[H(\cdot,0),Z] = \ \mathrm{in}\,[H(\ \cdot,1),Z]\,.$$

Inoltre, data un'applicazione liscia $f : M \to N$, trasversa a Z, se U è un sottoinsieme aperto di M contenente $f^{-1}(Z)$, si ha

$$\mathrm{in}(f,Z) = \mathrm{in}(\,f|_U\,,Z),$$

dove $f|_U$ denota la restrizione di f a U.

Per estendere la definizione dell'indice d'intersezione al caso in cui $f : M \to N$ sia un'applicazione continua e Z-ammissibile, fissiamo un intorno aperto e relativamente compatto U di $f^{-1}(Z)$ in M. Per il Teorema 2.2, possiamo scegliere $g : M \to N$ liscia e trasversa a Z, tale che

$$\max_{p\in\bar{U}} |f(p) - g(p)| < \delta, \tag{1}$$

con

$$\delta = \frac{1}{4}\min\left\{\min_{q\in\bar{U}} \varepsilon\left(f(q)\right)\ ,\ \mathrm{dist}\left(f(\mathrm{Fr}U)\ ,\ Z\right)\right\},$$

dove $\varepsilon : M \to (0,\infty)$ è come nel Teorema 2.3. Notiamo che la distanza a secondo membro è positiva in quanto $f(\mathrm{Fr}U)$ è compatto e Z è chiuso. Si pone, per definizione,

$$\mathrm{in}(f,Z) = \mathrm{in}(\,g|_U\,,Z).$$

Proviamo che la definizione appena data non dipende dalla scelta di g. Infatti, se g_1 e g_2 soddisfano la condizione (1), allora sono Z-ammissibili e Z-ammissibilmente omotope tra di loro. Per vederlo poniamo

$$h(x,\lambda) = \lambda g_1(x) + (1-\lambda) g_2(x),$$

poiché

$$\begin{aligned} |f(x) - h(x,\lambda)| &\leq |f(x) - g_1(x)| + (1-\lambda)\,|g_1(x) - g_2(x)| \\ &< 2\,\delta \leq \frac{1}{2}\varepsilon\left(f(x)\right), \end{aligned}$$

ha senso porre $H(x,\lambda) = \pi\left(h(x,\lambda)\right)$, dove π è la proiezione introdotta nel Teorema 2.3. Per ogni $\lambda \in [0,1]$ e $x \in \mathrm{Fr}U$, si ha

$$\begin{aligned} |f(x) - H(x,\lambda)| &\leq |f(x) - h(x,\lambda)| + |H(x,\lambda) - h(x,\lambda)| \\ &= |f(x) - h(x,\lambda)| + |\pi\left(h(x,\lambda)\right) - h(x,\lambda)| \\ &\leq 2\,|f(x) - h(x,\lambda)| \leq 4\,\delta \\ &< \operatorname{dist}\left(f(x)\,,\,Z\right). \end{aligned}$$

Inoltre,

$$\operatorname{dist}\left(H(x,\lambda)\,,\,Z\right) \geq \operatorname{dist}\left(f(x)\,,\,Z\right) - |f(x) - H(x,\lambda)| > 0.$$

Dunque H è un'omotopia Z-ammissibile.

Si verifica inoltre che la definizione data di indice non dipende neppure dalla scelta dell'intorno U di Z. Infatti, se U_1 e U_2 sono sottoinsiemi aperti relativamente compatti di M contenenti $f^{-1}(Z)$, e $g : M \to N$ è sufficientemente vicina a f su $\bar{U}_1 \cap \bar{U}_2$, si ha $g^{-1}(Z) \subset U_1 \cap U_2$. Questa è una conseguenza del fatto che $f(\bar{U}_1 \cup \bar{U}_2 \backslash U_1 \cap U_2)$ è un compatto che non interseca Z.

Le proprietà principali dell'indice d'intersezione sono le seguenti:

Soluzione: Se $\mathrm{in}(f,Z) \neq 0$ allora $f^{-1}(Z) \neq \emptyset$.

Taglio: Se U è un sottoinsieme aperto di M contenente $f^{-1}(Z)$, allora

$$\mathrm{in}(f,Z) = \mathrm{in}(f|_U\,,Z).$$

Additività: Se U_1 e U_2 sono aperti in M, $U_1 \cap f^{-1}(Z)$ e $U_2 \cap f^{-1}(Z)$ sono compatti, e $U_1 \cap U_2 \cap f^{-1}(Z)$ è vuoto, allora

$$\mathrm{in}(f|_{U_1 \cup U_2}\,,Z) = \mathrm{in}(f|_{U_1}\,,Z) + \mathrm{in}(f|_{U_2}\,,Z).$$

Omotopia: Se $H : M \times [0,1] \to N$ è continua e Z-ammissibile (cioè $H^{-1}(Z)$ è compatto), allora $\mathrm{in}\left(H(\cdot,\mu), Z\right)$ non dipende da $\mu \in [0,1]$.

2.3. **Il grado di un campo vettoriale tangente ad una varietà.** Sia $M \subset \mathbb{R}^k$ una varietà differenziabile liscia e senza bordo e $g : U \to \mathbb{R}^k$ un campo vettoriale tangente continuo su un aperto U di M. Se g è *ammissibile* (per il grado) su U, cioè se l'insieme dei suoi zeri è compatto, allora (vedi per esempio [8], [9], [12] e [14]) è possibile assegnare a g un intero, $\deg(g,U)$ chiamato il grado (o indice di Hopf, o caratteristica di Eulero o rotazione) del campo vettoriale tangente su U. Tutte le proprietà usuali del grado di Brouwer dei campi vettoriali sugli aperti degli spazi euclidei sono sempre valide in questo contesto più generale.

Per evitare ogni possibile confusione, sottolineiamo che in letteratura esiste un'altra possibile estensione, al caso delle varietà differenziabili, del grado di Brouwer (vedi [12]) detta grado di Brouwer per applicazioni. In termini semplici, questa seconda estensione, conta (algebricamente) il numero delle soluzioni di un'equazione della forma $h(x) = y$, dove $h : M \to N$ è un'applicazione tra varietà orientate della stessa dimensione e $y \in N$ è tale che $h^{-1}(y)$ è compatto. Questa dicotomia di nozioni è dovuta al fatto che il problema di contare le soluzioni di un'equazione della forma $h(x) = y$, nel caso delle varietà, non può essere ridotto a contare gli zeri di un campo vettoriale, come invece si può fare in $\mathbb{R}^k$ ponendo $g(x) = h(x) - y$.

Il grado di un campo vettoriale tangente può essere definito in termini di indice di intersezione. Sia $g : M \to \mathbb{R}^k$ un campo vettoriale tangente definito su una varietà differenziabile senza bordo $M \subset \mathbb{R}^k$. Denotiamo con $G : M \to TM$ l'applicazione $x \mapsto (x, g(x))$ e con $M_0 = \{(x, 0) \in TM\}$ la sezione nulla di TM. La varietà M può essere identificata in modo naturale con M_0 tramite l'applicazione $p \mapsto (p, 0)$. Dato $p \in G^{-1}(M_0)$, vediamo come T_pM può essere identificato canonicamente con $N_{G(p)}(M_0, TM)$. Chiaramente[3],

$$\begin{aligned} T_{(p,0)}TM &= T_pM \times T_pM \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k, \\ T_{(p,0)}M_0 &= T_pM \times \{0\}. \end{aligned}$$

Dunque, lo spazio ortogonale $N_{(p,0)}(M_0, TM)$ di $T_{(p,0)}M_0$ in $T_{(p,0)}TM$ è lo spazio $\{0\} \times T_pM$, che è una copia naturale di T_pM.

Quanto detto implica che un'orientazione di T_pM ne induce, in modo naturale, una su $N_{(p,0)}(M_0, TM) = N_{G(p)}(M_0, TM)$.

Se g è *ammissibile*, cioè se $g^{-1}(0)$ è compatto, G risulta Z-ammissibile. Possiamo quindi definire

$$\deg(g, M) = \mathrm{in}\,(G\,,\,Z)\,.$$

Il grado di un campo vettoriale tangente eredita le proprietà dell'indice di intersezione che riformuliamo per comodità del lettore.

Soluzione: Se $\deg(g, M) \neq 0$, allora g ha uno zero in M.
Taglio: Se U è un sottoinsieme aperto di M contenente $g^{-1}(0)$, allora

$$\deg(g, M) = \deg(g, U);$$

dove $\deg(g, U)$ indica il grado della restrizione $g|_U$ alla varietà U.
Additività: Se V_1 e V_2 sono aperti di M, $V_1 \cap g^{-1}(0)$ e $V_2 \cap g^{-1}(0)$ sono compatti, e $V_1 \cap V_2 \cap g^{-1}(0)$ è vuoto, allora

$$\deg\,(g, V_1 \cup V_2) = \deg(g, V_1) + \deg(g, V_2).$$

Omotopia: Se $H : M \times [0, 1] \to \mathbb{R}^k$ è un'omotopia ammissibile di campi vettoriali tangenti, cioè, $H(x, s) \in T_xM$ per ogni $(x, s) \in M \times [0, 1]$ e $H^{-1}(0)$ è compatto, allora $\deg\,(H(\cdot, s)\,,\,M)$ non dipende da $s \in [0, 1]$.

Una relazione utile per il calcolo del grado di un campo vettoriale tangente si può ottenere mediante il seguente risultato (vedi per esempio [12]).

[3]Per vederlo, scriviamo $N \subset \mathbb{R}^s$ in un intorno di z come insieme di livello regolare di una opportuna funzione $\phi : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^{s-n}$ di classe C^∞. Si può supporre $N = \{x \in \mathbb{R}^s : \phi(x) = 0\}$. Allora

$$\begin{aligned} TN &= \left\{(q, v) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^s : \phi'(q)v = 0\,,\, \phi(q) = 0\right\}, \\ T_{(z,0)}TN &= \left\{(w_1, w_2) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^s : \phi'(z)w_1 = 0\,, \phi'(z)w_2 = 0\right\} \\ &= T_zN \times T_zN. \end{aligned}$$

Teorema 2.5. *Sia $g : U \to \mathbb{R}^k$ un campo vettoriale tangente di classe C^1 su un aperto U di una varietà differenziabile $M \subset \mathbb{R}^k$. Se $g(p) = 0$ per un $p \in U$, allora la derivata $g'(p) : T_pM \to \mathbb{R}^k$ manda T_pM in sé. Quindi, $g'(p)$ può essere visto come un endomorfismo di T_pM e, conseguentemente, il suo determinante* $\det(g'(p))$ *è ben definito.*

Sia $g : U \to \mathbb{R}^k$ un campo vettoriale tangente di classe C^1 su un aperto U di una varietà differenziabile $M \subset \mathbb{R}^k$, e sia $p \in U$ uno zero di g. Il campo g è detto *non degenere* in p se $g'(p)$, come applicazione da T_pM in sé, è un isomorfismo. In questo caso l'*indice* di p è, per definizione,

$$\mathrm{i}(g,p) = \operatorname{sign}\left(\det g'(p)\right).$$

Nel caso particolare che $g : M \to \mathbb{R}^k$ sia un campo vettoriale di classe C^1, tangente, ammissibile e non degenere, cioè avente soltanto zeri non degeneri, si ha $G \pitchfork M_0$, dove $G(x) = (x\,,\, g(x))$. Inoltre

$$\deg(g,M) = \sum_{p \in g^{-1}(0)} \mathrm{i}(g,p). \tag{2}$$

Questa uguaglianza ha senso in quanto $g^{-1}(0)$ è compatto (essendo g ammissibile) e, come si verifica subito, discreto; quindi la somma che appare nella (2) è estesa ad un insieme finito. L'identità (2) può essere utilizzata come punto di partenza per una definizione di grado indipendente dall'indice di intersezione (vedi ad esempio [12]).

È conveniente definire non soltanto l'indice di uno zero non degenere di un campo vettoriale g ma, più in generale, di un qualsiasi compatto relativamente aperto $Z \subset g^{-1}(0)$ di zeri del campo. In tali condizioni esiste un intorno aperto relativamente compatto U di Z tale che $U \cap g^{-1}(0) = Z$. Si pone

$$\mathrm{i}(g,Z) = \deg(g,U).$$

Ovviamente, per la proprietà del taglio, questa definizione è ben posta.

Consideriamo adesso il caso in cui M sia una varietà con bordo (possibilmente anche $\partial M = \emptyset$). Supponiamo che $g^{-1}(0) \cap (M \backslash \partial M)$ sia compatto. In questo caso, $\deg(g, M\backslash\partial M)$ è ben definito, si dice che g è ammissibile (su M) e si pone

$$\deg(g,M) = \deg(g, M\backslash\partial M).$$

In particolare se M è compatta e g non si annulla su ∂M, allora g è ammissibile. Ciò accade, ad esempio, se g è strettamente esterno lungo ∂M (M compatta). Siano g_1 e g_2 due campi vettoriali tangenti strettamente esterni lungo ∂M; si verifica subito che, se M è compatta, l'omotopia $H(x,s) = (1-s)g_1(x) + sg_2(x)$ è ammissibile, quindi

$$\deg(g_1,M) = \deg(g_2,M).$$

Ha senso quindi definire un intero, detto *caratteristica di Eulero - Poincaré* $\chi(M)$ di M, come il valore comune di tutti i campi vettoriali tangenti ad M che puntano strettamente all'esterno lungo ∂M.

È possibile definire $\chi(M)$ anche mediante la teoria dell'omologia. Se una varietà M è dello stesso tipo di omotopia[4] di un poliedro compatto $|K_M|$, si pone infatti

$$\chi(M) = \chi(K_M) = \sum_{p\geq 0}(-1)^p B_p,$$

dove B_p è il p-esimo numero di Betti del complesso simpliciale K_M.

Il famoso Teorema di Poincaré-Hopf asserisce che le due definizioni di $\chi(M)$, nel caso che M sia compatta coincidono (vedi ad esempio [9]).

2.4. **L'indice di punto fisso.** Sia $M \subset \mathbb{R}^k$ una varietà differenziabile senza bordo e U un suo aperto. Un'applicazione continua $f : U \to M$ è detta *ammissibile* (per l'indice di punto fisso) se l'insieme $\mathrm{Fix}(f) = \{x \in M : x = f(x)\}$ è compatto. In tali condizioni è definito un intero, denotato con $\mathrm{ind}(f, U)$, che, in termini semplici, conta (algebricamente) i punti fissi della f. Tale intero soddisfa tutte le proprietà classiche del grado di Brouwer: soluzione, taglio, adittività, invarianza per omotopia, normalizzazione, etc.. Un'esposizione dettagliata di questo argomento può essere trovata, per esempio su [7], [13] e relativi riferimenti. Sottolineiamo che, se M è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^m$, allora $\mathrm{ind}(f, U)$ è proprio il grado di Brouwer di $I - f$, dove $(I - f)(x) = x - f(x)$.

L'indice di punto fisso è stato studiato da molti autori con le tecniche e nei contesti più disparati. È stato però individuato (vedi per es. [1], [2], [4] e [7]) un insieme di assiomi che lo caratterizzano. Questi corrispondono alle proprietà di *normalizzazione, taglio* e *omotopia*. Per completezza, riteniamo comunque opportuno fornire una definizione di indice di punto fisso basata sulla teoria dell'indice di intersezione.

Data $f : U \to M$, ammissibile su un aperto U di M, definiamo $F : U \to N = M\times M$ ponendo $F(x) = (x, f(x))$ e denotiamo con Δ la diagonale $\{(x, x) \in M\times M\}$ di $M \times M$. Si verifica subito che, se f è ammissibile, F è Δ-ammissibile. Fissato un punto $p \in M$ e data un'orientazione di T_pM attribuiamo un'orientazione allo spazio $N_{(p,p)}(\Delta, M \times M)$ normale a Δ in $M \times M$ come segue. Assegnamo al sottospazio $E_p = T_pM \times \{0\}$ di $T_{(p,p)}(M \times M)$ l'orientazione ereditata da T_pM mediante l'isomorfismo $u \mapsto (u, 0)$. Poiché E_p è un complemento di $T_{(p,p)}\Delta$ in $T_{(p,p)}(M \times M)$, esso è canonicamente isomorfo allo spazio normale $N_{(p,p)}(\Delta, M \times M)$. Conseguentemente, l'orientazione data su E_p ne induce una su $N_{(p,p)}(\Delta, M \times M)$.

In definitiva, se $p \in \mathrm{Fix}(f)$, un'orientazione di T_pM ne induce in modo naturale una su $N_{(p,f(p))}(\Delta, M \times M)$, quindi $\mathrm{in}(F, \Delta)$ è ben definito indipendentemente dall'orientabilità di M ed ha senso porre

$$\mathrm{ind}(f, U) = \mathrm{in}(F, \Delta).$$

Le principali proprietà che caratterizzano l'indice di punto fisso sono le seguenti[5]:

Normalizzazione: Se $f : M \to M$ è costante, allora $\mathrm{ind}(f, U) = 1$.

Additività: Se $f : U \to M$ è ammissibile e V_1 e V_2 sono aperti disgiunti di U tali che $\mathrm{Fix}(f) \subset V_1 \cup V_2$, allora

$$\mathrm{ind}(f, U) = \mathrm{ind}(f, V_1) + \mathrm{ind}(f, V_2).$$

[4]Due spazi topologici A e B si dicono dello stesso tipo di omotopia se esistono $f : A \to B$ e $g : B \to A$ tali che $f \circ g$ e $g \circ f$ sono omotope rispettivamente alle identità su A e su B.

[5]Si può infatti provare che l'indice di punto fisso è caratterizzato dalle prime tre: Normalizzazione, Additività e Omotopia.

Omotopia: Se $H : U \times [0,1] \to M$ è un'omotopia ammissibile, cioè tale che l'insieme $\{x \in U : H(x,s) = x \text{ per qualche } s \in [0,1]\}$ è compatto, allora $\mathrm{ind}\,(H(\cdot,s)\,,U)$ non dipende da $s \in [0,1]$.

Dalle suddette tre proprietà ne discendono facilmente altre due:
Esistenza: Se $f : U \to M$ è ammissibile e $\mathrm{ind}(f,M) \neq 0$, allora $\mathrm{Fix}(f) \neq \emptyset$.
Taglio: Se $f : U \to M$ è ammissibile e V e U sono aperti di M tali che $\mathrm{Fix}(f) \subset V \subset U$, allora $\mathrm{ind}(f,V) = \mathrm{ind}(f,U)$.

L'indice di punto fisso può anche essere usato per dare un'ulteriore definizione di grado di un campo vettoriale tangente C^1. Si può infatti provare che sussiste una relazione tra l'indice di punto fisso del flusso locale indotto da un campo vettoriale C^1 e il grado di quest'ultimo (vedi [5]). Più precisamente, dato un campo vettoriale $g : M \to \mathbb{R}^k$, di classe C^1, tangente ad $M \subset \mathbb{R}^k$, possiamo considerare il problema di Cauchy in M

$$\begin{cases} \dot{x} = g(x) \\ x(0) = p\,. \end{cases} \tag{3}$$

Fissato $\tau > 0$, denotiamo con D_τ l'insieme dei punti $p \in M$ tali che la soluzione di (3) è prolungabile (almeno) fino a $t = \tau$. Sia $\Phi_\tau : D_\tau \to M$ l'operatore di traslazione di Poincaré che associa ad ogni $p \in D_\tau$ il valore al tempo τ della soluzione di (3). Si può provare che D_τ è un insieme aperto in M e che Φ_τ è un'applicazione di classe C^1.

Se U è un aperto relativamente compatto di M tale che $g^{-1}(0) \cap \mathrm{Fr}U = \emptyset$, esiste una costante positiva $\varepsilon = \varepsilon(U)$ tale che $\Phi_\tau(p) \neq p$ per $p \in \partial U$, $0 < |\tau| \leq \varepsilon$. Questo ci permette di affermare che l'indice di punto fisso di Φ_τ è ben definito per $\tau \in (-\varepsilon, 0)$ e $\tau \in (0,\varepsilon)$. Inoltre per la proprietà di invarianza per omotopia, $\mathrm{ind}(\Phi_\tau, U)$ è indipendente da τ in ognuno dei due intervalli $(-\varepsilon, 0)$ e $(0,\varepsilon)$.

Oltre a ciò si può provare che

$$\deg(g,U) = \lim_{\tau \to 0^-} \mathrm{ind}(\Phi_\tau, U). \tag{4}$$

Quest'identità (che è anche una delle possibili definizioni di grado di un campo vettoriale tangente di classe C^1) è molto importante per determinare una relazione tra il grado di un campo vettoriale e l'indice di punto fisso del flusso locale ad esso associato. Vale infatti il seguente risultato ([6])

Teorema 2.6. *Sia $g : M \to \mathbb{R}^k$ come sopra e sia U un aperto relativamente compatto di M. Fissiamo $T > 0$ e supponiamo che per ogni $p \in \overline{U}$ la soluzione del problema di Cauchy (3) sia definita su $[0,T]$. Allora, se Φ_T è privo di punti fissi su* $\mathrm{Fr}(U)$*,*

$$\mathrm{ind}(\Phi_T, U) = \deg(-g, U).$$

Riferimenti bibliografici

[1] Amann H. – Weiss S., *On the Uniqueness of the Topological Degree*, Math. Z. 130(1973), 37-54.
[2] Brown R.F., *An elementary proof of the uniquenes of the fixed point index*, Pacific J. Math. 35(1970), 549-558.
[3] Dold A., *Fixed point index and fixed point theorems for euclidean neighborhood retracts,* Topology 4(1965), 1-8.
[4] Führer L., *Theorie des Abbildungsgrades in endlichdimensionalen Raümen*, Inaugural Dissertation, Freie Universität Berlin 1971.

[5] Furi M. – Pera M. P., *A continuation principle for forced oscillations on differentiable manifolds*, Pacific J. of Math. 121(1986), 321-338.

[6] Furi M. – Spadini M., *On the fixed point index of the flow and applications to periodic solutions of differential equations on manifolds,* Boll. Un. Mat. Ital. vol. 10-A (1996), 333-346.

[7] Granas A., *The Leray-Schauder index and the fixed point theory for arbitrary ANR's*, Bull. Soc. Math. France 100 (1972), 209-228.

[8] Guillelmin V. – Pollack A., *Differential Topology*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1974.

[9] Hirsch M.W., *Differential Topology*, - Graduate Text in Math., Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[10] Leray J. – Schauder J., *Topologie et équations fonctionelles*, Ann. Sci. École Normale Sup. (3) 51 (1934), 45-78.

[11] Lloyd N.G., *Degree Theory*, Cambridge Tracts in Math. 73, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1978.

[12] Milnor J.W., *Topology from the differentiable viewpoint*, Univ. Press of Virginia 1965.

[13] Nussbaum R.D., *The fixed point index and fixed point theorems, in Topological Methods for Ordinary Differential Equations*, Lecture Notes in Math. n.1537, Springer-Verlag, Berlin, 1993, 143-205.

[14] Tromba A.J., *The Euler characteristic of vector fields on Banach manifolds and a globalizzation of Leray-Schauder degree*, Adv. in Math. 28(1978), 148-173.