Calcolo delle Probabilità e Statistica

Alcuni esercizi

Laura Poggiolini

Dipartimento di Matematica Applicata Giovanni Sansone

Università di Firenze

Indice

1 Probabilità: esercizi vari

1.1. Combinatorica e probabilità uniforme

Esercizio 1.1.1. Si lancia una moneta non truccata per n volte e, ogni volta, si guarda se esce testa o croce. Quanti sono i possibili risultati dopo n lanci?

Esercizio 1.1.2. Un lucchetto ha una combinazione di 4 cifre, da 0 a 9. Quante sono le possibili combinazioni del lucchetto? Se imponiamo che ogni cifra debba essere strettamente maggiore della precedente, quante combinazioni possibili ci sono nel lucchetto?

Esercizio 1.1.3. Quanti sono i possibili anagrammi della parola `matematica`? E della parola `ingegneria`?

Esercizio 1.1.4. $2n$ persone si devono dividere in 2 squadre, di n persone ciascuna. In quanti modi è possibile farlo?

Esercizio 1.1.5. Quante diagonali ha un poligono convesso di n lati?

Esercizio 1.1.6. La SST (Società Spaziale per le Telecomunicazioni) gestisce le comunicazioni tra i diversi pianeti. Affinché il sistema di comunicazione interplanetaria funzioni, è necessario assegnare un codice binario di n cifre a ciascun pianeta. Se la SST gestisce k pianeti, di quanti caratteri binari devono essere composti questi codici?

Esercizio 1.1.7. Lancio due dadi non truccati. Quanto vale la probabilità di ottenere almeno un "6"? Quanto vale la probabilità di ottenere due "6"? Mi dicono che è uscito almeno un "6", quanto vale ora la probabilità di aver ottenuto due "6"?

Esercizio 1.1.8. Un'urna contiene 10 palline bianche, numerate da 1 a 10. Una seconda urna contiene 20 palline rosse, numerate da 1 a 20. Estraggo una pallina dalla prima urna ed una pallina dalla seconda urna.

1. Quanto vale la probabilità di estrarre due palline con lo stesso numero?
2. Quanto vale la probabilità di estrarre due palline pari?

$[\frac{1}{20}, \frac{1}{4}]$

Esercizio 1.1.9. Un'urna contiene 20 palline, numerate da 1 a 20. Estraggo due palline. Quanto vale la probabilità di estrarre due palline pari?

$[\frac{9}{38}]$

Esercizio 1.1.10. Un'urna contiene 20 palline, numerate da 1 a 20. Estraggo tre palline. Quanto vale la probabilità di estrarre due palline pari ed una pallina dispari?

$[\frac{15}{38}]$

Esercizio 1.1.11. Un'urna contiene 20 palline bianche, 30 palline rosse, 10 palline verdi e 40 palline nere. Estraggo 10 palline.
Quanto vale la probabilità di aver estratto: 2 palline bianche, 3 palline rosse, 1 pallina verde e 4 palline nere?

$[\simeq 0.041]$

Esercizio 1.1.12. Giochiamo a poker con un mazzo da 28 carte.

1. Quanto vale la probabilità di ricevere un poker d'assi servito? E di ricevere un poker qualsiasi?
2. È più probabile ricevere un poker, un full o un colore?
3. Quanto vale la probabilità di ricevere un poker d'assi ed una picche (oltre l'asso)?
4. Rispondere ai quesiti dei punti precedenti supponendo di giocare con un mazzo da 32 carte o con un mazzo da 36 carte.

Esercizio 1.1.13. L'alfabeto marziano è composto da 999 caratteri. La Commissione per le Comunicazioni Intergalattiche ha deciso che tale alfabeto deve essere ridotto a 256 caratteri. Quanti alfabeti sono possibili?

Ooops! Dopo il ricorso del popolo marziano al TAI (Tribunale Amministrativo Intergalattico), alla commissione viene imposto di conservare 99 caratteri del vecchio alfabeto che vengono ritenuti essenziali. Quanti alfabeti di complessivi 256 caratteri sono ora possibili? Quanto vale la probabilità che un alfabeto creato a caso senza vincolo, in realtà lo rispetti?

Esercizio 1.1.14. Al telefono componiamo 6 cifre a caso. Calcolare la probabilità dei seguenti eventi:

1. le 6 cifre sono tutte diverse,
2. il prodotto delle 6 cifre è un numero divisibile per 2,
3. il prodotto delle 6 cifre è un numero divisibile per 3,
4. il prodotto delle 6 cifre è un numero divisibile per 6,
5. le 6 cifre sono in ordine strettamente crescente.

1.2. Probabilità condizionata e indipendenza

Esercizio 1.2.1. Siano A, B, C una terna di eventi indipendenti in uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Dimostrare che A e $B \cup C$ sono indipendenti.

Esercizio 1.2.2. Un sistema di comunicazione ninaria trasmette (e riceve) solo i caratteri "0" e "1". Supponiamo che il 45% delle volte venga trasmesso il carateere "1". La probabilità che il carattere "1" sia ricevuto correttamente è del 98%. La probabilità che il carattere "0" sia ricevuto correttamente è del 95%.

1. Calcolare la probabilità che sia ricevuto il carattere "1",
2. Sapendo che è stato ricevuto il carattere "1", calcolare la probabilità che sia stato trasmesso il carattere "1".
3. Sapendo che è stato ricevuto il carattere "0", calcolare la probabilità che sia stato trasmesso il carattere "0".

Esercizio 1.2.3. Una moneta, forse truccata (esce testa con probabilità p) viene lanciata 100 volte. Determinare le probabilità dei seguenti eventi:

1. al decimo lancio esce testa,
2. al decimo lancio esce testa e al primo lancio esce croce,
3. escono esattamente 8 teste,
4. escono almeno 8 teste,
5. esce croce a tutti i tiri pari,
6. esce croce in almeno un tiro pari,
7. la prima croce esce al k–esimo lancio.

Esercizio 1.2.4. Su un tratto della FI–PI–LI la probabilità di incidente al minuto per guida spericolata è di 10^{-3}. La probabilità di incidente al minuto per guasto meccanico è di 10^{-5}. Supponiamo che le due cause di incidente siano indipendenti l'una dall'altra.

1. Calcolare la probabilità di incidente al minuto su quel tratto della FI–PI–LI,
2. Se gli incidenti in minuti diversi sono indipendenti, qual è la probabilità di non avere incidenti in tutto l'anno?
3. Se gli incidenti in minuti diversi sono indipendenti, qual è la probabilità di non avere più di dieci incidenti all'anno?

Esercizio 1.2.5. Un'urna contiene una palla bianca, una palla rossa e una palla nera. Si compiono n estrazioni di una palla alla volta, reinserendo, dopo ciascuna estrazione, la palla nell'urna. Calcolare la probabilità dei seguenti eventi

1. estraggo sempre la palla bianca,
2. estraggo sempre la stessa palla,
3. non estraggo mai la palla rossa,
4. estraggo ciascuna palla almeno una volta.

Esercizio 1.2.6. Un'urna contiene una palla bianca, 2 palle rosse e 3 palle nere. Si compiono n estrazioni di una palla alla volta, reinserendo, dopo ciascuna estrazione, la palla nell'urna. Calcolare la probabilità dei seguenti eventi

1. estraggo sempre palle nere,
2. estraggo sempre palle dello stesso colore,
3. non estraggo mai la palla bianca,
4. estraggo palle di tutti e tre i colori.

Esercizio 1.2.7. Un telefono guasto squilla in un momento a caso nell'arco di 10 ore. Calcolare la probabilità che squilli in un momento compreso tra la quarta e la settima ora. Sapendo che non squillerà nelle prossime cinque ore, calcolare la probabiulità che squilli in un momento compreso tra la quarta e la settima ora.

1.3. Variabili aleatorie

Esercizio 1.3.1. Lanciamo due dadi non truccati. Dopo aver definito uno spazio di probabilità opportuno, dire quali sono i possibili valori che le seguenti variabile aleatoria possono assumere:

X_1 il punteggio minimo tra i due punteggi,
X_2 il punteggio massimo tra i due punteggi,
X_3 la somma dei due punteggi,
X_4 la differenza tra il punteggio massimo ed il punteggio minimo.

Per ciascuna delle precedenti variabile aleatoria scrivere la densità discreta e la funzione di ripartizione. Tracciare i grafici delle funzioni di ripartizione.

Esercizio 1.3.2. Lancio una moneta n volte. Supponiamo che ogni lancio sia indipendente e che ad ogni lancio la probabilità che esca testa sia p. Sia X la variabile aleatoria che descrive la differenza tra il numero di teste ed il numero di croci che si ottengono negli n lanci.

1. introdurre un opportuno spazio di probabilità e scrivere X,
2. chi è l'insieme immagine di X?
3. a partire dalla densità binomiale di parametri n e p, $B(n,p)$, calcolare la densità di X.

Esercizio 1.3.3. Sia X una variabile aleatoria di Poisson di parametro λ. Calcolare $\mathbb{P}(X \text{ è pari})$ e $\mathbb{P}(X \text{ è dispari})$.

Esercizio 1.3.4. 1. Per ogni fissato λ parametro reale positivo studiare l'andamento della successione

$$p\colon k \in \mathbb{N} \mapsto \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \in \mathbb{R}.$$

È monotona? Ammette massimo? Ammette minimo?

2. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ fissato, studiare l'andamento della funzione

$$f\colon \lambda \in (0, +\infty) \mapsto \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \in \mathbb{R}.$$

È monotona? Ammette massimo? Ammette minimo?

Esercizio 1.3.5. Supponiamo che il numero di incidenti giornalieri che avvengono ogni giorno sul tratto di autostrada Firenze–Bologna si distribuisca come una variabile aleatoria di Poisson di parametro $\lambda = 4$.

1. Qual è la probabilità che oggi accadano 3 incidenti?
2. Qual è la probabilità che oggi accadano almeno 3 incidenti?
3. Qual è la probabilità che oggi accadano almeno 3 incidenti, sapendo che ce n'è sicuramente uno?
4. Qual è la probabilità che accadono 3 incidenti, sapendo che non ne possono accadere più di 10?

Esercizio 1.3.6. Consideriamo una particella che si muove sul piano Oxy nel seguente modo:

1. al tempo $t = 0$ si trova nell'origine;
2. ad ogni tempo $t = i$ si può spostare in uno dei quattro seguenti modi

a) di una unità verso l'alto con probabilità p_A,
b) di una unità verso il basso con probabilità p_B,
c) di una unità verso destra con probabilità p_D,
d) di una unità verso sinistra con probabilità p_S.

Calcolare la probabilità che al tempo $t = k$ la particella torni nell'origine.

Esercizio 1.3.7. Lanciamo una moneta in cui esce testa con probabilità p. È più probabile ottenere almeno una testa in due lanci o almeno due teste in quattro lanci?

Esercizio 1.3.8. Siano α e λ parametri reali positivi. Mostrare che la funzione $f\colon x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) := \begin{cases} c\, x^{\alpha-1}\, \mathrm{e}^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

è densità di una variabile aleatoria continua X se e solo se

$$c = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \quad \text{dove} \quad \Gamma(\alpha) := \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x.$$

Provare che per $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ si ha $\Gamma(n) = (n-1)!$

Esercizio 1.3.9. Sia X una variabile aleatoria di densità continua f. Per $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, scrivere la funzione di ripartizione e la densità della variabile aleatoria $Y := X^k$.

1.4. Densità condizionale

Esercizio 1.4.1. Siano X e Y variabili aleatorie indipendenti. Supponiamo che X abbia densità $B(n,p)$ e che Y abbia densità $B(k,p)$. Calcolare $p_{X|X+Y}(\cdot, j)$, $j = 0, 1, \ldots, k$.

Esercizio 1.4.2. Siano $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variabili aleatorie indipendenti, tutte di densità $B(1,p)$. Sia $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Calcolare $p_{X_i|Y}(\cdot, j)$, $j = 0, 1, \ldots, n$.

Esercizio 1.4.3. Sia

$$p \colon (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{cases} \dfrac{c}{x+2y} & x,\ y = 1, 2, 3 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Determinare c in modo che p sia una densità. Sia (X,Y) una variabile aleatoria avente p come propria densità. Calcolare $\mathbb{P}(X^2 + Y^2 < 6)$, calcolare le densità marginali di (X,Y). Calcolare $\mathbb{P}(X = 3 | Y > 1)$.

Esercizio 1.4.4. Sia (X,Y) una variabile aleatoria bidimensionale la cui densità congiunta è la distribuzione uniforme sul triangolo di vertici $(0,0)$ $(a,0)$, $(0,a)$, a parametro reale positivo. Calcolare le densità marginali.

Esercizio 1.4.5. Al variare di $\alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ determinare il valore della costante C per cui la funzione $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ che vale $Cy^2\mathrm{e}^{-x}$ se il punto (x,y) appartiene all'angolo convesso determinato dalle due semirette che formano angoli α e $-\alpha$ con la direzione positiva dell'asse dell'ascisse e che vale 0 altrimenti, sia densità congiunta di una variabile aleatoria (X,Y). Calcolare poi le densità marginali di tale variabile aleatoria

Esercizio 1.4.6. Mario e Giovanni hanno fissato di incontrarsi alla macchinetta del caffè tra mezzogiorno e il tocco. Hanno anche fissato di non aspettarsi l'un l'altro per più di 15 minuti. Supponendo che gli orari di arrivo alla macchinetta del caffè di Mario e Giovanni siano indipendenti ed entrambi uniformemente distribuiti, calcolare la probabilità che Mario e Giovanni si incontrino alla macchinetta del caffè. $[\frac{7}{16}]$

Esercizio 1.4.7. Siano a, b parametri positivi. Supponiamo che X e Y siano v.a. congiuntamente continue con densità

$$f(x,y) = \begin{cases} C \exp(-ax) \exp(-by) & \text{se } x > 0 \text{ e } y > 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

1. Determinare il valore di C,
2. calcolare la funzione di ripartizione congiunta,
3. calcolare le densità marginali,
4. calcolare $\mathbb{P}(Y \leq X)$.

[1. ab, 4. $\frac{b}{a+b}$]

Esercizio 1.4.8. Siano U e V v.a. indipendenti. Calcolare le funzioni di ripartizione delle v.a. $W := \max(U, V)$ e $Y := \min(U, V)$ in termini delle funzioni di ripartizione di U e di V.

Esercizio 1.4.9. Una moneta ed un dado vengono lanciati insieme ripetutamente. Qual'è la probabilità che la moneta dia testa prima che il dado dia "6"? Si supponga che il dado e la moneta non siano truccati. [$\frac{5}{7}$]

1.5. Speranza e varianza

Esercizio 1.5.1. Sia

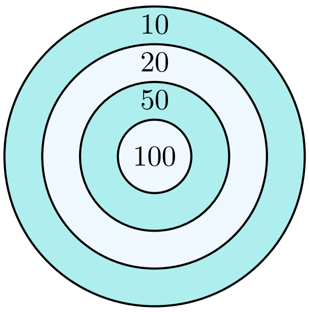
$$p\colon x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \dfrac{c}{x+1} & x = 0, 1, 2, 3, 4 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Determinare c in modo che p sia una densità. Sia X una variabile aleatoria avente p come propria densità. Calcolare $\mathbb{P}(X < 2)$, $\mathrm{E}[X]$, $\mathrm{Var}(X)$.

Esercizio 1.5.2. In una scatola di 10 gomitoli di lana, ce ne sono 6 bianchi e 4 colorati. Si estraggono i gomitoli dalla scatola uno alla volta, senza reiscatolarli. Qual è la probabilità di estrarre il primo gomitolo colorato all'i–esimo tentativo? A quale tentativo devo aspettarmi di estrarre il primo gomitolo colorato? Con quale varianza?

Esercizio 1.5.3. Il sistema antiincendio di un supermercato è costituito da sei sensori. L'assicurazione copre eventuali danni causati da un incendio se almeno quattro dei sei sensori funzionano. Supponiamo che ogni sensore funzioni, indipendentemente dagli altri, con probabilità dell'80%. Con quale probabilità siamo coperti dall'assicurazione? Quanti sensori ci aspettiamo che funzionino?

Esercizio 1.5.4. Si consideri il seguente bersaglio:



Tiro una freccia contro il bersaglio e ottengo un certo punteggio a seconda della zona colpita, come indicato in figura. Supponendo di non mancare il bersaglio, qual è il punteggio medio atteso? La varianza dei punteggi?

Esercizio 1.5.5. Una variabile aleatoria continua X ha densità

$$f\colon x \in \mathbb{R} \mapsto c\,|x|\exp^{-ax^2} \in \mathbb{R}$$

dove a è un parametro reale positivo. Determinare il valore di c in funzione di a. Calcolare la speranza matematica e la varianza di X.

Esercizio 1.5.6. Sia X una variabile aleatoria continua di densità

$$f\colon x \in \mathbb{R} \mapsto c(1+x^2)^{-1} \in \mathbb{R}$$

Determinare il valore di c. Calcolare la funzione di ripartizioneF_X. Calcolare la densità di $Y := X^{-1}$. Calcolare speranza e varianza di X e Y.

Esercizio 1.5.7. Sia X una variabile aleatoria continua non negativa di densità f e funzione di ripartizione F. Dimostrare che

$$E[X] = \int_0^{+\infty} (1 - F(x))\mathrm{d}x$$

e che

$$E[X^k] = \int_0^{+\infty} kx^{k-1}(1 - F(x))\mathrm{d}x$$

Esercizio 1.5.8. Sia X una variabile aleatoria che assume valori solo nell'intervallo $[0, a]$ e di densità f. Mostrare ch $\mathrm{Var}(X) \leq \left(\frac{a}{2}\right)^2$.

Esercizio 1.5.9. Il quantile $q_{\frac{1}{2}}$ (se è definito) di una variabile aleatoria X si dice *mediana* di X. I quantili $q_{\frac{1}{4}}$ e $q_{\frac{3}{4}}$ (se sono definiti) di una variabile aleatoria X si dicono *quartili* di X. Calcolare mediana e quartili delle seguenti variabile aleatoria

1. X variabile aleatoria uniformemente distribuita su un intervallo (a, b);
2. X variabile aleatoria normale di parametri μ e σ^2;
3. X variabile aleatoria esponenziale di parametro λ.

Esercizio 1.5.10. Un *valore modale* di una variabile aleatoria continua X con densità $f\colon x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$ è un punto di massimo di f. Calcolare i valori modali delle seguenti variabile aleatoria

1. X variabile aleatoria uniformemente distribuita su un intervallo (a, b);
2. X variabile aleatoria normale di parametri μ e σ^2;
3. X variabile aleatoria esponenziale di parametro λ.

Esercizio 1.5.11. La *funzione di rischio* di una variabile aleatoria continua X con densità $f\colon x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$ è definita come

$$\lambda(x) := \begin{cases} \dfrac{f(x)}{1 - F_X(x)} & F_X(x) < 1 \\ 0 & F_X(x) = 1. \end{cases}$$

1. Calcolare la funzione di ripartizione e la densità in funzione della sola funzione di rischio

2. Calcolare la funzione di rischio delle seguenti variabile aleatoria

   a) X variabile aleatoria uniformemente distribuita su un intervallo (a, b);

   b) X variabile aleatoria normale di parametri μ e σ^2;

   c) X variabile aleatoria esponenziale di parametro λ.