Perturbazioni periodiche di equazioni differenziali ordinarie su varietà differenziabili

Marco Spadini

1. – Motivazione e formulazione del problema

I metodi topologici spesso si rivelano uno strumento insostituibile per affrontare problemi non lineari che appartengono a rami diversi dell'analisi. In particolare essi sono essenziali nello studio dei problemi di esistenza e molteplicità di soluzioni periodiche di EDO.

Una menzione particolare è dovuta ai cosiddetti principi di continuazione, per una rassegna si veda [5]. In parole povere, l'idea del metodo di continuazione consiste nello studiare un'equazione modificandola con continuità in una più semplice. In pratica, data un'equazione, la si immerge in una famiglia ad un parametro di equazioni del tipo $F(x,\lambda) = x$ tale che $F(x,1) = x$ risulti l'equazione originale e $F(x,0) = x$ sia semplice da studiare. Tuttavia, per poter ottenere informazioni utili sull'equazione di partenza si deve conoscere il comportamento delle soluzioni delle equazioni "intermedie" $F(x,\lambda) = x$.

Un problema tipico è studiare le soluzioni armoniche in $\mathbf{R}^n$ di un'equazione differenziale del tipo $\dot{x} = \phi(t,x)$ dove ϕ è continua e T-periodica in t. Un possibile approccio consiste nel ridurre questo problema ad un'equazione funzionale equivalente ed applicare il metodo di continuazione a quest'ultima. Tuttavia se rimpiazziamo $\mathbf{R}^n$ con una varietà differenziabile M, ciò non dà buoni frutti. Al contrario, l'operatore (di Poincaré) di traslazione lungo le traiettorie permette di ridurre il problema ad uno di punto fisso su M a cui il metodo di continuazione è applicabile. Le tecniche usate sono ispirate principalmente al lavoro di M.A. Krasnosel'skii [4].

Prendendo lo spunto dal metodo di continuazione, studiamo l'insieme delle soluzioni armoniche della famiglia di equazioni

$$\dot{x} = g(x) + \lambda f(t,x)\ ,\ \ \lambda \geq 0\,, \tag{1}$$

dove g ed f sono campi vettoriali tangenti ad M, con f T-periodico in t. Ciò ci permetterà di ottenere risultati sull'esistenza e, soprattutto, sulla molteplicità delle soluzioni armoniche di perturbazioni periodiche di equazioni differenziali autonome con particolare riguardo alle piccole perturbazioni.

Una classe particolarmente importante di problemi che possono essere ricondotti ad equazioni del tipo (1) è lo studio delle oscillazioni forzate di un sistema meccanico vincolato. Infatti, le equazioni di secondo ordine che li schematizzano sulla varietà che rappresenta il vincolo possono essere scritte nella forma (1) sul fibrato tangente.

2. – Risultati principali

Se $M \subset \mathbf{R}^k$ è una varietà differenziabile, denotiamo con $C_T(M)$ il sottospazio metrico dello spazio di Banach $C_T(\mathbf{R}^k)$ costituito da tutte le funzioni continue e T-periodiche $x : \mathbf{R} \to M$.

Diciamo che $(\lambda, x) \in [0, \infty) \times C_T(M)$ è una T-coppia se x soddisfa (1). Se $\lambda = 0$ e x è costante, allora (λ, x) è detta *banale*. Denotiamo con X il sottoinsieme di $[0, \infty) \times C_T(M)$ formato da tutte le T-coppie.

Per semplicità identificheremo ogni spazio con la sua immagine nel seguente diagramma di immersioni naturali:

$$\begin{array}{ccc} [0,\infty)\times M & \longrightarrow & [0,\infty)\times C_T(M) \\ \uparrow & & \uparrow \\ M & \longrightarrow & C_T(M) \end{array} \quad .$$

In particolare, ogni punto $p \in M$ sarà identificato con l'applicazione $\hat{p} \in C_T(M)$ costantemente uguale a p. Inoltre vedremo M come la sezione $\{0\} \times M$ di $[0, \infty) \times M$ e, analogamente, $C_T(M)$ come $\{0\} \times C_T(M)$.

Siamo ora in grado di enunciare il risultato chiave di tutto il lavoro. Esso ci fornisce un'informazione importante sull'insieme delle T-coppie della (1).

Teorema **2.1** *Siano $f : \mathbf{R} \times M \to \mathbf{R}^k$ e $g : M \to \mathbf{R}^k$ campi vettoriali tangenti ad una varietà differenziabile (senza bordo) $M \subset \mathbf{R}^k$, con f T-periodico nella prima variabile. Sia Ω un sottoinsieme aperto di $[0, \infty) \times C_T(M)$, e supponiamo che* $\deg(g, \Omega \cap M)$ *sia ben definito e non zero. Allora in Ω esiste un insieme connesso Γ di T-coppie non banali, la cui chiusura in $[0, \infty) \times C_T(M)$ incontra (emana da) $g^{-1}(0) \cap \Omega$ e non è contenuta in nessun sottoinsieme compatto di Ω. In particolare, se M è chiuso in $\mathbf{R}^k$ e $\Omega = [0, \infty) \times C_T(M)$, allora Γ è illimitato.*

Qui 'deg' denota il grado (detto anche indice, o caratteristica di Eulero, o rotazione) di un campo vettoriale tangente; da non confondere con il grado di un'applicazione.

La dimostrazione di questo teorema, la cui tecnica è ispirata a [2] e [3], è assai articolata ed è basata sulla determinazione di una formula, valida per le varietà differenziabili, che lega il grado di un campo vettoriale tangente con l'indice di punto fisso dell'operatore di traslazione di Poincaré ad esso associato (quando definito). Nel caso $M = \mathbf{R}^m$, tale formula, la cui origine può essere fatta risalire a Krasnosel'skii [4], è stata ottenuta in [1] con altri metodi.

Per comprendere il significato del Teorema 2.1, consideriamo per esempio il caso in cui $M = \mathbf{R}^m$. Se $g^{-1}(0)$ è compatto e $\deg(g, \mathbf{R}^m) \neq 0$, allora esiste un insieme illimitato e connesso di T-coppie (in $[0, \infty) \times C_T(\mathbf{R}^m)$) che emana da $g^{-1}(0)$. L'esistenza di questo "ramo" illimitato non può essere distrutta da una particolare scelta di f. Comunque, esso può risultare contenuto in $\{0\} \times C_T(M)$, come accade nel seguente semplice esempio in $\mathbf{R}^2$, dove $T = 2\pi$:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + \lambda \sin t \, . \end{cases}$$

Un'altra conseguenza diretta del Teorema 2.1 si ha quando $M \subset \mathbf{R}^k$ è una varietà compatta e senza bordo con $\chi(M) \neq 0$ e $\Omega = [0, \infty) \times C_T(M)$. In questo caso, per il teorema di Poincaré-Hopf, $\deg(g, M) = \chi(M)$. Quindi esiste un insieme illimitato e connesso di T-coppie in $[0, \infty) \times C_T(M)$ che emana da $g^{-1}(0)$.

3. – Applicazioni

Il Teorema 2.1 può essere applicato ad una grande varietà di situazioni. Le applicazioni più immediate sono, naturalmente, i principi di continuazione. Ad esempio si prova il seguente (si confronti con [1]).

Teorema **3.1** *Siano $f : \mathbf{R} \times M \to \mathbf{R}^k$ e $g : M \to \mathbf{R}^k$ campi vettoriali tangenti ad una varietà differenziabile (con eventuale bordo) $M \subset \mathbf{R}^k$, con f T-periodico nella prima variabile. Sia W un aperto di $C_T(M)$ limitato con chiusura completa tale che:*

1. *L'insieme $\Big\{ g\left(x(t)\right) + \lambda f\left(t, x(t)\right) \in \mathbf{R}^k : x \in W,\ t \in [0, T],\ \lambda \in [0, 1] \Big\}$ è limitato.*

2. *Per ogni $\lambda \in [0, 1]$, l'equazione (1) non ha soluzioni nell'insieme*

$$\mathrm{Fr}(W) \cup \{x \in W : x\left([0, T]\right) \cap \partial M \neq \emptyset\}.$$

3. *Il grado $\deg(g, W \cap M)$ è non zero.*

Allora l'equazione $\dot{x} = g(x) + f(t, x)$ ha una soluzione in W.

Questo teorema permette di ottenere dei risultati nello spirito del metodo delle *guiding functions* introdotto da Krasnosel'skii (si veda ad es. [4] e [5]). Tra questi citiamo:

Teorema **3.2** *Sia $F : \mathbf{R} \times M \to \mathbf{R}^k$ un campo vettoriale T-periodico, tangente ad una varietà differenziabile completa $M \subset \mathbf{R}^k$, con $\chi(M) \neq 0$. Supponiamo che esista un'applicazione $V : M \to \mathbf{R}$ di classe C^1, propria, limitata inferiormente, ed un numero reale ρ tale che $\mathrm{grad}V(p) \neq 0$ in $M \backslash V^{-1}(-\infty, \rho)$ e che*

$$\langle \mathrm{grad}V(p), F(t, p) \rangle \geq 0,$$

per ogni $t \in [0, T]$ e per ogni $p \in V^{-1}(\rho)$. In questo caso l'equazione $\dot{x} = F(t, x)$ ha una soluzione T-periodica in $V^{-1}\left((-\infty, \rho]\right)$.

Nello stesso spirito dei risultati appena esposti il Teorema 2.1 permette di studiare l'esistenza di soluzioni armoniche per piccole perturbazioni periodiche di equazioni autonome. Tuttavia le conseguenze più interessanti sono i risultati di molteplicità per piccole perturbazioni ottenibili combinando uno studio locale dei "punti di emanazione" con le proprietà globali dei connessi di T-coppie forniti dal Teorema 2.1.

Particolarmente rilevanti sono le applicazioni di tali risultati alle equazioni di secondo ordine su varietà. In particolare è possibile provare un risultato generale di molteplicità per le oscillazioni forzate del pendolo sferico. Per semplicità ne citiamo soltanto il seguente corollario, data la sua rilevanza fisica.

Teorema **3.3** *Dato un campo vettoriale T-periodico, $f : \mathbf{R} \times TS \to \mathbf{R}^3$, tangente ad una sfera S di raggio ρ, esiste un $\lambda_f > 0$ tale che per $\lambda \in [0, \lambda_f]$ l'equazione*

$$m\,\ddot{x} = -\frac{m\,|\dot{x}|^2}{\rho^2}x + \gamma_{\mathbf{g}}(x) - \eta\dot{x} + \lambda f(t, x, \dot{x}),$$

dove $\gamma_{\mathbf{g}}(p)$ denota la componente tangenziale della forza di gravità nel punto p e $\eta \geq 0$, ha almeno due soluzioni T-periodiche con immagine distinta.

Notiamo che questo risultato non è ottenibile né con metodi variazionali né tramite il teorema delle funzioni implicite.

Riferimenti bibliografici

[1] Capietto A., Mawhin J. e Zanolin F., *Continuation Theorems for Periodic Perturbations of Autonomous Systems*, Trans. Amer. Math. Soc. **329** (1992), 41–72.

[2] Furi M. e Pera M. P., *A continuation principle for forced oscillations on differentiable manifolds*, Pacific J. of Math. **121** (1986), 321–338.

[3] Furi M. e Pera M. P., *A continuation principle for periodic solutions of forced motion equations on manifolds and applications to bifurcation theory,* Pacific J. of Math. **160** (1993), 219–244.

[4] Krasnosel'skii M.A., *Translation along trajectories of differential equations*, Transl. Math. Monographs vol. 19, Amer. Math. Soc. Providence R.I., 1968.

[5] Mawhin J., *Continuation theorems and periodic solutions for ordinary differential equations,* Proc. Conf. on Topological Methods in Differential Equations and Inclusions, Université de Montréal, 1994, NATO-ASI series C, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht NL.

Indirizzo: Dipartimento di Matematica 'U.Dini', Viale Morgagni 67/a, 50134 Firenze
e-mail: spadini@udini.math.unifi.it

Consorzio delle università di Cagliari, Firenze, Modena, Perugia e Siena
Ciclo viii, **Sede:** Firenze, **Settore:** Analisi Matematica e Probabilità
Direttore della ricerca: Prof. Massimo Furi