16 aprile 2008

## Esercizio 1

$$a_n = \cos\left(\ln\left(1+\frac{\beta}{n}\right)\right) - \sqrt{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}\,, \qquad n \geq 1$$

$\beta$ parametro reale

Abbiamo $\lim_{n\to\infty} \frac{\beta}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Inoltre:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad x \to 0$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \qquad x \to 0$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2) \qquad x \to 0$$

Quindi:

$$\ln\left(1+\frac{\beta}{n}\right) = \frac{\beta}{n} - \frac{\beta^2}{2}\frac{1}{n^2} + o(n^{-2}) \qquad n \to \infty$$

$$\cos\left(\ln\left(1+\frac{\beta}{n}\right)\right) = \cos\left(\frac{\beta}{n} - \frac{\beta^2}{2}\frac{1}{n^2} + o(n^{-2})\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{n} - \frac{\beta^2}{2}\frac{1}{n^2} + o(n^{-2})\right)^2 + o(n^{-3})$$

$$= 1 - \frac{\beta^2}{2}\frac{1}{n^2} + \frac{\beta^3}{2}\frac{1}{n^3} + o(n^{-3})$$

$$\cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + o(n^{-3})$$

$$\sqrt{\cos\left(\frac{1}{n}\right)} = \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + o(n^{-3})\right)} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + o(n^{-3})\right) - \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + o(n^{-3})\right)^2 + o(n^{-4})$$

$$= 1 - \frac{1}{4}\frac{1}{n^2} + o(n^{-3})$$

Dunque $a_n = \left(-\frac{\beta^2}{2} + \frac{1}{4}\right)\frac{1}{n^2} + \frac{\beta^3}{2}\frac{1}{n^2} + o(n^{-3})$

Dunque $b_n = n\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\beta^2\right) + \frac{1}{2}\beta^3 + o(1)$
e quindi converge SSE $\frac{1}{4} - \frac{\beta^2}{2} = 0$ cioè SSE
$\beta^2 = \frac{1}{2}$ dunque SSE $\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ o $\beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

In corrispondenza di tali valori abbiamo.

① $\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad a_n = \frac{\sqrt{2}}{8}\frac{1}{n^3} + o(n^{-3})$

② $\beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad a_n = -\frac{\sqrt{2}}{8}\frac{1}{n^3} + o(n^{-3})$

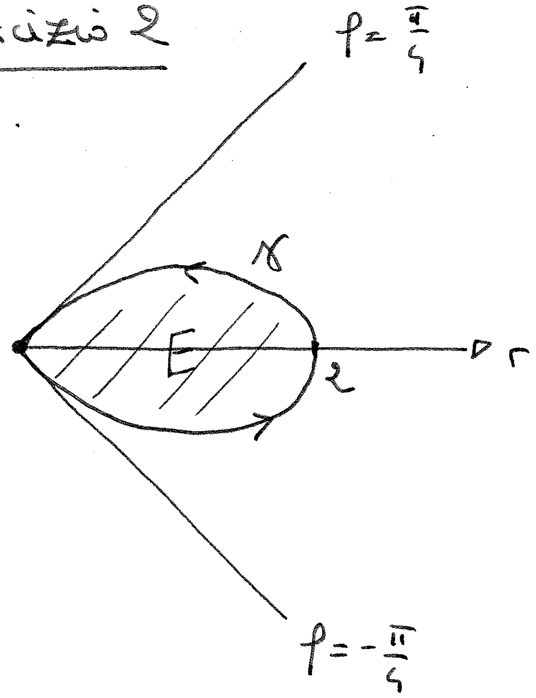
In entrambi i casi la successione $a_n$ è a segno definitivamente costante, dunque anche la successione

$$n^\gamma a_n = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{8} n^{\gamma-3} + o(n^{\gamma-3}) & \beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{8} n^{\gamma-3} + o(n^{\gamma-3}) & \beta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

ha segno definitivamente costante e, per il criterio del confronto asintotico converge SSE la serie $\sum n^{\gamma-3}$ converge.
Si tratta di una serie armonica generalizzata che converge SSE $\gamma-3<-1$ cioè SSE $\gamma<2$.

Enunciare il criterio del confronto asintotico

## Esercizio 2

1) 


$$r(\varphi) = 2\cos(2\varphi)$$
$$\varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$$

2) $\gamma$ è una curva polare $\Rightarrow$ è regolare sse $\forall \varphi \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ si ha $(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2 > 0$

Ma $(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2 = (2\cos(2\varphi))^2 + (-4\sin(2\varphi))^2 = 0$ sse $\cos(2\varphi) = \sin(2\varphi) = 0$ che è impossibile.
Quindi $\gamma$ è una curva regolare.

3) $$L(\gamma) = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2}\, d\varphi = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{4\cos^2(2\varphi) + 16\sin^2(2\varphi)}\, d\varphi$$

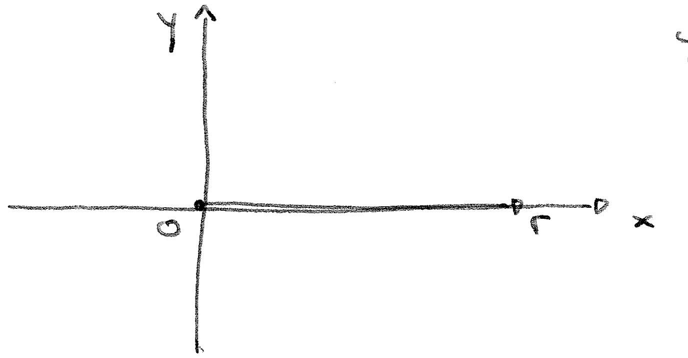
4) $$A(E) = \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} r^2(\varphi)\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 4\cos^2(2\varphi)\, d\varphi =$$

$$= \cancel{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1+\cos(4\varphi)}{\cancel{2}}\, d\varphi = \varphi + \frac{1}{4}\sin(4\varphi)\Big|_{\varphi = -\frac{\pi}{4}}^{\varphi = \pi/4}$$

$$= \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Per simmetria il baricentro di E si trova sull'asse polare.

Per determinare la distanza di E dal polo, osserviamo che, introducendo un sistema di coordinate cartesiane coerente con il sistema di coordinate polari, come in figura, si ha




$$\Psi(r,\varphi) = \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

$$r(B) = x(B) = \frac{1}{|E|}\iint_E x\,dx\,dy = \frac{1}{|E|}\iint_{\Psi^{-1}(E)} r\cdot r\cos\varphi\,dr\,d\varphi =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left(\int_0^{2\cos(2\varphi)} r^2\cos(\varphi)\,dr\right)d\varphi = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{8}{3}\cos^3(2\varphi)\cos(\varphi)\,d\varphi$$

$$= \frac{16}{3\pi}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left(1-2\sin^2(\varphi)\right)^3\cos(\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \frac{16}{3\pi}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left(1-6\sin^2(\varphi)+12\sin^4(\varphi)-8\sin^6(\varphi)\right)\cos(\varphi)\,d\varphi$$

$$= \frac{16}{3\pi}\left(\sin(\varphi)-2\sin^3(\varphi)+\frac{12}{5}\sin^5(\varphi)-\frac{8}{7}\sin^7(\varphi)\right)\Bigg|_{\varphi=-\frac{\pi}{4}}^{\pi/4}$$

$$= \frac{32}{3\pi}\left(\frac{\sqrt2}{2}-\cancel{2}\,\frac{\cancel{2}\sqrt2}{\cancel{8}\,2}+\frac{\overset{3}{\cancel{12}}}{5}\,\frac{\cancel{4}\sqrt2}{\underset{2}{\cancel{32}}\,\cancel{8}}-\frac{\cancel{8}}{7}\,\frac{\cancel{8}\sqrt2}{2\cancel{7}}\right) =$$

$$= \frac{\overset{16}{\cancel{32}}}{3\pi}\,\frac{\sqrt2}{\cancel{2}}\left(\cancel{1}-\cancel{1}+\frac{3}{5}-\frac{1}{7}\right) = \frac{16\sqrt2}{3\pi}\,\frac{21-5}{35} = \frac{16^2\sqrt2}{3\cdot35\pi}$$

$$= \frac{256}{105\pi}\sqrt2$$

Quindi il baricentro di $E$ ha coordinate polari

$$\left(\frac{256\sqrt{2}}{105\pi}, 0\right)$$

Per calcolare il Volume del solido posso applicare il Teorema di Guldino (visto che abbiamo già calcolato la distanza del baricentro di $E$ dall'asse di rotazione, che indico $a$)
Abbiamo

$$V = 2\pi\, A(E)\, \mathrm{dist}(B_E, a) =$$

$$= \cancel{2}\pi \frac{\pi}{\cancel{2}} \frac{256}{105\cancel{\pi}}\sqrt{2} = \frac{256\sqrt{2}}{105}\pi$$

Con il sistema di coordinate cartesiane appena introdotto possiamo scrivere le eq. parametriche di $\gamma$:

$$\gamma: \begin{cases} x = 2\cos(2\varphi)\cos(\varphi) \\ y = 2\cos(2\varphi)\sin(\varphi) \end{cases} \qquad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$$

$$\gamma'(\varphi) = \begin{pmatrix} -4\sin(2\varphi)\cos(\varphi) - 2\cos(2\varphi)\sin(\varphi) \\ -4\sin(2\varphi)\sin(\varphi) + 2\cos(2\varphi)\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\gamma\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2},\ 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\gamma'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(-\cancel{4}\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} - \cancel{2}\frac{1}{\cancel{2}}\frac{1}{2},\ -\cancel{4}\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\frac{1}{\cancel{2}} + \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \left(-\frac{7}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$$

Le eq. parametriche della retta Tangente sono

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -7/2 \\ -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{7}{2}\lambda \\ y = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\lambda = \frac{2}{7}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - x\right) = \frac{\sqrt{3}}{7} - \frac{2}{7}x$$

quindi l'eq cartesiana è

$$y = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{7} - \frac{2}{7}x\right)$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{7}x + \frac{1}{2} - \frac{3}{14}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{14} = \frac{7-3}{14} = \frac{2}{7}$$

$$\boxed{y = \frac{\sqrt{3}}{7}x + \frac{2}{7}}$$

Esercizio 3

$$f(x,y) = \sqrt{|x^2+xy|}$$

La funzione f è definita su tutto $\mathbb{R}^2$. È composizione di funzioni continue $\Rightarrow$ è $C^0(\mathbb{R}^2)$.
~~[illegible]~~
È derivabile infinite volte nei pti in cui $x^2+xy \neq 0$
Devo studiare la derivabilità e la differenziabilità solo nei pti in cui $x^2+xy=0$
Infatti

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+xy} & x^2+xy \geq 0 \\ \sqrt{-x^2-xy} & x^2+xy < 0 \end{cases}$$

e se $(x_0,y_0)$ è un pto t.c. $x_0^2+x_0y_0=0$, allora in ogni suo intorno cadranno sia pti $(x,y)$ t.c. $x^2+xy \geq 0$ sia pti $(x,y)$ t.c. $x^2+xy<0$

Se $x_0^2+x_0y_0=0$, allora ci sono due possibilità

1. $(x_0,y_0)$ è t.c. $x_0=0$
2. $(x_0,y_0)$ è t.c. $y_0=-x_0$

1° caso Pto del tipo $(0,y_0)$ $y_0 \in \mathbb{R}$

$$\frac{f(0+t,y_0)-f(0,y_0)}{t} = \frac{\sqrt{|t^2+ty_0|}-0}{t} =$$

$$= \frac{\sqrt{|t|\,|y_0+t|}}{t}$$

Dunque $\lim_{t\to 0^+} \frac{f(0+t,y_0)-f(0,y_0)}{t} = \begin{cases} +\infty & y_0 \neq 0 \\ 1 & y_0 = 0 \end{cases}$

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{f(0+t,y_0)-f(0,y_0)}{t} = \begin{cases} -\infty & y_0 \neq 0 \\ -1 & y_0 = 0 \end{cases}$$

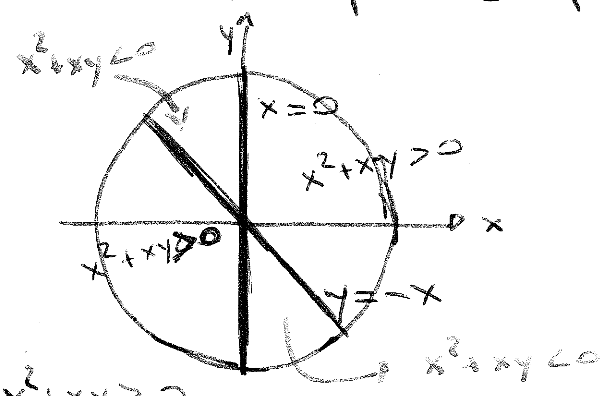
Dunque $\frac{\partial f}{\partial x}$ non esiste in alcun pto del tipo $(0,y_0)$
$\Rightarrow$ f non è né derivabile né differenziabile in tali pti

Devo vedere cosa succede per i pti del tipo $(x_0,-x_0)$

$$\frac{f(x_0+t,-x_0)-f(x_0,-x_0)}{t} = \frac{\sqrt{(x_0+t)t}}{t}$$

cioè i rapporti incrementali hanno la stessa forma vista nel caso precedente $\Rightarrow$ f non è né derivabile né differenziabile nei pti del tipo $(x_0,-x_0)$

$$f(x,y) = \sqrt{|x^2+xy|}$$




(1) Cerco i pti critici

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} \dfrac{2x+y}{2\sqrt{|x^2+xy|}} & x^2+xy>0 \\[2ex] \dfrac{-2x-y}{2\sqrt{-(x^2+xy)}} & x^2+xy<0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} \dfrac{x}{2\sqrt{x^2+xy}} & x^2+xy>0 \\[2ex] \dfrac{-x}{2\sqrt{x^2+xy}} & x^2+xy<0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ non esistono pti critici interni al dominio

② Pti interni al dominio in cui f non è derivabile:
In questi pti f vale 0

③ Frontiera $\quad \gamma \begin{cases} x = \cos(\varphi) \\ y = \sin(\varphi) \end{cases} \quad \varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$

$$g := f \circ \gamma(\varphi) = \sqrt{|\cos^2(\varphi) + \cos(\varphi)\sin(\varphi)|} =$$

$$= \sqrt{\left| \frac{1+\cos(2\varphi) + \sin(2\varphi)}{2} \right|}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{|1+\cos(2\varphi) + \sin(2\varphi)|}$$

$$g'(\varphi) = \begin{cases} \dfrac{-\sin(2\varphi) + \cos(2\varphi)}{\sqrt{2}\sqrt{1+\cos(2\varphi)+\sin(2\varphi)}} & 1+\cos(2\varphi)+\sin(2\varphi) > 0 \\[2ex] \dfrac{\sin(2\varphi) - \cos(2\varphi)}{\sqrt{2}\sqrt{-1-\cos(2\varphi)-\sin(2\varphi)}} & 1+\cos(2\varphi)+\sin(2\varphi) < 0 \end{cases}$$

$$g'(\varphi) = 0 \text{ sse } \begin{cases} -\sin(2\varphi) + \cos(2\varphi) = 0 \\ 1+\cos(2\varphi)+\sin(2\varphi) \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{sse} \qquad 2\varphi = \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$$

Nei pti in cui g non è derivabile, abbiamo $g = 0$

$$g\left(\frac{\pi}{8}\right) = g\left(\frac{\pi}{8}+\pi\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\sqrt{2}}$$

$$g\left(\frac{5}{8}\pi\right) = g\left(\frac{5}{8}\pi - \pi\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left|1+\cancel{2}\cdot\frac{-\sqrt{2}}{\cancel{2}}\right|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{2}-1}$$

Dunque il max assoluto $= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{2}+1}$ assunto nei pti $\left(\cos\frac{\pi}{8}, \sin\frac{\pi}{8}\right)$ e $\left(\cos\frac{9}{8}\pi ; \sin\frac{9}{8}\pi\right)$

Il minimo è zero ed è assunto sull'intersezione tra l'asse y e il cerchio: $\{0\}\times[-1,1]$
e sull'intersezione tra la retta $x+y=0$ ed il cerchio: $\{(t,-t) \quad t\in[-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}]\}$.

## Esercizio 4

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(n-1)}{n(n+1)} x^{2n}$$

Pongo $y=2x^2$ posso riscrivere la serie nella forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n(n+1)} y^n$$

Calcolo il raggio della serie in $y$:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n}{\cancel{(n+1)}(n+2)} \cdot \frac{n\cancel{(n+1)}}{n-1} \to 1$$

$$y=1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n(n+1)}$$

Ma $\frac{n-1}{n(n+1)}$ è una successione definitivamente positiva

Inoltre $\lim \frac{\frac{n-1}{n(n+1)}}{\frac{1}{n}} = 1$

Poiché la serie armonica diverge, anche la serie $\sum \frac{n-1}{n(n+1)}$ diverge

Quindi la serie originale converge sse $2x^2 < 1$
cioè sse $x \in \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Quindi $I = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Per calcolare la somma della serie uso ancora la serie in $y$:

$$g : y \in (-1,1) \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n(n+1)} y^n \in \mathbb{R}$$

$$\frac{n-1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} \qquad n-1 = A(n+1) + Bn$$

$$\begin{cases} A+B = 1 \\ A = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = -1 \\ B = 2 \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n(n+1)} y^n = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} y^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n} \qquad \forall y \in (-1,1)$$

$$= \frac{2}{y} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} y^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n}$$

$$= \frac{2}{y} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^y t^n \, dt - \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^y t^{n-1} \, dt$$

$$= \frac{2}{y} \int_0^y \sum_{n=1}^{\infty} t^n \, dt - \int_0^y \sum_{k=0}^{\infty} t^k \, dt =$$

$$= \frac{2}{y} \int_0^y \left(\frac{1}{1-t} - 1\right) dt - \int_0^y \frac{1}{1-t} \, dt$$

$$= \frac{2}{y}\left(-\ln(1-y) - y\right) + \ln(1-y)$$

$$= \ln(1-y) \cdot \left(1 - \frac{2}{y}\right) - 2$$

Quindi $f: x \in \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \longmapsto \ln(1-2x^2)\left(1-\frac{1}{x^2}\right) - 2 \in \mathbb{R}$