Complementi di Analisi Matematica - a.a. 2006-07
Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Civile (CIS)

Note integrative ed Esercizi consigliati

Laura Poggiolini e Gianna Stefani

Indice | 0

Riferimenti bibliografici 0

[1] Giulio Cesare Barozzi *Matematica per l'Ingegneria dell'Informazione – ristampa aggiornata*, Zanichelli 2004.

Convergenza uniforme | 1

Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni definite in un comune intervallo I (eventualmente $I = \mathbb{R}$). Fisso $x_0 \in I$. Ottengo una successione numerica:

$$n \in \mathbb{N} \to f_n(x_0) \in \mathbb{R}.$$

Per questa successione è dunque ben definito il concetto di convergenza: se $L \in \mathbb{R}$, dico che $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = L$ se

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\overline{n} = \overline{n}(\varepsilon) \text{ tale che } |f_n(x_0) - L| < \varepsilon \quad \forall n > \overline{n}.$$

Definizione 1.1. Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni definite in un comune intervallo I. Se per ogni $x \in I$ la successione numerica $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge, dico che la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge puntualmente in* I.

Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni definite in un comune intervallo I che converge puntualmente. In generale il limite dipende da x (per ogni $x \in I$ ho infatti una diversa successione numerica $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$). Il processo di limite mi definisce dunque una nuova funzione $f : x \in I \to f(x) \in \mathbb{R}$.

Se scriviamo in formule la Definizione 1.1, dobbiamo tenere presente che $\overline{n}$ non dipende solo da ε ma anche da x, perché per ogni x ho una diversa operazione di passaggio a limite:

$$\forall x \in I \quad \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\overline{n} = \overline{n}(\varepsilon, x) \text{ tale che } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n > \overline{n}.$$

Esempio 1.1. Consideriamo la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_n : x \to \begin{cases} 1 - n\,|x| & |x| \le \dfrac{1}{n} \\ 0 & |x| > \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

Disegniamo il grafico di qualche funzione f_n:

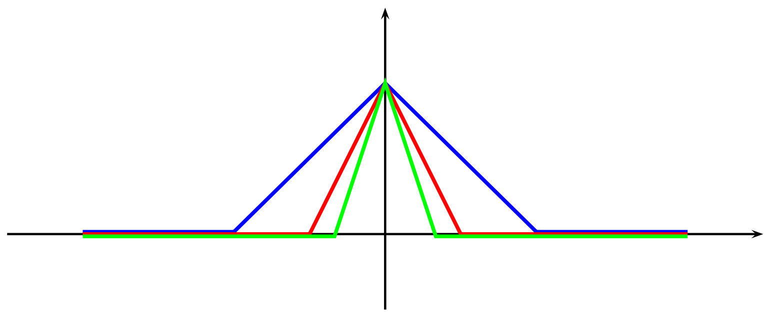


Figura 1: I grafici di f_1, f_2, f_3

In generale

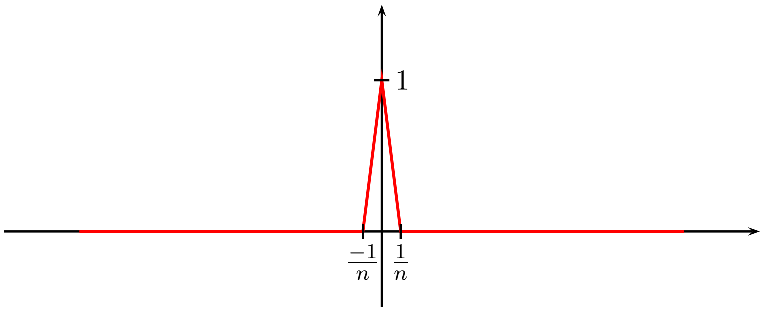


Figura 2: Il grafico di f_n generica

Poiché ogni funzione f_n è una funzione pari, studiamo il passaggio a limite per $x \geq 0$ e posi estendiamo il risultato ottenuto agli $x < 0$. Osserviamo subito che $f_n(0) = 1$ per ogni n e dunque

$$\lim_{n\to\infty} f_n(0) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

Invece, se fisso $x > 0$, poiché $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, abbiamo, da un certo $\overline{n}$ in poi, $x > \frac{1}{n}$ e dunque $f_n(x) = 0 \quad \forall n \geq \overline{n}$ Più precisamente si ha:

$$x > \frac{1}{n} \iff n > \frac{1}{x} \Longrightarrow x > \frac{1}{n} \quad \forall n > \overline{n}(x) := 1 + \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor.$$

Dunque abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 \quad \forall x > 0.$$

E dunque, per simmetria, la successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente in $\mathbb{R}$ alla funzione

$$f : x \in \mathbb{R} \to \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases} \in \mathbb{R}$$

Osserviamo che mentre ogni funzione f_n è continua, la funzione f non lo è. □

Per le successioni di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definite in un comune intervallo I, introduciamo un nuovo tipo di convergenza:

Definizione 1.2. Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni definite in un comune intervallo I. Dico che la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente in I* ad una funzione f se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \overline{n} = \overline{n}(\varepsilon) \text{ tale che } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in I \text{ e } \forall n > \overline{n} \tag{1}$$

Osservazione 1.1. La condizione (1) che definisce la convergenza uniforme è equivalente a

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \overline{n} = \overline{n}(\varepsilon) \text{ tale che } \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n > \overline{n}$$

ovvero a

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Osservazione 1.2. Dalle definizioni date, si osserva facilmente che se $\{f_n\}$ converge uniformemente ad una funzione f in I, allora vi converge anche puntualmente. Riprendiamo l'Esempio 1.1 per mostrare che il viceversa non è vero, ovvero per esibire una successione di funzioni che converge puntualmente ma non uniformemente.

Dobbiamo valutare $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|$. Si ha

$$|f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 - n\,|x| & x \neq 0. \end{cases}$$

Dunque, per simmetria, $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x>0}(1 - nx) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ e dunque $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0.$ □

Una delle proprietà più importanti delle successioni di funzioni uniformemente convergenti è la seguente:

Teorema 1.1. *Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni continue in un comune intervallo I. Se $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente ad una funzione f, allora anche f è continua in I.*

Dimostrazione. Fisso $x_0 \in I$. Voglio dimostrare che f è continua in x_0, cioè che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ tale che } \forall x \in I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Applicando la disuguaglianza triangolare tra numeri reali, abbiamo

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \qquad \forall x \in I, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

D'altra parte, per l'ipotesi di convergenza uniforme, abbiamo che

$$\exists \overline{n} = \overline{n}(\varepsilon/3) \text{ tale che } \forall n > \overline{n} \quad \sup_{y\in I} |f_n(y) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Nella disuguaglianza (2) scelgo $n = \overline{n} + 1$. Si ha

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + |f_{\overline{n}+1}(x) - f_{\overline{n}+1}(x_0)| + \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \in I. \tag{3}$$

D'altra parte la funzione $f_{\overline{n}+1}$ è continua, quindi

$$\exists \delta > 0 \text{ tale che } |f_{\overline{n}+1}(x) - f_{\overline{n}+1}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \in I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Sostituendo nella disuguaglianza (3) otteniamo la tesi. □

Osservazione 1.3. Se consideriamo la successione di funzioni dell'Esempio 1.1, abbiamo allora che non c'è bisogno di provare la mancanza di convergenza uniforme, come abbiamo fatto nell'Osservazione 1.1. Poiché tutte le funzioni f_n sono continue, mentre la funzione limite f non lo è, non c'è speranza di avere convergenza uniforme.

Un'altra importante proprietà garantita della convergenza è il *passaggio a limite sotto il segno di integrale*. Più precisamente vale il seguente:

Teorema 1.2. *Sia* $[a, b]$ *un intervallo chiuso e limitato di* $\mathbb{R}$ *e sia* $\{f_n\}$ *una successione di funzioni continue in* $[a, b]$*. Se* $\{f_n\}$ *converge uniformemente ad una funzione* f *in* $[a, b]$*, allora*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Osservazione 1.4. Esistono teoremi di passaggio a limite sotto il segno di integrale molto più potenti di quello appena enunciato, ma essi valgono in una diversa teoria dell'integrazione, detta *teoria dell'integrazione secondo Lebesgue.* Tale teoria permette di definire l'integrale per una classe di funzioni estremamente più ampia della classe delle funzioni continue. Tuttavia, se una funzione f è integrabile sia secondo Riemann che *sommabile* secondo Lebesgue, i due integrali coincidono.

Esercizio 1.1. Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni $f_n \colon x \in [0, 1] \to x^n \in \mathbb{R}$.

Dal limite notevole

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & a > 1 \\ 1 & a = 1 \\ 0 & |a| < 1 \\ \text{non esiste} & a \le -1 \end{cases}$$

abbiamo immediatamente che la successione $\{f_n\}$ converge puntualmente alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}.$$

Poiché ogni funzione f_n è continua, mentre f non lo è, non ci può essere convergenza uniforme. □

Convergenza totale 2

Sia $(V, \|\cdot\|)$ uno spazio vettoriale normato e sia $\{x_n\}$ una successione a valori in V. A partire da $\{x_n\}$ posso definire una nuova successione a valori in V:

$$\begin{aligned}
&s_0 := x_0 \\
&s_1 := s_0 + x_1 = x_0 + x_1 \\
&s_2 := s_1 + x_2 = x_0 + x_1 + x_2 \\
&\quad \dots \\
&s_n := s_{n-1} + x_n = x_0 + x_1 + \dots + x_{n-1} + x_n = \sum_{k=0}^{n} x_k
\end{aligned}$$

La successione $\{s_n\}$ si dice *successione delle somme parziali associata alla successione* $\{x_n\}$.

Poiché $\{s_n\}$ è una successione a valori in V, anche per esse è definita la nozione di convergenza in $(V, \|\cdot\|)$:

Definizione 2.1. Se la successione delle somme parziali $\{s_n\}$ converge nello spazio normato $(V, \|\cdot\|)$,chiamo *somma della serie* il suo limite e lo indico col simbolo $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$.

È tuttavia possibile definire un nuovo tipo di convergenza.

Definizione 2.2. Sia $(V, \|\cdot\|)$ uno spazio normato e sia $\{x_n\}$ una successione a valori in V. Dico che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *converge totalmente* se la serie a termini reali non negativi $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|$ converge in $\mathbb{R}$.

Teorema 2.1. *Sia $(V, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach e sia $\{x_n\}$ una successione a valori in V. Se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ converge totalmente, allora essa converge in $(V, \|\cdot\|)$ e*

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} x_n \right\| \le \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\| .$$

Dimostrazione. Considero le seguenti due successioni di somme parziali:

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} x_k \in V \qquad \sigma_n := \sum_{k=0}^{n} \|x_k\| \in \mathbb{R}.$$

Poiché $(V, \|\cdot\|)$ è uno spazio di Banach, per provare che $\{s_n\}$ converge in V, mi basta provare che è di Cauchy. Valuto dunque $\|s_n - s_m\|$. Senza perdere in generalità posso supporre $n > m$. Si ha dunque

$$\begin{aligned} \|s_n - s_m\| &= \left\| \sum_{k=0}^{n} x_k - \sum_{k=0}^{m} x_k \right\| = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} x_k \right\| \leq \\ &\leq \sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\| = \sigma_n - \sigma_m = |\sigma_n - \sigma_m| \end{aligned} \tag{4}$$

Per ipotesi $\{\sigma_n\}$ è una successione reale convergente quindi è sicuramente di Cauchy. Dunque

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \overline{n} = \overline{n}(\varepsilon) \text{ tale che } |\sigma_n - \sigma_m| < \varepsilon$$

e dunque, per la (4) abbiamo, con lo stesso $\overline{n}(\varepsilon)$,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \overline{n} = \overline{n}(\varepsilon) \text{ tale che } |s_n - s_m| < \varepsilon$$

Per dimostrare la seconda parte della tesi applicando la disuguaglianza triangolare, per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbiamo:

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} x_k \right\| \leq \sum_{k=0}^{n} \|x_k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|x_k\|$$

dove abbiamo usato il fatto che $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \|x_k\|$ è una serie a termini non negativi. Quindi

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} x_k \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|x_k\| \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Infine, passando a limite per $n \to \infty$ si ottiene la tesi. □

Nel caso particolare $(V, \|\cdot\|) = (C^0(I), \|\cdot\|_\infty)$ si ottiene il seguente

Corollario 2.2. *Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni definite e continue in un un comune intervallo I. Se la serie a termini reali $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_\infty$ converge, allora la funzione definita dalla somma della serie*

$$f : x \in I \to \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \in \mathbb{R}$$

è il limite uniforme della successione di funzioni $s_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ e dunque è anch'essa continua in I.

Numeri complessi, spazi vettoriali e spazi normati | 1

Esercizio 1.1. Dimostrare che l'opposto di $z = (x, y)$ è $w = (-x, -y)$.

Esercizio 1.2. Dimostrare la disuguaglianza triangolare e che

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|\,, \quad |z| = \sqrt{zz^*}.$$

Esercizio 1.3. Siano $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$. Dimostrare che $z_1 {z_2}^{-1} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$.

Esercizio 1.4. Calcolare e disegnare sul piano complesso le soluzioni di

$$z^3 = 1 \quad z^4 = -1 \quad z^5 = i \quad z^3 = 1 + i.$$

Esercizio 1.5. Scrivere in forma cartesiana ed in forma esponenziale i seguenti numeri complessi, impiegando l'argomento principale

$$\frac{3+5i}{2-i} \qquad \frac{3-5i}{-2+i}.$$

Esercizio 1.6. Dimostrare che

$$\Re(z) = \frac{z+\overline{z}}{2} \qquad \Im(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}.$$

Esercizio 1.7. Disegnare sul piano complesso i seguenti insiemi

$$A_1 = \{z \in \mathbb{C} \colon\ |z - i| < 1\} \qquad A_2 = \left\{z \in \mathbb{C} \colon z = e^{\frac{i2\pi k}{5}},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$
$$A_3 = \{z \in \mathbb{C} \colon\ |z| < |z + 2i|\}\,.$$

Esercizio 1.8. Esercizi 4.1-1, 4.1-2, 4.1-3, 4.1-4 4.1-5 di [1].

Esercizio 1.9. Verificare – svolgendo tutti i passaggi – che

1. $\mathbb{R}^n$ con

$$+\colon\ (\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)) \to \mathbf{x} + \mathbf{y} := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$
$$\cdot\colon\ (\lambda, \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)) \to \lambda\mathbf{x} := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

è uno spazio vettoriale reale;

2. $\mathbb{C}^n$ con

$$+\colon\ (\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n), \mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)) \to \mathbf{z} + \mathbf{w} := (z_1 + w_1, \dots, z_n + w_n)$$
$$\cdot\colon\ (\lambda, \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)) \to \lambda\mathbf{z} := (\lambda z_1, \dots, \lambda z_n)$$

è uno spazio vettoriale complesso.

Esercizio 1.10. Sia

$$W = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon x_n = 0\}.$$

Dimostrare che W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.
Più in generale sia $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ e sia

$$\mathbf{a}^\perp = \left\{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0\right\}.$$

Dimostrare che $\mathbf{a}^\perp$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

Esercizio 1.11. Sia $\mathbb{R}_n[x]$ l'insieme costituito dalla funzione nulla e dai polinomi a coefficienti reali, di grado $\leq n$. Dimostrare che è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e che

$$p_0(x) = 1 \quad p_1(x) = x \quad \dots \quad p_n(x) = x^n$$

costituiscono una sua base, e dunque $\dim \mathbb{R}_n[x] = n + 1$.

Esercizio 1.12. Sia V uno spazio vettoriale e siano $v_1, \dots, v_r \in V$.

1. Dimostrare che se $v_1, \dots, v_r$ sono linearmente indipendenti, allora nessuno di essi è il vettore nullo.
2. Dimostrare che se $v_1, \dots, v_r$ sono linearmente dipendenti, allora almeno uno di essi può essere espresso come combinazione lineare degli altri.

Esercizio 1.13. Sia V uno spazio vettoriale in cui è definita una applicazione $N \colon V \to \mathbb{R}$. Dimostrare che N soddisfa la disuguaglianza triangolare se e solo se $|N(x) - N(y)| \leq N(x - y) \quad \forall x, y \in V$.

Esercizio 1.14. Esercizi 1.2-1, 1.2-2, 1.2-3, 1.2-4, 1.2-5 di [1].

Esercizio 1.15. Disegnare le palle unitarie di $\mathbb{R}^2$ centrate nell'origine, secondo le norme $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$,

Esercizio 1.16. Si consideri l'insieme

$$\ell^2 = \left\{\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \colon a_n \in \mathbb{C}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 < +\infty\right\}.$$

1. Dimostrare che ℓ^2 è uno spazio vettoriale complesso con
$$\begin{aligned} \{a_n\} + \{b_n\} &:= \{a_n + b_n\} \\ \lambda\{a_n\} &:= \{\lambda a_n\}; \end{aligned}$$
2. dimostrare che
$$\|\{a_n\}\|_2 := \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2\right)^{1/2}$$
definisce una norma in ℓ^2.

Esercizio 1.17.

1. Si consideri la funzione $f\colon x \in [-\pi, \pi] \to \sin(x) \in \mathbb{R}$. Calcolare $\|f\|_1$, $\|f\|_2$, $\|f\|_\infty$.
2. Si considerino le funzioni $f_n\colon x \in [0,1] \to x^n \in \mathbb{R}$. Calcolare $\|f_n\|_p$ e $\|f_n\|_\infty$. Dimostrare che $\lim_{p\to+\infty} \|f_n\|_p = \|f_n\|_\infty$.

Esercizio 1.18. Siano $f\colon x \in [-\pi, \pi] \to \operatorname{sgn}(x) \in \mathbb{R}$ e $g\colon x \in [-\pi, \pi] \to \sin x \in \mathbb{R}$. Calcolare $d_1(f,g)$. $d_2(f,g)$. e $d_\infty(f,g)$.

Convergenza uniforme, convergenza in spazi normati, spazi di Banach, convergenza totale 2

Esercizio 2.1. Studiare la convergenza puntuale ed uniforme delle seguenti successioni di funzioni

1. $f_n \colon x \in \mathbb{R} \to \begin{cases} 1 - n\,|x| & |x| \le \frac{1}{n} \\ 0 & |x| > \frac{1}{n} \end{cases} \in \mathbb{R}$
2. $f_n \colon x \in [0, +\infty) \to nx \exp(-nx) \in \mathbb{R}$
3. $f_n \colon x \in \mathbb{R} \to \begin{cases} \sin(x) & 2n\pi \le x \le (2n+1)\pi \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \in \mathbb{R}$
4. $f_n \colon x \in \mathbb{R} \to \dfrac{nx}{1 + n^2x^2} \in \mathbb{R}$
5. $f_n \colon x \in \mathbb{R} \to \dfrac{n^2x^2}{1 + n^2x^2} \in \mathbb{R}$

Nei casi in cui non vi sia convergenza uniforme su tutto il dominio, esibire un sottoinsieme del dominio in cui c'è convergenza uniforme.

Esercizio 2.2. Esercizi 1.2-17, 1.2-18, 1.2-19 di [1].

Esercizio 2.3. Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni $\{f_k\}_{k \ge 2}$ così definita:

$$f_k(x) = \begin{cases} kx & x \in \left[0, \dfrac{1}{k}\right] \\ 2 - kx & x \in \left[\dfrac{1}{k}, \dfrac{2}{k}\right] \\ 0 & x > \dfrac{2}{k} \end{cases}$$

Esercizio 2.4. Provare che la successione di funzioni $f_n \colon t \in [-\pi, \pi] \to \mathrm{e}^{int} \in \mathbb{C}$ non è di Cauchy né in $\left(C^0([-\pi,\pi]), \|\cdot\|_\infty\right)$, né in $\left(C^0([-\pi,\pi]), \|\cdot\|_2\right)$.

Esercizio 2.5. Discutere la convergenza totale in $(C^0(I), \|\cdot\|_\infty)$ delle seguenti serie di funzioni, dove I è il dominio a fianco indicato

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{1 - x^{2n}}}{n} \qquad I = [0,1] \qquad\qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{1 - x^{2n}}}{n^2} \qquad I = [0,1]$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx} \qquad I = (0, +\infty) \qquad\qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx} \qquad I = [a, +\infty), a > 0.$$

Esercizio 2.6. Discutere la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni

$$f_n \colon x \in [0, +\infty) \to \frac{1 + x^2}{x^n + n^2} \in \mathbb{R}.$$

Spazi con prodotto scalare | 3

Esercizio 3.1. Esercizi 1.3-1, 1.3-2, 1.3-3 di [1].

Esercizio 3.2. Nell'esercizio 1.3-4 di [1] c'è un errore, sostituire l'esercizio con il seguente. Sia $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ uno spazio con prodotto scalare e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta, allora

$$\langle x\ ,\ y\rangle = \begin{cases} \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) & \text{se } V \text{ è reale} \\ \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\,\|x+y\|^2 - i\,\|x-y\|^2\right) & \text{se } V \text{ è complesso} \end{cases}$$

Esercizio 3.3. Esercizi 1.3-7, 1.3-8, 1.3-9 di [1].

Esercizio 3.4. Nello spazio $(C^0([-\pi,\pi],\mathbb{C}), \|\cdot\|_2)$ considerare le funzioni $f : x \mapsto x^2 - ix^3$ e $f_k : x \mapsto \exp(ikx),\ k \in \mathbb{Z}$. Calcolare

$$\langle f\ ,\ f_k\rangle\ ,\ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Esercizio 3.5. Nello spazio $(C^0([-1,1],\mathbb{C}), \|\cdot\|_2)$ considerare le funzioni $f : x \mapsto |x|$, $f_k : x \mapsto \exp(ik\pi x),\ k \in \mathbb{Z}$, $g_k : x \mapsto \sin(k\pi x),\ k \in \mathbb{N}$ e $\rho_k : x \mapsto \cos(k\pi x)\ k \in \mathbb{N}$. Calcolare

$$\langle f\ ,\ f_k\rangle\ ,\ \forall k \in \mathbb{Z}\,;\ \langle f\ ,\ g_k\rangle\ ,\ \forall k \in \mathbb{N}\,;\ \langle f\ ,\ \rho_k\rangle\ ,\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Esercizio 3.6. Con riferimento al precedente esercizio, determinare le funzioni:

1. α_0 proiezione ortogonale di f sullo spazio delle funzioni costanti.
2. α_k proiezione ortogonale di f sullo spazio generato da ρ_k.
3. β_k proiezione ortogonale di f sullo spazio generato da g_k.

Dimostrare che la serie di funzioni $\alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k + \beta_k)$ converge uniformemente ad una funzione continua e dedurne che ci converge anche nello spazio $(C^0([-1,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$.

Esercizio 3.7. Determinare l'algoritmo di ortonormalizzazione di una base.

Esercizio 3.8 (Polinomi di Legendre). Nello spazio $(C^0([-1,1],\mathbb{C}), \|\cdot\|_2)$ considerare la base ortonormale dello spazio $\mathbb{R}_3[x]$ dei polinomi di grado minore o uguale a 3 ottenuta dalla base canonica $p_j : x \mapsto x^j$, $j = 1,2,3$. Determinare le componenti di ciascun $p_j\,, j = 1,2,3$, nella base ottenuta e proiettare ciascun $p_j\,, j \in \mathbb{N}$ su $\mathbb{R}_3[x]$.

Esercitazione per la prima prova intercorso | 4

Individuare nell'elenco delle possibili risposte quelle corrette e quelle sbagliate

Esercizio 4.1. Tra le soluzioni complesse dell'equazione $z^4 = 1 + i\sqrt{3}$ ce n'è una il cui argomento è

$$0 \quad \frac{\pi}{24} \quad \frac{\pi}{12} \quad \frac{\pi}{6} \quad \frac{\pi}{4} \quad \frac{\pi}{3} \quad \frac{\pi}{2} \quad \frac{7\pi}{12} \quad \frac{-\pi}{24} \quad \frac{-\pi}{12}$$

$$\frac{-11\pi}{12} \quad \pi \quad \frac{4\pi}{3} \quad \frac{-5\pi}{12} \quad \frac{5\pi}{12} \quad \frac{-\pi}{3} \quad \frac{-\pi}{2} \quad \frac{-\pi}{4} \quad \frac{5\pi}{24} \quad \frac{11\pi}{12}$$

Esercizio 4.2. Se $z = -7 + 3i$, allora $\frac{1}{z}$ è uguale a

$$\frac{\sqrt{58}}{58} \exp\left(i\left(\arctan\left(\frac{3}{7}\right)\right)\right) \qquad \frac{\sqrt{58}}{58} \exp\left(i\left(\arctan\left(\frac{3}{7}\right) - \pi\right)\right)$$

$$\frac{\sqrt{58}}{58} \exp\left(i\left(-\arctan\left(\frac{3}{7}\right)\right)\right) \qquad \frac{\sqrt{58}}{58} \exp\left(i\left(-\arctan\left(\frac{3}{7}\right) + \pi\right)\right)$$

Esercizio 4.3. Siano $z = 1 + 2i$, $w = -2 + 3i$, allora $\frac{z}{w}$ vale

$$\frac{-8}{13} - i\frac{1}{13} \qquad \frac{-8}{13} + i\frac{1}{13} \qquad \frac{4}{13} - i\frac{7}{13}$$

$$\frac{8}{13} - i\frac{1}{13} \qquad \frac{-4}{13} - i\frac{1}{13} \qquad \frac{-4}{13} + i\frac{7}{13}$$

Esercizio 4.4. Siano $z = 1 + 2i$, $w = -2 + 3i$, allora $\frac{z}{w}$

appartiene al primo quadrante	appartiene al secondo quadrante
appartiene al primo terzo	appartiene al quarto quadrante
è un numero reale	è un numero immaginario

Esercizio 4.5. Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni

$$f_n \colon x \in \mathbb{R} \to \arctan(nx) \in \mathbb{R}$$

Esercizio 4.6. Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni

$$f_n \colon x \in \mathbb{R} \to \frac{nx^3}{1 + n^2x^4} \in \mathbb{R}$$

Esercizio 4.7. Nello spazio $(C^0([-\pi, \pi], \mathbb{R}), ||\cdot||_2)$ considerare la funzione $f \colon x \mapsto x^2$ e disegnarne il grafico. Inoltre:

1. Determinare la proiezione di f sullo spazio F_1 dei polinomi trigonometrici di grado minore o uguale a 1.
2. Usando il teorema di Pitagora, determinare la distanza di f da F_1.
3. Determinare la funzione α_0 proiezione ortogonale di f sullo spazio delle funzioni costanti.
4. Determinare la funzione α_k proiezione ortogonale di f sullo spazio generato da $x \mapsto \cos(kx),\ k \in \mathbb{N}$.
5. Determinare la funzione β_k proiezione ortogonale di f sullo spazio generato da $x \mapsto \sin(kx),\ k \in \mathbb{N}$.
6. Dimostrare che la serie di funzioni $\alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k + \beta_k)$ converge uniformemente ad una funzione continua e dedurne che ci converge anche nello spazio $(C^0([-\pi,\pi],\mathbb{R}), ||\cdot||_2)$.

Esercizio 4.8. Inoltre: domande teoriche, riguardare bene le definizioni degli oggetti sinora introdotti.

5 Misura ed integrale di Lebesgue, spazi L^{p}

Esercizio 5.1. Sia $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una successione monotona decrescente (cioè $E_{i+1} \subseteq E_i \quad \forall i \in \mathbb{N}$) di sottoinsiemi misurabili di $\mathbb{R}^n$. Sia $E := \bigcap_{i=0}^{+\infty} E_i$. Dimostrare che E è misurabile. Supponiamo che $m(E_0)$ sia finita, dimostrare che $m(E) = \lim_{i\to\infty} m(E_i) = \inf_{i\in\mathbb{N}} m(E_i)$.

Esercizio 5.2. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile e sia $f\colon x \in E \to f(x) \in \mathbb{R}$. Dimostrare che sono equivalenti:

1. f è misurabile;
2. per ogni $a \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{x \in E\colon f(x) \geq a\}$ è misurabile;
3. per ogni $a \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{x \in E\colon f(x) \leq a\}$ è misurabile;
4. per ogni $a \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{x \in E\colon f(x) > a\}$ è misurabile;

Esercizio 5.3. Si può dimostrare che ogni insieme aperto è misurabile e che ogni insieme chiuso è misurabile. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottoinsieme aperto o chiuso. Dedurne che ogni funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$ continua è misurabile.

Esercizio 5.4. Sia $[a, b]$ un intervallo di $\mathbb{R}$, $a < b$ e siano $\alpha, \beta\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ due funzioni continue tali che $\alpha(x) \leq \beta(x)$ per ogni $x \in [a, b]$. Sia

$$E := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon x \in [a, b], \quad \alpha(x) \leq y \leq \beta(y)\right\}.$$

E è un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^2$ (infatti è un chiuso). Sia $f\colon E \to \mathbb{R}$ una funzione sommabile in E. Enunciare il teorema di Fubini per $\iint_E f(x, y)\mathrm{d}(x, y)$.

Esercizio 5.5. Esercizi 2.2-4, 2.2-5, 2.2-6, 2.2-7, 2.2-8, 2.2-9, 2.4-1, 2.4-2, 2.4-3, 2.4-4, 2.4-5, 2.4-6, di [1].

Esercizio 5.6. Determinare il limite puntuale, se esiste, di ciascuna delle seguenti successioni di funzioni

$$f_n\colon x \in \mathbb{R} \to \frac{nx}{1 + n^2x^2} \in \mathbb{R}$$
$$g_n\colon x \in \mathbb{R} \to \frac{n^2x^2}{1 + n^2x^2} \in \mathbb{R}$$

Discuterne la convergenza uniforme in $\mathbb{R}$ e, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$ discuterne la convergenza uniforme in semirette destre $[a, +\infty)$ e sinistre $(-\infty, -a]$. Discutere la validità delle relazioni

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$$
$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} g_n(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \lim_{n\to\infty} g_n(x)\mathrm{d}x$$

Esercizio 5.7. Sia $f\colon (a,b] \to \mathbb{R}$ continua e non negativa. Dimostrare che

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_{a+\frac{1}{n}}^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Esercizio 5.8. Applicando il risultato dell'Esercizio 5.7 dimostrare che, per ogni $s > -1$, si ha

$$\int_0^1 \frac{x^s \ln(1/x)}{1-x}\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{+\infty} (s+k)^{-2}.$$

Esercizio 5.9. Si considerino le funzioni parte intera e parte frazionaria di un numero reale:

$$\begin{aligned} x &\in\to \lfloor x \rfloor \in \mathbb{R} \\ x &\in\to \{x\} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Per ciascuna delle due funzioni e per ogni $t \in \mathbb{R}$ si scriva l'insieme di sopralivello

$$E_{f,t} \equiv \{x \in \mathbb{R}\colon f(x) > t\}$$

Esercizio 5.10. Si consideri la funzione

$$f\colon (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \frac{\max\{|x|, |y|\}}{x^2+y^2} \in \mathbb{R}$$

Per ogni $t \in \mathbb{R}$ si scriva e si tracci sul piano Oxy l'insieme di sopralivello

$$E_{f,t} \equiv \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon f(x,y) > t\right\}$$

Esercizio 5.11. Discutere la sommabilità sul quadrato $[0,1] \times [0,1]$ delle funzioni

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}\,, \quad g(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2}\,.$$

Esercizio 5.12. Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni

$$f_n\colon x \in \mathbb{R} \to \begin{cases} 0 & 0 \le |x| \le n \\ |\sin(\pi x)| & 2n < |x| \le 2n+1 \\ 0 & |x| > n+1 \end{cases}$$

Con i calcoli verificare che

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx \neq \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx\,.$$

Spiegare perché non è possibile passare a limite sotto il segno di integrale, neppure usando la teoria di Lebesgue (ovvero: enunciare il teorema di convergenza dominata e spiegare quale parte dell'ipotesi non è soddisfatta).

Esercizio 5.13. Calcolare, se esiste, il limite puntuale della successione di funzioni

$$f_n \colon x \in \mathbb{R} \to \sqrt{n} \exp\left(-nx^2\right) \in \mathbb{R}$$

Verificare che la convergenze non è uniforme in $(0, +\infty)$ ma è uniforme in ogni semiretta del tipo $(a, +\infty)$ per ogni $a > 0$.

Sapendo che $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-y^2\right)\, dy = 2\sqrt{\pi}$, verificare che $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\, dx = 2\sqrt{\pi} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Si consideri la serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$. Verificare che converge totalmente in ogni semiretta del tipo $(a, +\infty)$, $a > 0$. Perchè posso comunque affermare che

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx?$$

(Enunciare il teorema usato).

Esercizio 5.14. Una succesione di funzioni $\{f_n\}_{n \geq n_0}$, $f_n \colon x \in \mathbb{R} \to f_n(x) \in \mathbb{R}$ si dice *equilimitata* se

$$\exists M \in \mathbb{R} \text{ tale che } |f_n(x)| \leq M \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \geq n_0.$$

Per $n \geq 1$ sia

$$f_n \colon x \to \begin{cases} \exp(nx - 1) & x \leq \dfrac{1}{n} \\ 2 - nx & \dfrac{1}{n} < x \leq \dfrac{2}{n} \\ 1 - \dfrac{2}{nx} & x > \dfrac{2}{n}. \end{cases}$$

1. Verificare che si tratta di una successione equilimitata di funzioni continue;
2. calcolare il limite puntuale;
3. rispondere ai seguenti quesiti motivando le risposte ed enunciando gli eventuali teoremi usati:
   a) la convergenza è uniforme?
   b) la convergenza è uniforme sulla semiretta $(0, +\infty)$? E sulla semiretta $(-\infty, 0)$?
   c) Esistono intervalli su cui c'è convergenza uniforme?
   d) È possibile passare a limite sotto il segno di integrale sull'intervallo $[-1, 1]$ utilizzando la teoria di Riemann? E utilizzando la teoria di Lebesgue?

Esercizio 5.15. Discutere la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni

$$f_n \colon x \in \mathbb{R} \to f_n(x) \in \mathbb{R}$$

definita da

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & |x| > \dfrac{1}{n} \\ 1 - n|x| & |x| \le \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

Giustificare, senza fare alcun calcolo, le seguenti uguaglianze (nell'ambito della teoria dell'integrazione secondo Lebesgue)

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x) \right) dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx$$

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx$$

6 Serie di Fourier e applicazioni

Esercizio 6.1. Fare gli esercizi 3.2-1, 3.2-4, 3.2-6, ..., 3.2-10, 3.4-1, ..., 3.4-8, 3.5-1, di [1].

Esercizio 6.2. Fare come esercizi gli esempi 8.4-1 e 8.4-2 di [1].

Esercizio 6.3. Fare gli esercizi 8.4-1, ..., 8.4-6 di [1].

Esercizio 6.4. Calcolare la serie di Fourier dell'onda quadra cambiando periodo e valore per le due costanti. Se la funzione non è dispari, esprimerla come funzione del tipo $x \mapsto a \operatorname{sgn}(x) + b$ e applicare la linearità dei coefficienti di Fourier.

Esercizio 6.5. Sia $a \in (0, \pi)$. Calcolare i polinomi trigonometrici approssimanti, della funzione impulso, ottenuta per periodicità mediante

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad |x| < a \\ 0 & \text{se} \quad a < |x| < \pi. \end{cases}$$

Determinare a quale funzione converge puntualmente e scrivere l'identità di Parseval

Esercizio 6.6. Calcolare la serie di Fourier di $f(x) = |\sin(x)|$. Verificare, dal risultato ottenuto, che la serie converge totalmente e quindi uniformemente. Scrivere l'identità di Parseval.

Esercizio 6.7. Considerare la funzione definita su $[0, 1]$ da $f(x) = x(x - 1)$, estenderla a $[-1, 1]$ in maniera che risulti una funzione dispari, quindi estenderla come funzione periodica a tutto $\mathbb{R}$.

1. Verificare che tale funzione è $C^\infty(\mathbb{R})$.
2. Calcolare i coefficienti di Fourier di f.
3. Descriverne la componente continua e tutte le armoniche, esprimendole anche mediante ampiezza e fase.
4. Verificare, mediante il risultato ottenuto, che la serie di Fourier converge totalmente e quindi uniformemente a f.

Esercizio 6.8. Disegnare il grafico della funzione definita sull'intervallo $[0, 1]$ da

$$f(x) = x - x^2$$

ed estesa a tutto $\mathbb{R}$ per periodicità (con periodo $T = 1$) e rispondere ai seguenti quesiti.

1. Determinare la pulsazione associata al periodo $T = 1$.

2. Determinare la componente continua, la componente fondamentale e la k-sima armonica di f e le loro ampiezze e fasi.

3. Scrivere la serie di Fourier di f.

4. Scrivere l'identità di Parseval (o uguaglianza dell'energia) per f.

5. Verificare direttamente che la serie del punto (3) converge uniformemente e quindi puntualmente.

6. Usare il punto precedente per dedurre la somma della serie armonica generalizzata
$$\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2}\,.$$

Esercizio 6.9. Dopo aver disegnato il grafico della funzione definita sull'intervallo $[-\pi, \pi]$ da
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \dfrac{\pi}{2} \leq |x| \leq \pi \\ -|x| + \dfrac{\pi}{2} & \text{se } |x| \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$
ed estesa a tutto $\mathbb{R}$ per periodicità (con periodo $T = 2\pi$), rispondere ai seguenti quesiti.

1. Determinare la componente continua, la componente fondamentale e la k-sima armonica di f e le loro ampiezze e fasi.

2. Scrivere la serie di Fourier di f.

3. Scrivere l'identità di Parseval (o uguaglianza dell'energia) per f.

4. Verificare direttamente che la serie del punto (3) converge uniformemente e quindi puntualmente. Verificare che la funzione f soddisfa ad uno dei criteri di convergenza uniforme per le serie di Fourier.

Esercizitazione per la seconda prova intercorso | 7

Esercizio 7.1. Si consideri la successione di funzioni

$$f_n\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$$

definita, per $n \geq 1$ da

$$f_n(x) = \begin{cases} n & x \in \left(0, \dfrac{1}{n}\right) \\ \dfrac{1}{nx} & x \in \left[\dfrac{1}{n}, 1\right) \\ \cos(2\pi x) & x \in \left[n, n+\dfrac{1}{2}\right] \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

1. Dire se la successione è equilimitata in $L^\infty((0,+\infty))$, cioè se esiste una costante M tale che $\|f_n\|_\infty \leq M \quad \forall n$.
2. Dire se la successione è equilimitata in $L^1((0,+\infty))$.
3. Dire se la successione è equilimitata in $L^2((0,+\infty))$.
4. Enunciare il teorema di convergenza dominata di Lebesgue e dire se è possibile applicarlo alla successione $\{f_n\}_{n\geq 1}$. Sia $g_n\colon x \in (0,+\infty) \to \dfrac{f_n(x)}{n} \in \mathbb{R}$.

Sia $g_n\colon x \in (0,+\infty) \to \dfrac{f_n(x)}{n} \in \mathbb{R}$.

1. Dire se la successione $\{g_n\}_{n\geq 1}$ è equilimitata in $L^\infty((0,+\infty))$.
2. Dire se la successione $\{g_n\}_{n\geq 1}$ è equilimitata in $L^1((0,+\infty))$, cioè se esiste una costante M tale che $\|g_n\|_1 \leq M \quad \forall n$.
3. Dire se la successione $\{g_n\}_{n\geq 1}$ è equilimitata in $L^2((0,+\infty))$.
4. Enunciare il teorema di convergenza dominata di Lebesgue e dire se è possibile applicarlo alla successione $\{g_n\}_{n\geq 1}$.

Esercizio 7.2. Considerare la seguente equazione del calore con condizioni ai limiti

$$u_{xx} = \frac{1}{C} u_t \quad t \geq 0,\ x \in [0, 2\pi] \tag{5}$$

$$u(t,0) = u(t,2\pi) = 0 \quad t \geq 0 \tag{6}$$

$$u(0,x) = |\sin(x)| \quad x \in [0,2\pi] \tag{7}$$

e rispondere ai seguenti quesiti

1. Usare il metodo di separazione delle variabili per verificare che per ogni $n \in N$, $n \geq 1$, si trova uno spazio vettoriale di dimensione uno di soluzioni di (5) e (6) e determinarne una base.
2. Usare (7) per determinare la soluzione del problema in forma di serie di funzioni.
3. A partire dagli opportuni risultati validi per le serie di Fourier, verificare che la serie determinata al precedente punto è totalmente convergente sia per ogni $t > 0$ fissato che per ogni $x \in [0, 2\pi]$ fissato.
4. Verificare che la funzione trovata tende a 0 per t che tende a $+\infty$, per ogni x fissato.

Esercizio 7.3. Considerare la seguente equazione del calore con condizioni ai limiti

$$u_{xx} = \frac{1}{C} u_t \quad t \geq 0,\ x \in [0, 3] \tag{8}$$

$$u(t, 0) = 1,\ u(t, 3) = 2 \quad t \geq 0 \tag{9}$$

$$u(0, x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, 1] \\ x & x \in [1, 2] \\ 2 & x \in [2, 3] \end{cases} \tag{10}$$

e rispondere ai seguenti quesiti

1. Verificare che una funzione $u(t, x) = v(t, x) + Ax + B$ verifica (8) per ogni valore di $A, B \in \mathbb{R}$ se e solo se $v(t, x)$ verifica (8).
2. Determinare le costanti A, B in modo che da $v(t, 0) = v(t, 3) = 0,\ t \geq 0$ segua che u verifica (9).
3. Determinare $v(0, x),\ x \in [0, 3]$, affinché u verifichi (10).
4. Determinare $v(t, x)$ come serie di funzioni in modo che u verifichi il problema.
5. Fissato $x \in [0, 3]$, a quale funzione tende $u(\cdot, x)$ per t che tende a $+\infty$? Spiegarne il motivo.

Esercizio 7.4. Considerare la seguente equazione della corda vibrante con condizioni ai limiti

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} \quad t \geq 0,\ x \in [0, 2] \tag{11}$$

$$u(t, 0) = u(t, 2) = 0 \quad t \geq 0 \tag{12}$$

$$u(0, x) = 1 - |x - 1| \quad x \in [0, 2] \tag{13}$$

$$u_t(0, x) = 0 \quad x \in [0, 2] \tag{14}$$

e rispondere ai seguenti quesiti

1. Usare il metodo di separazione delle variabili per verificare che per ogni $n \in N$, $n \geq 1$, si trova uno spazio vettoriale di dimensione uno di soluzioni di (11) e (12) e determinarne una base.

2. Usare (13) e (14) per determinare la soluzione del problema in forma di serie di funzioni.

3. A partire dagli opportuni risultati validi per le serie di Fourier, verificare che la serie determinata al precedente punto è totalmente convergente sia per ogni t fissato che per ogni $x \in [0, 2]$ fissato.

4. Nel caso di $c = 1$, determinare la configurazione della corda ai tempi

$$t = 4k\,, \;\; k \in \mathbb{N}$$

e descrivere il movimento $t \mapsto u(t, 1)$ del punto $x = 1$ (usare l'espressione della soluzione del problema per mezzo della condizione al tempo $t = 0$, opportunamente estesa ad $\mathbb{R}$).

Esercizio 7.5. Svolgere tutti gli esercizi proposti sugli argomenti della prova.

Inoltre: domande teoriche, riguardare i concetti introdotti nell'ambito della teoria di Lebesgue; riguardare le definizioni, le possibili convergenze delle serie di Fourier, il calcolo dei coefficienti di Fourier.

Cenni di analisi complessa e serie di potenze 8

Esercizio 8.1. Si considerino le funzioni

$$f\colon z \in \mathbb{C} \to z^n \in \mathbb{C} \qquad g\colon z \in \mathbb{C} \to \overline{z} \in \mathbb{C}$$

con n parametro naturale e dire se soddisfano le condizioni di Cauchy–Riemann

Esercizio 8.2. Sia $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ e sia $g_k\colon z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \dfrac{1}{z^k} \in \mathbb{C}$. Poiché si può applicare la formula per la derivata di funzione composta, è facile vedere che f_k è olomorfa e che $f_k'(z) = \dfrac{-1}{z^{k+1}}$. Nel caso particolare $k = 1$ scrivere le funzioni $u(x, y) = \Re f_1(x + iy)$ e $v(x, y) = \Im f_1(x + iy)$ e verificare che esse soddisfano le condizioni di Cauchy–Riemann.

Esercizio 8.3. Sia $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ e sia $f_k\colon z \in \mathbb{C} \to z^k \in \mathbb{C}$. Verificare che la funzione f_k è suriettiva. Determinare una funzione inversa di f_k che coincida con l'inversa di $f_k|_{\mathbb{R}+}$

Esercizio 8.4. Dimostrare la Proposizione 4.3-2 di [1].

Esercizio 8.5. Per ciascuna delle seguenti funzioni dire se il suo dominio di continuità è un aperto connesso di $\mathbb{C}$:

$$f(z) = \mathrm{Arg}\left(1 + z^2\right) \qquad f(z) = \mathrm{Arg}\left(1 - z^2\right)$$

Esercizio 8.6. Al variare del parametro reale α, si consideri la serie di potenze

$$1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)}{n!} x^n$$

Dimostrare che

1. Se $\alpha \in N$, la serie si riduce ad un polinomio e vale $(1 + x)^k \quad \forall x \in \mathbb{R}$
2. Se $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, allora la serie ha raggio di convergenza $R = 1$; detta

   $$f\colon x \in (-1, 1) \to 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)}{n!} x^n \in \mathbb{R}$$

   la funzione somma della serie, dimostrare che

   a) essa soddisfa l'equazione differenziale $(1 + x)f'(x) = \alpha f(x)$ per ogni $x \in (-1, 1)$;
   b) dedurne che $f(x) = (1 + x)^\alpha$.

Esercizio 8.7. Sfruttando il risultato dell'esercizio precedente, trovare un'espressione in serie di potenze per le funzioni $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ e $g(x) = \arcsin(x)$.

Esercizio 8.8. Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$\operatorname{Ln}\left(\frac{i}{\sin(iz)}\right) = \frac{i\pi}{2}.$$

Esercizio 8.9. Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$i \operatorname{Ln}\left(z^2\right) + \operatorname{Ln}\left|z^2\right| = k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Determinare k in modo che due delle soluzioni dell'equazione individuano un triangolo equilatero con il punto $z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{\frac{4}{3}\pi i}$.

Esercizio 8.10. Determinare, se esiste una funzione olomorfa tale che

$$\Im f(x+iy) = \cosh(x)\sin(y).$$

Esercizio 8.11. Sia $f\colon z \in \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \operatorname{Ln}(2z) \in \mathbb{C}$. Tracciare sul piano complesso le linee di livello delle funzioni $\Re f$ e $\Im f$.

Esercizio 8.12. Calcolare il raggio di convergenza di ciascuna delle seguenti serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^{\ln n} z^n\,, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} n^n z^n\,, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^n}{n!} z^n\,, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} (n+\alpha^{2n}) z^n\,,\ \alpha \in \mathbb{C}$$

Esercizio 8.13. Determinare l'insieme di convergenza e calcolare la somma delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-x^2)^n}{n!}; \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(3x-2)^{n+1}}{n+1}.$$

Esercizio 8.14. Sia $f(x) = \dfrac{1}{7+x}$. Sviluppare f in serie di MacLaurin e in serie di Taylor in un intorno di $c = 3$. Determinare l'insieme di convergenza.

Esercizio 8.15. Determinare l'insieme di convergenza delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n-1} x^n; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+2}{2n} x^n; \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n 2^n \ln(n)}.$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n} x^n; \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!} x^n; \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3^n}{n^2} x^n.$$

Esercizio 8.16. Sviluppare le seguenti funzioni in serie di MacLaurin, indicando l'insieme di convergenza della serie.

$$f(x) = \cos(3x^2); \qquad f(x) = \frac{\exp(3x^3)-1}{x^2}; \qquad f(x) = \frac{x}{4-x^2}.$$

Esercizio 8.17. Sviluppare in serie di Taylor con centro nel punto a fianco indicato. Indicare l'insieme di convergenza.

$$f(x) = \ln(x), \qquad c = 3;$$
$$f(x) = \frac{x}{2+x}, \qquad c = 1.$$

Esercizio 8.18. Calcolare la somma della serie

$$x^3 - \frac{x^9}{3!\,4} + \frac{x^{15}}{5!\,16} - \frac{x^{21}}{7!\,64} + \frac{x^{27}}{9!\,256} + \dots$$

Esercizio 8.19. Calcolare la somma della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{\pi^n}$.

Esercizio 8.20. Determinare l'insieme di convergenza delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{n!} x^n; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n 2^n} x^n; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+9)^{n-1}}{(n-1)^2};$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^n (x+7)^n; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n^2} \left(\frac{3x-2}{2}\right)^n.$$

Trasformata di Fourier, equazioni del calore e delle onde sul semipiano 9

Esercizio 9.1. Calcolare la trasformata di Fourier di $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4x + 8}$.

Esercizio 9.2. Calcolare la trasformata di Fourier della funzione riportata in Figura 3

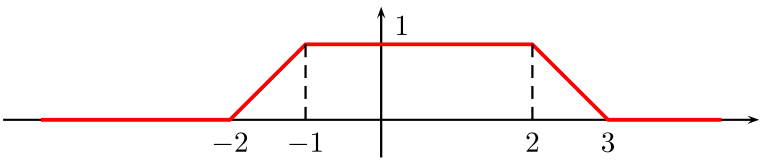


Figura 3: Esercizio 9.2

Esercizio 9.3. Calcolare la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = (3 - 6|x|)\cos(x)\chi_{[-1/2,1/2]}(x)$$

Esercizio 9.4. Calcolare la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \in [0,1] \\ \exp(1-x) & x > 1 \end{cases}$$

Esercizio 9.5. Calcolare la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = x \exp(-|x|)$$

Esercizio 9.6. Calcolare la trasformata di Fourier della funzione riportata in Figura 4

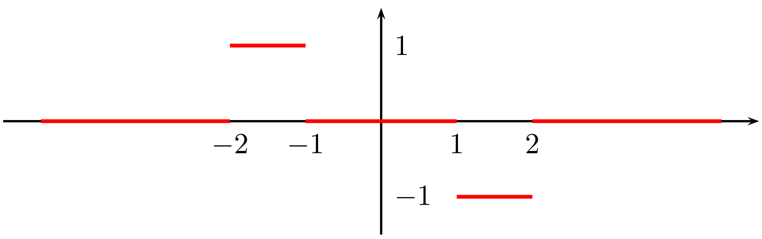


Figura 4: Esercizio 9.6

Esercizio 9.7. Per ogni $t > 0$ tracciare il grafico della funzione $u\colon (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty) \to u(x,t) \in \mathbb{R}$ soluzione del problema

$$\begin{array}{ll} u_{tt} = c^2 u_{xx} & (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,+\infty) \\ u(x,0) = (1-|x|)^+ & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = 0 & x \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Esercitazione per la terza prova intercorso 10

Esercizio 10.1. Determinare, se esiste, una funzione olomorfa tale che

$$\Re f(x+iy) = x + \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Sviluppare la funzione così ottenuta in serie di potenze di centro $z_0 = i$.
Sia $g(y)$ la restrizione di f all'asse immaginario e sia $h(y) = g(y)\chi_{[1,2]}(|y|)$, verificare che $h \in L^1(\mathbb{R})$ e calcolarne la trasformata di Fourier.

Esercizio 10.2. Al variare del parametro reale a, risolvere per serie di potenze il seguente problema di Cauchy

$$\begin{aligned} &y''(x) + \left(2 - 4x^2\right) y(x) = 0 \\ &y(0) = a \\ &y'(0) = 0 \end{aligned}$$

Usando il principio di induzione, trovare una formula esplicita per $y(x)$.

Primo appello 11

Esercizio 11.1. Considerare la seguente equazione del calore con condizioni ai limiti

$$u_{xx} = \frac{1}{C} u_t \quad t \geq 0,\ x \in [0,5] \tag{1}$$

$$u(t,0) = 2,\ u(t,5) = -2 \quad t \geq 0 \tag{2}$$

$$u(0,x) = 2\cos\left(\frac{\pi}{5}x\right) \quad x \in [0,5] \tag{3}$$

e rispondere ai seguenti quesiti

1. Verificare che una funzione $u(t,x) = v(t,x) + Ax + B$ verifica (1) per ogni valore di $A, B \in \mathbb{R}$ se e solo se $v(t,x)$ verifica (1).
2. Determinare le costanti A, B in modo che da $v(t,0) = v(t,5) = 0,\ t \geq 0$ segua che u verifica (2).
3. Determinare $v(0,x),\ x \in [0,5]$, affinché u verifichi (3).
4. Determinare $v(t,x)$ come serie di funzioni in modo che u verifichi il problema.
5. Fissato $x \in [0,5]$, a quale funzione tende $u(\cdot,x)$ per t che tende a $+\infty$? Spiegarne il motivo.

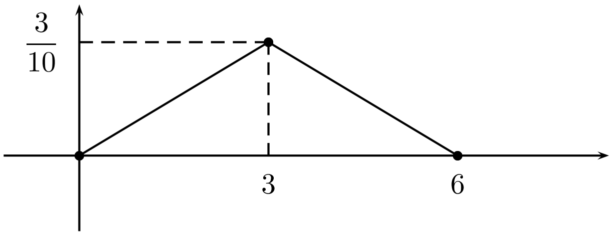
Esercizio 11.2. Si consideri il seguente problema differenziale

$$x^2y'' - 2x^3y' - \left(2 + 6x^2\right)y = 0 \quad x > 0$$
$$\lim_{x\to 0^+} y(x) = \lim_{x\to 0^+} y'(x) = 0$$

Usando il metodo delle serie di potenze (opportunamente modificato, per tenere presenti eventuali singolarità nell'origine) determinare l'insieme delle soluzioni del problema differenziale Usando il principio di induzione, esplicitare tale insieme.

Secondo Appello 12

Esercizio 12.1. Il punto medio di una corda elastica di lunghezza 6, fissata agli estremi, viene spostato di una quantità $\frac{3}{10}$ e lasciato andare (senza imprimere alla corda velocità iniziale).



Supponendo che le vibrazioni della corda soddisfino all'equazione delle onde monodimensionale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{quasi ovunque } (t, x) \in [0, +\infty) \times [0, 6]$$

dove c è la costante elastica e $u(t, x)$ è lo spostamento al tempo t del punto di ascissa x, rispondere ai seguenti quesiti.

1. Determinare per serie la vibrazione $u(t, x)$ della corda, descrivendo sia il metodo di separazione delle variabili che la teoria delle serie di Fourier che viene utilizzata.

2. Verificare che la soluzione è periodica rispetto al tempo e determinare il periodo.

3. Dopo aver definito la convergenza uniforme di una serie di funzioni continue, verificare che la serie trovata è uniformemente convergente ad una funzione continua.

Esercizio 12.2. i consideri la successione di funzioni $f_n : x \in \mathbb{R} \to f_n(x) \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$, definita da

$$f_n(x) = \begin{cases} \cos(nx) & |x| \leq \dfrac{\pi}{2n} \\ \dfrac{2nx}{\pi} - \operatorname{sgn}(x) & \dfrac{\pi}{2n} < |x| \leq \dfrac{\pi}{n} \\ \dfrac{\pi}{nx} & |x| > \dfrac{\pi}{n}. \end{cases}$$

1. Discutere la convergenza puntuale ed uniforme della successione $\{f_n\}_{n\geq 1}$;

2. Discutere la convergenza uniforme di $\{f_n\}_{n\geq 1}$ in $\left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right)$;

3. la successione è contenuta in $L^1(\mathbb{R})$? In caso affermativo, è equilimitata in tale spazio?

4. la successione è contenuta in $L^2(\mathbb{R})$? In caso affermativo, è equilimitata in tale spazio?

Terzo Appello 13

Esercizio 13.1. La temperatura di una sbarra di lunghezza 3 al tempo $t = 0$ è distribuita secondo la funzione $u_0(x) = 2x^2$. Si vuol determinare il valore della temperatura ad ogni istante in ogni punto della sbarra, sapendo che la temperatura agli estremi viene mantenuta costante. Si ricorda che questo problema si riconduce a risolvere la seguente equazione del calore con condizioni ai limiti

$$u_{xx} = \frac{1}{C} u_t \quad t \geq 0,\ x \in [0,3] \tag{1}$$
$$u(t,0) = 0,\ u(t,3) = 18 \quad t \geq 0 \tag{2}$$
$$u(0,x) = 2x^2 \quad x \in [0,3]. \tag{3}$$

Per trovare la soluzione si procede secondo i seguenti passi

1. Si determinano le costanti A, B in modo che la funzione $v(t,x) = u(t,x) - Ax - B$ verifichi l'equazione (1) con condizioni al bordo $v(t,0) = v(t,3) = 0$.
2. Si calcola v col metodo di separazione delle variabili.

Determinare $u(t,x)$ seguendo il precedente schema e illustrando la teoria usata con opportuni grafici.

A quale funzione tende la temperatura della sbarra quando il tempo tende all'infinito?

Definiamo una successione di funzioni considerando la distribuzione di temperatuta della sbarra al tempo n, cioè poniamo $f_n(x) = u(n,x)$. La successione di funzioni converge uniformemente? Spiegarne il motivo. Fissato $x \in [0,3]$, a quale funzione tende $u(\cdot,x)$ per t che tende a $+\infty$? Spiegarne il motivo.

Esercizio 13.2. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n>1}$ dove $f_n \colon x \in \mathbb{R} \mapsto f_n(x) \in \mathbb{R}$ è definita da

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq \dfrac{1}{n} \\ \dfrac{n(n-x)}{n^2-1} & \dfrac{1}{n} < x \leq n \\ 0 & x > n \\ (nx)^{-2} & x < \dfrac{-1}{n} \end{cases}$$

1. È equilimitata in $L^\infty(\mathbb{R})$?
2. È equilimitata in $L^1(\mathbb{R})$?
3. È equilimitata in $L^2(\mathbb{R})$?
4. Studiarne la convergenza puntuale.

5. Studiare la convergenza uniforme di $\left\{ f_n|_{(0,+\infty)} \right\}$, e $\left\{ f_n|_{(-\infty,0)} \right\}$

6. È possibile passare a limite sotto il segno di integrale nelle semirette $(0, +\infty)$ e $(-\infty, 0)$? Usando quale teoria dell'integrazione?