$$\lim_{x\to 0+} \left(\sin(x)\right)^{\frac{1}{\sin(x)}}$$

$$\left(\sin(x)\right)^{\frac{1}{\sin(x)}} = \exp\left(\frac{\ln(\sin(x))}{\sin(x)}\right) \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Quando $x \to 0+$, anche $\sin(x) \to 0+$, dunque $\ln(\sin(x)) \to -\infty$ e $\frac{\ln(\sin(x))}{\sin(x)} \to -\infty$,

dunque $$\lim_{x\to 0+} \left(\sin(x)\right)^{\frac{1}{\sin(x)}} = \lim_{x\to 0+} \exp\left(\frac{\ln(\sin(x))}{\sin(x)}\right) = 0$$

— o —

$$f(x) = |x^2-1| + x^6 \int_0^{2x} \frac{|\sin(t)| + \cos(t)}{|2-4\cos(t)|}\, dt$$

Osserviamo che per $x \in [-1, 1]$ (e dunque in un intorno di $x=0$) si ha $|x^2-1| = 1-x^2$

Inoltre, posto $g(x) := \int_0^{2x} \frac{|\sin(t)| + \cos(t)}{|2-4\cos(t)|}\, dt$ si ha:

$$g(0)=0 \quad , \quad g'(0) = 2 \cdot \left.\left(\frac{|\sin(2x)| + \cos(2x)}{|2-4\cos(2x)|}\right)\right|_{x=0} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

dunque $g(x) = x + x o(x)$ e

$$f(x) = 1-x^2+x^6\left(x+xo(x)\right) = 1-x^2+x^7+x^7 o(x)$$

— o —

Posto $S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$, affermare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ha somma S, equivale a dire che

$$\lim_{n\to +\infty} S_n = S$$