Complementi di Analisi Matematica - a.a. 2006-07
Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Civile (CIS)

Registro delle lezioni

Laura Poggiolini e Gianna Stefani

2 ottobre 2006, 2 ore, LP

Il campo dei numeri complessi. (Dimostrati: esistenza dell'inverso e suo calcolo esplicito). Identificazione di $\mathbb{R}$ come sottoinsieme di $\mathbb{C}$, numeri immaginari, unità immaginaria. Teorema fondamentale dell'algebra. Il coniugio. Il modulo: disuguaglianza triangolare. Argomento, argomento principale. Forma polare e forma esponenziale. Forma esponenziale del prodotto. Formula di De Moivre, radice n–esima di un numero complesso. Definizione di campo. Esempi: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$. Definizione di spazio vettoriale (reale o complesso). Esempi: $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^n$.

4 ottobre 2006, 2 ore, LP

Esempi: $\mathcal{F}(A, V)$. Sottospazio vettoriale, esempi: $\mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$ e $C^0([a, b], \mathbb{R})$. Sottospazio generato da un insieme finito, esempio: $\mathbb{R}_n[x]$. Vettori linearmente indipendenti, vettori linearmente dipendenti, insieme libero, base e dimensione. Teorema dell'alternativa (no dim).

Norma, spazi vettoriali normati. Le norme $\|\cdot\|_p$, $\|\cdot\|_\infty$ in $\mathbb{R}^n$ e in $\mathbb{C}^n$. Le norme $\|\cdot\|_p$, $\|\cdot\|_\infty$ in $C^0([a, b], \mathbb{R})$.

5 ottobre 2006, 2 ore, LP

Successioni di funzioni, convergenza puntuale e convergenza uniforme. Esempi. Continuità del limite uniforme di funzioni continue (con dim). Teorema di passaggio a limite sotto il segno di integrale (no dim.)

Distanza indotta da una norma. Palle e sfere. sempi: palla unitaria di $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$, $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ e $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$. La norma $(C^0([0, 1]), \|\cdot\|_p)$ e $(C^0([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ delle funzioni $f_n : x \to x^n$.

Successioni in uno spazio normato. Definizione di convergenza. Unicità del limite (con dim.), Linearità del limite (no dim.)

9 ottobre 2006, 2 ore, LP

Successioni di Cauchy, spazi di Banach. Completezza di $(C^0([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ (con dim). Controesempio: $(C^0([a,b]), \|\cdot\|_1)$ non è completo. Successioni delle somme parziali e serie in uno spazio metrico. Covergenza totale. Teorema della convergenza totale (con dim della prima parte). Esercizi.

11 ottobre 2006, 2 ore, GS

Spazi vettoriali con prodotto scalare: definizione di prodotto scalare, norma indotta, disuguaglianza di Schwarz, disuguaglianza triangolare, vettori ortogonali, versori, basi ortonormali. Esempi: $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$, lo spazio $(C^0([a,b],\mathbb{C}), \|\cdot\|_2)$. Lo spazio $(C^0([-\pi,\pi],\mathbb{C}), \|\cdot\|_2)$ e i suoi sistemi ortogonali $\{\exp(ikx), k \in \mathbb{Z}\}$ e $\{\sin(kx), \cos(kx),\ k \in \mathbb{N}\}$.

12 ottobre 2006, 2 ore, GS

I polinomi trigonometrici di grado n e periodo 2π e le loro basi ortogonali in termini di esponenziali e seni - coseni, la formula per la norma. Componente continua e armonica fondamentale di un polinomio trigonometrico. Formule di passaggio fra le basi considerate (per esercizio). Spazi di Hilbert, definizione ed esempi senza dimostrazioni: gli spazi di dimensione finita e ℓ^2 sono completi, $(C^0([a,b],\mathbb{C}), \|\cdot\|_2)$ non è completo.

Lo spazio $S^\perp$, complemento ortogonale di un insieme S, e le sue proprietà.

Il problema della proiezione ortogonale: l'esempio dello spazio dei vettori liberi. **Riguardare lo spazio dei vettori liberi e l'integrale di Riemann**.

16 ottobre 2006, 2 ore, GS

Procedimento di ortogonalizzazione di una base. Teorema della proiezione (con dim.). Linearità della proiezione (per esercizio). Disuguaglianza di Bessel.
Proiezione della funzione $x \mapsto |x|$ sullo spazio dei polinomi trigonometrici di grado 1. Convergenza della serie di Fourier di $x \mapsto |x|$ (scritta mediante gli esponenziali).

18 ottobre 2006, 2 ore, GS

Il metodo dei minimi quadrati, retta di regressione.

19 ottobre 2006, 2 ore, LP

L'insieme $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ e la sua funzione caratteristica. Intervallo di $\mathbb{R}^n$ e sua misura, plurintervallo di $\mathbb{R}^n$ e sua misura. Misura esterna di un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$: misura esterna dell'insieme vuoto, monotonia della misura esterna, subadditività numerabile della misura esterna (senza dim). La misura esterna di $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ e di $\mathbb{Q}$.

Insiemi misurabili, misura di Lebesgue. Misurabilità degli insiemi di misura esterna nulla (con dim). Proprietà della famiglia degli insiemi misurabili (no dim). Additività numerabile della misura di Lebesgue (no dim).

Definizione di funzione misurabile e proprietà. Definizione: funzione semplice, integrale di una funzione semplice non negativa.

23 ottobre 2006, 2 ore, LP

Estensione canonica di una funzione misurabile. Teorema di approssimazzione monotona (senza dim). Integrale di una funzione misurabile non negativa. Funzioni parte positiva e parte negativa. Decomposizione di una funzione a segno variabile. Funzioni integrabili, integrale di una funzione integrabile, funzioni sommabili. Proprietà dell'integrale. Sommabilità delle funzioni Riemann–integrabili (senza dim). La funzione integralseno. Proprietà quasi–ovunque. Convergenza quasi–ovunque. Teorema di convergenza monotona (senza dim) e applicazione alle serie di funzioni non negative. Teorema di convergenza dominata (no dim). Teorema di Fubini (no dim).

25 ottobre 2006, 2 ore, LP

Proprietà della funzione integrale. Funzioni a valori in $\mathbb{C}$: misurabilità, integrabilità, sommabilità. Proposizione: $f\colon E \to \mathbb{C}$ è sommabile se e solo se la funzione $|f| : E \to \mathbb{R}$ è sommabile (con dim). Proposizione: ogni funzione sommabile non negativa, ad integrale nullo è nulla quaasi ovunque (no dim). Identificazione di funzioni che coincidono quasi ovunque. Spazi e norme L^p. Completezza (no dim). Estremo superiore essenziale. Spazio e norma L^∞. Completezza di L^∞ (no dim). Buona definizione del prodotto scalare in L^2 (con dim). Proprietà: se E ha misura finita, allora $L^\infty(E) \subset L^2(E) \subset L^1(E)$ (con dim).

26 ottobre 2006, 2 ore, GS

Lo spazio $L^2([-\pi,\pi])$ come spazio delle funzioni periodiche *definite q.o. su* $\mathbb{R}$. Polinomi e serie di Fourier per $f \in L^2([-\pi,\pi])$ mediante il sistema ortogonale $\{e^{ikx}, k \in \mathbb{Z}\}$. Disuguaglianza di Bessel, applicazione lineare

$$f \in L^2([-\pi,\pi]) \mapsto \{c_k, k \in \mathbb{Z}\} \in \ell^2$$

indotta dal sistema ortogonale $\{e^{ikx}, k \in \mathbb{Z}\}$. Convergenza in media quadratica (cioè in norma $||\cdot||_2$) della serie di Fourier: sua equivalenza con l'identità di Parseval (con dimostrazione), dimostrazione della convergenza a partire dal fatto (dato senza dimostrazione) che l'insieme $\{e^{ikx}, k \in \mathbb{Z}\}$ è un sistema ortogonale completo. Esercizio proposto: ripetere la teoria delle serie di Fourier con il sistema ortogonale completo $\{1, \cos(kx), \sin(kx), k \geq 1\}$. La serie di Fourier dell'onda quadra.

30 ottobre 2006, 2 ore, GS

Convergenza puntuale della serie di Fourier: posizione del problema, Teorema di localizzazione di Riemann (Proposizione 3.2-2, senza dimostrazione), normalizzata di una funzione C^1 a tratti, criterio di convergenza per le funzioni C^1 a tratti (Osservazione 3.2-1, senza dimostrazione). Convergenza uniforme della serie di Fourier per le funzioni continue su $\mathbb{R}$ come funzioni periodiche e C^1 a tratti (con dimostrazione).

2 novembre 2006, 2 ore, GS

Le serie di Fourier dell'onda quadra, dell'onda triangolare e della rampa e le loro convergenze. Fenomeno di Gibbs (Appendice 3A, cenni). Nucleo di Diriclet

6 novembre 2006, 2 ore, GS

Funzioni periodiche di periodo T (Cap.3.5 pg.101 -106): pulsazione, frequenza, armoniche, ampiezza e fase di un'armonica, sistemi ortogonali completi e loro norma. Per esercizio: teoria delle serie di Fourier per le funzioni periodiche di periodo T.
Equazione della corda vibrante di lunghezza L (Cap. 8.5): metodo di separazione delle variabili per la determinazione delle soluzioni.

8 novembre 2006, 2 ore, GS

Equazione della corda vibrante: soluzione come serie di funzioni e determinazione delle costanti mediante le serie di Fourier, metodo di D'alambert, esempi.

9 novembre 2006, 2 ore, GS

Equazione del calore per una sbarra di lunghezza L: metodo di separazione delle variabili per temperature costanti agli estremi della sbarra, convergenza della serie ottenuta (Cap. 8.4, pg. 324).

13 novembre 2006, 2 ore, LP

Aperti connessi del piano complesso. Funzioni di variabile complessa: limite, continuità, derivabillit'a, differenziabilità. Teorema: ogni funzione derivabile con derivata identicamente nulla su un aperto connesso è costante. Derivata di z^n. La funzione radice quadrata principale. Equivalenza tra concetto di derivabilità e differenziabilità. Confronto con le proprietà di funzioni di due variabli reali. Caratterizzazione della derivabilità in senso complesso tramite le proprietà delle derivate parziali (dimostrazione per esercizio). Condizioni di Cauchy Riemann. Non derivabilità della funzione coniugio. Proprietà dei gradienti delle parti reale ed immaginaria di una funzione derivabile rispetto alla variabile complessa (dimostrazione per esercizio). Definizioni: funzioni olomorfe, funzioni intere. $f(z) = z^2$ è intera.

15 novembre 2006, 2 ore, LP

La funzione esponenziale in campo complesso: possibili definizioni e loro equivalenza. Verifica della proprietà $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$ tramite la serie di potenze. Equazioni di Cauchy–Riemann in forma polare. La funzione Logaritmo principale. Le funzioni circolari e le funzioni iperboliche.

Serie di potenze in campo complesso. Lemma di Abel. Raggio di convergenza ed insieme di convergenza. Teorema di Cauchy–Hadamard (senza dim).

16 novembre 2006, 2 ore, LP

Totale convergenza di una serie di potenze in $D_r(0)$ per ogni r strettamente minore del raggio di convergenza e continuità della funzione somma della serie in $B_R(0)$. La serie delle derivate ed il teorema di derivazione per serie (dimostrata solo l'equivalenza dei raggi). Iterazione del teorema di derivazione per serie e determinazione dei coefficienti a partire dalla funzione somma della serie. Alcuni sviluppi: $\cos(z)$, $\sin(z)$, $\frac{1}{1-z}$, $\frac{1}{1+z}$, $\frac{1}{1+z^2}$.

20 novembre 2006, 2 ore, LP

Il teorema di integrazione e derivazione per serie in campo reale. La funzione $\arctan(z)$. Sviluppo in serie della funzione $Ln(1+z)$. Estensione della funzione $\arctan(z)$ fuori dalla palla unitaria.

Soluzione in seie di potenze di alcune equazioni ordinarie lineari. Il laplaciano in $\mathbb{R}^n$ per funzioni a simmetria radiale.

22 novembre 2006, 2 ore, LP

Richiami: limite all'infinito di funzioni sommabili in $\mathbb{R}$. Lemma di Riemann–Lebsgue (senza dim). Approssimazione di funzioni sommabili su un intervallo mediante funzioni costanti a tratti (senza dim). La trasformata di Fourier come limite delle serie di Fourier. Trasformata di Fourier di funzioni sommabili su $\mathbb{R}$. Linearità e limitatezza dell'operatore di trasformazione. Continuità della trasformata di una funzione sommabile. Limite all'infinito della trasformata di una funzione sommabile.

Trasformata di una funzione reale e pari, trasformata di una funzione reale e dispari. Funzione parte pari e funzione parti dispari

Proprietà elementari della trasformata di Fourier

23 novembre 2006, 1 ora, LP

Ancora sulle proprietà elementari della trasformata di Fourier. Calcolo della trasformata di Fourier per alcune funzioni elementari.

27 novembre 2006, 2 ore, LP

Ancora sul calcolo della trasformata di Fourier per alcune funzioni elementari. Il teorema di inversione. Convoluzione di funzioni $L^1(\mathbb{R})$ e sua trasformata di Fourier (senza dim).

29 novembre 2006, 2 ore, LP

Soluzione dell'equazione del calore sul semipiano. Il nucleo del calore e le funzioni erf, erfc. Soluzioni di similarità sul quarto di piano. Soluzione dell'equazione delle onde sul semipiano.

30 novembre 2006, 2 ore, LP

Esercizi su analisi complessa e serie di potenze.

4 dicembre 2006, 1 ora, LP

Esercizi su trasformata di Fourier e funzioni olomorfe.