# Analisi Matematica II con Elementi di Probabilità e Statistica

Raccolta di appunti ed esercizi

Laura Poggiolini

Dipartimento di Matematica Applicata Giovanni Sansone

Università di Firenze

# Indice

# Parte I

## Appunti ed Esercizi vari

# 1

# Richiami sulle successioni reali

## 1.1. Monotonia

**Esempio 1.1.1.** Due esempi di successione limitate e irregolari (e non monotone):

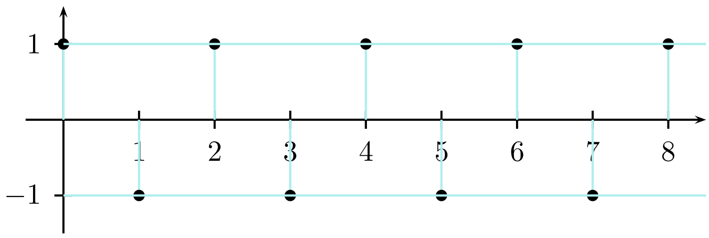



Figura 1.1: $a_n = (-1)^n$

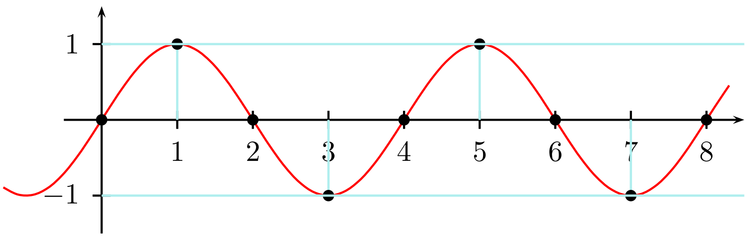



Figura 1.2: $a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

**Esercizio 1.1.1.** Verificare le proprietà di monotonia di ciascuna delle seguenti successioni.

$$a_n = 2^n\,, \quad b_n = \frac{n+1}{n+2}\,.$$

**Esercizio 1.1.2.** Verificare che la successione

$$a_n = \frac{2n-1}{n}$$

è strettamente crescente e limitata, sia usando le definizioni che ricorrendo allo studio di una opportuna funzione di variabile reale.

### 1.2. Limite di successione

**Esercizio 1.2.1.** Verificare le seguenti uguaglianze

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0\,, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n} = \frac{2}{3}\,.$$

**Esercizio 1.2.2.** Verificare i seguenti limiti

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+5}{\sqrt{n}} = +\infty\,,\ \lim_{n\to\infty}\frac{-n^2}{n+1} = -\infty$$

**Osservazione 1.2.1.** Sia $f\colon x \in (x_0, +\infty) \to f(x) \in \mathbb{R}$ una funzione di variabile reale definita su una semiretta destra. Supponiamo che esista $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Sia $\{a_n\}_{n>\lfloor x_0\rfloor}$ la successione definita da $a_n = f(n) \quad \forall n > \lfloor x_0 \rfloor$. Allora esiste $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

**Esempio 1.2.1.** $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ e $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

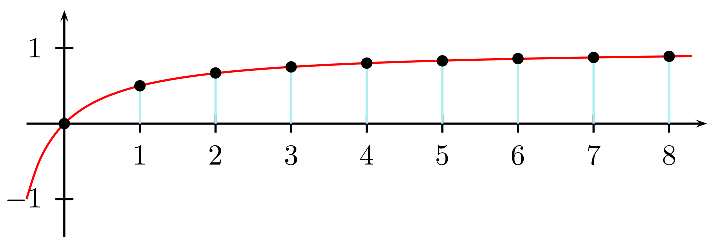



Figura 1.3: $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ e $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

**Osservazione 1.2.2.** L'osservazione 1.2.1 non può essere invertita: si considerino per esempio

$$f(x) = \sin(\pi x) \text{ e } a_n = f(n) = \sin(\pi n)$$

Sappiamo allora che $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ non esiste. D'altra parte $a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ e dunque esiste $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

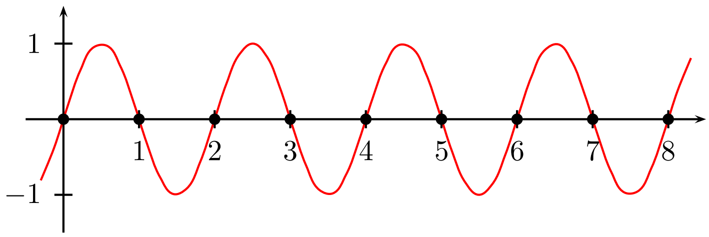



Figura 1.4: $a_n = \sin(\pi n)$ e $f(x) = \sin(\pi x)$

### 1.2.1. Due limiti notevoli

**Esempio 1.2.2.** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

*Dimostrazione.* Consideriamo la funzione $f\colon x \in [1, +\infty) \to x^{\frac{1}{x}} \to \mathbb{R}$. Poiché $f(x) = \exp\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)$, e la funzione esponenziale una funzione continua, sufficiente osservare che $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$. □

**Esempio 1.2.3.** Sia $x$ è un parametro reale; si consideri $a_n = x^n$. Si ha:

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & x > 1 \\ 1 & x = 1 \\ 0 & |x| < 1 \\ \text{ non esiste} & x \leq -1 \end{cases} \tag{1.1}$$

*Dimostrazione.* Se $x = 0$, $a_n = x^n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Se $x > 0$, possiamo scrivere $x^n = \exp(\ln(x^n)) = \exp(n \ln(x))$. Poiché $\lim\limits_{n\to\infty} n \ln(x) = \begin{cases} +\infty & x > 1 \\ 0 & x = 1 \\ -\infty & 0 < x < 1 \end{cases}$ e poiché la funzione esponenziale $\exp(\cdot)$ è continua, otteniamo la tesi.
Se $x < 0$, osserviamo che $x^n = (-1)^n |x|^n$ e dunque, se $x \in (-1, 0)$ abbiamo che $a_n = x^n$ è il prodotto tra una successione oscillante ma limitata e una successione convergente a 0. Dunque converge a 0.
Se $x \leq -1$, allora abbiamo

$$x^n \geq 1 \text{ se } n \text{ è pari}$$
$$x^n \leq -1 \text{ se } n \text{ è dispari}$$

e dunque non può convergere. □

**Esempio 1.2.4.**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{1.2}$$

*Dimostrazione.* Fissato $N \in \mathbb{N}$ con $N > |x|$, sia $n > N$. Allora

$$\begin{aligned} \left|\frac{x^n}{n!}\right| &= \frac{|x|^N \ |x|^{n-N}}{N!(N+1)(N+2)\dots(n-1)n} \le \frac{|x|^N}{N!}\left(\frac{|x|}{N+1}\right)^{n-N} \\ &= \frac{|x|^N}{N!}\left(\frac{|x|}{N+1}\right)^{-N}\left|\frac{x}{N+1}\right|^n \end{aligned}$$

Il prodotto $\dfrac{|x|^N}{N!}\left(\dfrac{|x|}{N+1}\right)^{-N}$ è costante perché $N$ e $x$ sono fissati. Per la scelta di $N$ abbiamo anche $\left|\dfrac{x}{N+1}\right| < 1$ e dunque $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x}{N+1}\right|^n = 0$. □

### 1.3. Esercizi

**Esercizio 1.3.1.** Calcolare $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+1}\right)$, sia manipolando opportunamente la differenza di radici che riconducendosi allo studio dei limiti di funzione reale per $x \to 0^+$.

**Esercizio 1.3.2.** Studiare le proprietà di monotonia e limitatezza per le successioni seguenti:

$$a_n = \frac{2n+5}{n+3}; \quad b_n = ne^{-n}.$$

**Esercizio 1.3.3.** Verificare, in base alla definizione di limite, le seguenti uguaglianze:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0; \quad \lim_{n\to\infty}(8-\log_2 n) = -\infty;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n-5}{4n} = \frac{3}{4}; \quad \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{n} = +\infty.$$

**Esercizio 1.3.4.** Studiare le proprietà di monotonia e limitatezza per le successioni seguenti:

$$2^n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right); \quad \frac{1}{n!}; \quad \frac{1}{9n-2}; \quad \frac{n+6}{n+2}.$$

**Esercizio 1.3.5.** Verificare, in base alla definizione di limite, le seguenti uguaglianze:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-n^2}{1+n} = -\infty; \quad \lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n}\right) = +\infty.$$

**Esercizio 1.3.6.** Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+9n}-\sqrt{n^2+4}\right), \qquad \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{\frac{n+1}{n+3}}-1\right),$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n}\right).$$

# 2
# Serie numeriche

## 2.1. Serie numeriche: proprietà algebriche

Valgono proprietà algebriche e di ordinamento, analoghe a quelle che valgono per le successioni convergenti

**Proprietà 2.1.1.** Se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ sono due serie convergenti e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \pm \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \,,$$
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda a_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \,,$$
$$\text{se } a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ allora } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \,.$$

### 2.1.1. Un ulteriore criterio di convergenza per le serie a termini non negativi

**Teorema 2.1.1** (Criterio di confronto al limite)**.** *Sia $\{a_n\}$ una successione a termini non negativi e sia $\{b_n\}$ una successione a termini positivi. Supponiamo che esista $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$. Allora*

- *se $L \in (0, +\infty)$, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ hanno lo stesso carattere;*
- *se $L = 0$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge, allora anche $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge;*

- *se* $L = +\infty$ *e* $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ *diverge, allora anche* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *diverge.*

### 2.2. Esercizi

**Esercizio 2.2.1.** Determinare il carattere delle seguenti serie e, se convergono, calcolarne la somma.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{-k}, \quad \sum_{k=2}^{+\infty} 3^{-k}, \quad \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{-k}, \quad \sum_{k=-1}^{+\infty} \pi^{-k}. \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^{k+3}}{3^{k-2}}.$$

**Esercizio 2.2.2.** Determinare il carattere delle seguenti serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n^2-4} \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\ln(n)} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^n}{\pi^n n!}$$

**Esercizio 2.2.3.** Determinare il carattere delle seguenti serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n^3+1}, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^4}, \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{3^n \ln n}, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!\, 6^n}{(3n)!}.$$

**Esercizio 2.2.4.** Al variare di $p \in [0, +\infty)$ determinare il carattere della serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$.

**Esercizio 2.2.5.** Al variare del parametro reale $x \in \mathbb{R}$, determinare il carattere della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$

**Esercizio 2.2.6.** Al variare del parametro reale $x \in \mathbb{R}$, determinare il carattere della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^n}{x^n n!}$.

**Esercizio 2.2.7.** Determinare il carattere delle seguenti serie geometriche e, se convergono, calcolarne la somma:

$$\sum_{n=2}^{\infty} 3^{-n}; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{n-1}}{5^{n+2}}.$$

**Esercizio 2.2.8.** Determinare il carattere delle seguenti serie a termini non negativi:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+4n}{n^3+7}; \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3-n}}; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+1}{3^n+n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{\pi^n n!}.$$

**Esercizio 2.2.9.** Determinare, al variare del parametro, il carattere delle seguenti serie:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}, \quad p \geq 0;$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^{\alpha} a^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \; a \geq 0;$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\exp(n^{\beta}) - 1\Big)\, n^2, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

**Esercizio 2.2.10.** Determinare il carattere delle seguenti serie geometriche e, se convergono, calcolarne la somma:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{-k}; \quad \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi}\right)^{k}; \quad \sum_{k=3}^{\infty} 2^{-k}; \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{k+3}}{3^{k-2}}.$$

**Esercizio 2.2.11.** Determinare il carattere delle seguenti serie a termini non negativi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2}; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n}; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!\, 6^n}{(3n)!}; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^2+n+1}}; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+3}{2n^3+2n+7}.$$

**Esercizio 2.2.12.** Determinare, al variare del parametro, il carattere delle seguenti serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n^n}, \quad a \geq 0;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n}, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1+nx^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

# 3

# Serie di potenze e serie di Taylor

## 3.1. Serie di potenze, insieme e raggio di convergenza

Per chi ha il testo [?]: pagine 337–339 (le dimostrazioni sono sul fascicolo a parte!). Si consigliano inoltre gli esempi ed esercizi delle pagine successive: 340–346.

Per chi ha il testo [?]: sezione 5.10 (pagg. 131–134). Si consigliano inoltre gli esempi ed esercizi delle sezioni 8.13.1 (pagg. 220–224) e 9.9 (pagg. 265–267).

### 3.1.1. Esempi

Determinare l'insieme di convergenza delle seguenti serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k}$$
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2} \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} k!\, x^k$$

### 3.1.2. Esercizi

**Esercizio 3.1.1.** Determinare l'insieme di convergenza della serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$

## 3.2. Operazione algebriche

Vale la seguente proprietà di cui omettiamo la dimostrazione

**Proprietà 3.2.1.** Siano $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-x_0)^k$ e $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} b_k(x-x_0)^k$ due serie di potenze aventi lo stesso centro $c$ e con raggi di convergenza $r_a$ e $r_b$ rispettivamente.

1. Se $\lambda \neq 0$, la serie di potenze $\sum_{k=0}^{+\infty}(\lambda a_k)(x - x_0)^k$ ha lo stesso insieme di convergenza e lo stesso raggio di convergenza $r_a$ della serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-x_0)^k$ e vale l'uguaglianza

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(\lambda a_k)(x - x_0)^k = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x - x_0)^k$$

per ogni $x$ appartenente al comune insieme di convergenza;

2. la serie di potenze $\sum_{k=0}^{+\infty}(a_k + b_k)(x - x_0)^k$ ha raggio di convergenza $r \geq \min\{r_a, r_b\}$ e vale l'uguaglianza

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(a_k + b_k)(x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x - x_0)^k + \sum_{k=0}^{+\infty} b_k(x - x_0)^k$$

per ogni $x$ tale che tutte e tre le serie convergano.

### 3.3. Derivazione e integrazione per serie

Quando dobbiamo studiare un polinomio, possiamo calcolare la sua derivata molto facilmente sfruttando la linearit dell'operatore di derivazione. Una serie di potenze è una somma di infiniti addendi. La propriet di linearit della derivazione si estende? Ci poniamo la stessa domanda per la ricerca di una primitiva.

Prima di tutto abbiamo un risultato di continuità:

**Teorema 3.3.1** (Teorema di Abel)**.** *La somma di una serie di potenze è una funzione continua nell'intervallo di convergenza della serie stessa.*

**Teorema 3.3.2** (Teorema di integrazione e derivazione per serie)**.**
*Sia* $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x - x_0)^k$ *una serie di potenze con raggio di convergenza* $r > 0$ *(o* $r = +\infty$*). Allora*

1. *La serie delle derivate*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^{k-1}$$

*e la serie delle primitive*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k+1}(x - x_0)^{k+1}$$

*hanno anch'esse raggio di convergenza* $r$*.*

*Inoltre, posto* $f\colon x \in (-r,r) \to \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-x_0)^k \in \mathbb{R}$ *abbiamo*

2. $f$ *è derivabile in* $(-r,r)$ *e* $f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k (x-x_0)^{k-1}$ $\forall x \in (-r,r)$*;*

3. $f$ *è integrabile in ogni intervallo chiuso contenuto in* $(-r,r)$ *e*

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1} \quad \forall x \in (x_0-r, x_0+r).$$

Partendo dalla serie geometrica $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, $|x|<1$ e usando questi due teoremi ricaviamo l'espressione in serie di potenze di altre funzioni:

**Esempio 3.3.1.**

$$\frac{1}{(1-x)^2} = D\frac{1}{1-x} = D\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} \qquad |x|<1$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n \qquad |x|<1$$

$$\begin{aligned}\ln(1+x) = \ln(1+x) - \ln 1 &= \int_0^x \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^n \mathrm{d}t\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \qquad x \in (-1,1]\end{aligned}$$

dove l'estensione dell'uguaglianza fino a $x=1$ è possibile grazie al teorema di Abel 3.3.1.

**Esempio 3.3.2.**

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n} \qquad |x|<1$$

$$\begin{aligned}\arctan x = \arctan x - \arctan 0 &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^{2n}\mathrm{d}t\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} \qquad x \in [-1,1]\end{aligned}$$

dove l'estensione dell'uguaglianza fino a $|x|=1$ è possibile grazie al teorema di Abel 3.3.1.

Se riconsideriamo il teorema di integrazione e derivazione per serie 3.3.2, ci accorgiamo che esso può essere iterato quante volte vogliamo, quindi in realt la funzione $f$ definita dalla somma della serie non è solo di classe $C^1(-r, r)$ ma è addirittura di classe $C^\infty(-r, r)$. Che relazione c'è tra la somma della serie $f$ e i coefficenti $a_k$? Abbiamo

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x - x_0)^k \qquad \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)$$

dunque, in particolare

$$f(x_0) = a_0$$

Dal teorema 3.3.2 abbiamo poi

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1} \qquad \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)$$

dunque, in particolare

$$f'(x_0) = 1 \cdot a_1$$

Applicando lo stesso teorema 3.3.2 alla serie delle derivate ed alla sua somma $f'(x)$ abbiamo

$$f''(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) a_k (x - x_0)^{k-2} \qquad \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)$$

dunque, in particolare

$$f''(x_0) = 2 \cdot 1 \cdot a_2\,.$$

Iterando il procedimento troviamo

$$f^{(n)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-(n-1)) a_k (x - x_0)^{k-n} \qquad \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)$$

dunque, in particolare

$$f^{(n)}(x_0) = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_n = n!\, a_n.$$

Per estensione definiamo $f^{(0)} = f$. Abbiamo dunque dimostrato la seguente

**Proposizione 3.3.1.** Sia $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x - x_0)^k$ una serie di potenze con raggio di convergenza $r > 0$ (o $r = +\infty$) e sia, per $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$, $f(x)$ la somma della serie. Allora

$$f^{(n)}(x_0) = n!\, a_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

**Esercizio 3.3.1.** Dimostrare che $f(x) = \ln(1 + x)$ è analitica in tutto il suo dominio.

### 3.3.1. La serie binomiale

**Teorema 3.3.3.** *Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, allora*

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k \qquad \forall x \in (-1,1)$$

*In particolare*

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k (2k-1)!!}{2^k\, k!} x^k \qquad \forall x \in (-1,1)$$

*Dimostrazione.* Il caso $\alpha \in \mathbb{N}$ è banale, supponiamo dunque $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.
**1.** Determiniamo il raggio di convergenza della serie
$\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k$:
$a_k = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$ dunque

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k-\alpha}{k+1}$$

Questa quantit converge ad 1 e dunque il raggio di convergenza è $r = 1$. Per $x \in (-1,1)$ sia $f(x)$ la funzione definita dalla somma di 1 con la somma della serie:

$$f\colon x \in (-1,1) \to 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k \in \mathbb{R}$$

**2.** $f(x) = (1+x)^\alpha$:
Sicuramente $f(0) = (1+0)^\alpha$. Calcoliamo

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{(k-1)!} x^{k-1} \qquad x \in (-1,1)$$

Isoliamo il primo addendo e cambiamo indice: poniamoo $\ell = k-1$: $k \geq 2 \iff \ell \geq 1$ e dunque

$$f'(x) = \alpha + \sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-\ell)}{\ell!} x^\ell \qquad x \in (-1,1)$$

Calcoliamo $(1+x)f'(x)$:

$$\begin{aligned}(1+x)f'(x) &= f'(x) + xf'(x)\\ &= \alpha + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k)}{k!}x^k + x\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{(k-1)!}x^{k-1}\\ &= \alpha + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k)}{k!} + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{(k-1)!}\right)x^k\\ &= \alpha\left(1+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}x^k\right) = \alpha f(x)\end{aligned}$$

Consideriamo la funzione $g\colon x \in (-1,1) \mapsto (1+x)^{-\alpha} f(x) \in \mathbb{R}$. La funzione $g$ è derivabile in $(-1,1)$. Abbiamo

$$\begin{aligned}g'(x) &= -\alpha(1+x)^{-\alpha-1}f(x) + (1+x)^{-\alpha}f'(x) =\\ &= -\alpha(1+x)^{-\alpha-1}f(x) + (1+x)^{-\alpha}(1+x)^{-1}f(x) = 0 \quad \forall x \in (-1,1).\end{aligned}$$

Dunque $g$ è costante nell'intervallo $(-1,1)$: $g(x) \equiv g(0) = 1 \quad \forall x \in (-1,1)$ e, banalmente, $f(x) = (1+x)^\alpha$ per ogni $x \in (-1,1)$. $\square$

Come conseguenza otteniamo anche lo sviluppo in serie di MacLaurin della funzione arcsin:

$$\begin{aligned}\arcsin x = \arcsin x - \arcsin 0 = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} =\\ = \int_0^x \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(2k-1)!!}{2^k\,k!}t^{2k}\right)\mathrm{d}t = x + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(2k-1)!!}{2^k\,k!\,(2k+1)}x^{2k+1}.\end{aligned}$$

### 3.4. Serie di Taylor e di MacLaurin

Fino ad ora abbiamo preso una serie di potenze, abbiamo cercato di determinare il suo insieme di convergenza $E$ e, per $x \in E$ abbiamo posto $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-x_0)^k$. Poi abbbiamo visto che se $E$ non si riduce al solo punto $x_0$, allora $f$ gode di molte buone propriet. Cerchiamo ora di fare il procedimento opposto. Supponiamo di avere una funzione $f\colon E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $E$ intervallo e di sapere che è derivabile infinite volte in un qualche punto $x_0 \in E$.

**Definizione 3.4.1** (Serie di Taylor)**.** Chiamo *serie di Taylor della funzione $f$ con centro $x_0$* la serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \tag{3.1}$$

Se $x_0 = 0$, la serie si chiama anche *serie di MacLaurin della funzione $f$*.

Abbiamo una serie di potenze e quindi ci chiediamo quale sia il suo insieme di convergenza. E, se converge, converge sicuramente a $f(x)$ o può convergere a qualche altro valore? Sicuramente per $x = x_0$ converge a $f(x_0)$. Ma per $x \neq x_0$ può succedere di tutto. Lo vediamo con un esempio.

**Esempio 3.4.1.** Sia $f\colon x \in \mathbb{R} \to f(x) \in \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{-1}{x^2}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0\,. \end{cases}$$

Si può dimostrare che la funzione è di classe $C^\infty(\mathbb{R})$ e che

$$\exists f^{(n)}(0) = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Quindi la serie di MacLaurin di $f$ è la serie a coefficenti nulli $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} 0\, x^k = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Quindi la serie di MacLaurin converge $\forall x \in \mathbb{R}$ ma non converge a $f(x)$ perchè $f(x) \neq 0$ se $x \neq 0$.

Questo esempio ci mostra che esistono funzioni $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ tali che la serie di Taylor di $f$ non converge ad $f$. Diamo allora un nome alle funzioni per cui si ha questa convergenza.

**Definizione 3.4.2** (Funzioni analitiche)**.** Una funzione $f$ si dice *analitica in* $x_0$ se la serie di Taylor di $f$ con centro $x_0$ converge ad $f$ almeno in un intervallo aperto contenente $x_0$.
Se $f$ è analitica in ogni punto di un intervallo $I$, allora $f$ si dice *analitica in* $I$.

Abbiamo uno strumento che ci permetta di stabilire se una funzione $C^\infty(I)$ è anche analitica? Consideriamo la successione delle somme parziali della serie di Taylor:

$$s_n(x, x_0) = \sum_{k=0}^{k} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

è un oggetto noto: è il polinomio di Taylor $T_n(x, x_0)$ di grado $n$ con centro $x_0$ della funzione $f$. Poichè $f \in C^\infty(I)$, sappiamo che

$$f(x) - T_n(x, x_0) = E_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

per un opportuno $\xi$ compreso tra $x_0$ e $x$. Possiamo allora enunciare la seguente proposizione e il seguente corollario

**Proposizione 3.4.1.** Se $f \in C^\infty(I)$ e se $\lim\limits_{n\to\infty} E_n(x, x_0) = 0$, allora la serie di Taylor di $f$ con centro $x_0$, valutata in $x$, converge a $f(x)$.

**Osservazione 3.4.1.** Nell'esempio 3.3.1 abbiamo dimostrato, senza usare questi due risultati, che le funzioni $\ln(1+x)$ e $\arctan x$ sono analitiche in $x_0 = 0$.

**Esempio 3.4.2.** Sia $f\colon x \in \mathbb{R} \to \exp(x) \in \mathbb{R}$ la funzione esponenziale. Sappiamo allora che

$$f^{(n)}(x) = e^x \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Fisso $x_0 \in \mathbb{R}$. La serie di Taylor di $f$ con centro $x_0$ è dunque

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{x_0}}{k!}(x-x_0)^k .$$

La serie converge $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{e^{x_0}}{(k+1)!}\frac{k!}{e^{x_0}} = \frac{1}{k+1}$$

questa quantità converge a 0 quando $k \to +\infty$ e dunque $r = +\infty$, cioè la serie converge $\forall x \in \mathbb{R}$. Il resto è $E_n(x, x_0) = \dfrac{e^{\xi}}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ per un opportuno $\xi$ compreso tra $x_0$ e $x$. Pongo $A = \max\{x, x_0\}$, allora

$$|E_n(x, x_0)| \leq \frac{e^A |x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Abbiamo visto (limite notevole) che $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, e dunque abbiamo anche $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} E_n(x, x_0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

**Esempio 3.4.3.** Dimostrare che le funzioni $\sin(x)$ e $\cos(x)$ sono analitiche in $\mathbb{R}$. Dimostrare che i rispettivi sviluppi in serie di McLaurin sono

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}, \quad \cos(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Consideriamo la funzione sin. La derivata $n$–esima della funzione sin, valutata in un qualsiasi punto di $\mathbb{R}$ è sicuramente compresa in $[-1, 1]$. Più precisamente:

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\sin(x) = \begin{cases} \sin(x) & n \equiv 0 \mod 4 \\ \cos(x) & n \equiv 1 \mod 4 \\ -\sin(x) & n \equiv 2 \mod 4 \\ -\cos(x) & n \equiv 3 \mod 4 \end{cases}$$

Dunque la serie di Taylor della funzione sin nel punto $x_0$ è

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

con

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{\sin(x_0)}{n!} & n \equiv 0 \mod 4 \\ \dfrac{\cos(x_0)}{n!} & n \equiv 1 \mod 4 \\ \dfrac{-\sin(x_0)}{n!} & n \equiv 2 \mod 4 \\ \dfrac{-\cos(x_0)}{n!} & n \equiv 3 \mod 4 \end{cases}$$

Si dimostra facilmente (farlo per esercizio!!!!) che l'insieme di convergenza di questa serie è $\mathbb{R}$.

Poiché $|a_n| \leq \dfrac{1}{n!}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, abbiamo anche $|E_n(x, x_0)| \leq \dfrac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$. Dunque $\lim\limits_{n\to\infty} E_n(x, x_0) = 0$ per ogni $x$ e per ogni $x_0$ in $\mathbb{R}$. In particolare, scegliendo $x_0 = 0$ otteniamo

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Applicando il teorema di derivazione per serie otteniamo anche lo sviluppo in serie di McLaurin della funzione cos, come richiesto.

## 3.5. Serie di potenze: esercizi svolti e/o proposti

**Esercizio 3.5.1.** Determinare l'insieme di convergenza delle seguenti serie:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} x^k; \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}; \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2}; \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(5-2x)^k}{k}.$$

**Esercizio 3.5.2.** Determinare l'insieme di convergenza e calcolare la somma delle seguenti serie:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(1-x^2)^k}{k!}; \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{(3x-2)^{k+1}}{k+1}.$$

**Esercizio 3.5.3.** Sia $f(x) = \dfrac{1}{7+x}$. Sviluppare $f$ in serie di MacLaurin e in serie di Taylor in un intorno di $c = 3$. Determinare l'insieme di convergenza.

**Esercizio 3.5.4.** Determinare l'insieme di convergenza delle seguenti serie:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{k}{2k+1}\right)^{2k-1} x^k; \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k+2}{2k} x^k; \qquad \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^k}{k 2^k \ln(k)}.$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{k}{2^k} x^k; \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k+1}{k!} x^k; \qquad \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{3^k}{k^2} x^k.$$

**Esercizio 3.5.5.** Sviluppare le seguenti funzioni in serie di MacLaurin, indicando l'insieme di convergenza della serie.

$$f(x) = \cos(3x^2); \qquad f(x) = \frac{\exp(3x^3) - 1}{x^2}; \qquad f(x) = \frac{x}{4 - x^2}.$$

**Esercizio 3.5.6.** Sviluppare in serie di Taylor con centro nel punto a fianco indicato. Indicare l'insieme di convergenza.

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(x), & c &= 3; \\ f(x) &= \frac{x}{2+x}, & c &= 1. \end{aligned}$$

**Esercizio 3.5.7.** Calcolare la somma della serie

$$x^3 - \frac{x^9}{3!\,4} + \frac{x^{15}}{5!\,16} - \frac{x^{21}}{7!\,64} + \frac{x^{27}}{9!\,256} \dots$$

**Esercizio 3.5.8.** Calcolare $\sin\left(\frac{1}{10}\right)$ con errore inferiore a $10^{-5}$.

**Esercizio 3.5.9.** Calcolare la somma della serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^2}{\pi^k}$.

**Esercizio 3.5.10.** Determinare l'insieme di convergenza delle seguenti serie:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^k}{k!} x^k; \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{k 2^k} x^k; \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(x+9)^{k-1}}{(k-1)^2};$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^k (x+7)^k; \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(k\pi)}{k^2} \left(\frac{3x-2}{2}\right)^k.$$

# 4

# Equazioni differenziali ordinarie

## 4.1. Introduzione

Chiamiamo equazione differenziale ordinaria (nel seguito "EDO") di ordine $n$ una relazione che lega i valori della variabile indipendendente $x \in \mathbb{R}$, di una funzione reale $y = y(x)$ e delle sue derivate $y'$, $y'', \ldots, y^{(n)}$ di ordine minore o uguale a $n$, ovvero un'espressione del tipo

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{4.1}$$

con $F\colon A \subset \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$.

Se è possibile esplicitare la derivata di ordine massimo, cioè se è possibile scrivere l'equazione (4.1) nella forma

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{4.2}$$

con $f\colon B \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, diciamo che la EDO è in forma normale.

**Esempio 4.1.1.** L'equazione $y' = y^2$ è una EDO del primo ordine in forma normale;
l'equazione $y'' + \omega^2 y = 0$ è una EDO del secondo ordine ancora in forma normale, perché la posso scrivere anche come $y'' = -\omega^2 y$;
l'equazione $|y| = 1$ non è in forma normale. □

**Definizione 4.1.1.** Sia $(a, b)$ un intervallo aperto della retta reale. Diciamo che $y\colon x \in (a, b) \to y(x) \in \mathbb{R}$ è una soluzione dell'equazione differenziale (4.1) nell'intervallo $(a, b)$ se

1. $y \in C^n((a, b))$;
2. $(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)) \in A \quad \forall\, x \in (a, b)$;
3. $F(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0 \quad \forall\, x \in (a, b)$.

**Esempio 4.1.2.** Se $C$ è un parametro reale fissato, la funzione $y(x) = \dfrac{-1}{x-C}$ è soluzione dell'equazione $y' = y^2$ in $(-\infty, C)$ ed è soluzione dell'equazione $y' = y^2$ in $(C, +\infty)$ ma non è soluzione dell'equazione $y' = y^2$ in $\mathbb{R} \setminus \{C\}$.
Se $A$ e $B$ sono due parametri reali fissati, allora la funzione $y(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$ è soluzione dell'equazione $y'' + \omega^2 y = 0$ su tutto $\mathbb{R}$. □

In questi due esempi abbiamo visto che la EDO del primo ordine ha infinite soluzioni dipendenti da un parametro, la EDO del secondo ordine ha infinite soluzioni dipendenti da due parametri. Questo ci permette di porre delle condizioni sulla soluzione in modo da individuarne una particolare.

**Definizione 4.1.2** (Problema di Cauchy)**.** Sia

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \tag{4.3}$$

una EDO di ordine $n$ in forma normale, con $f\colon B \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$.
Fissato $(x_0, y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) \in B$ chiamiamo *problema di Cauchy* relativo alla EDO (4.3) e al dato iniziale $(x_0, y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$ il problema di determinare un intervallo $(a, b) \ni x_0$ ed una funzione $y\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ tali che

1. $y$ è soluzione dell'equazione (4.3) in $(a, b)$;
2. Sono soddisfatte le *condizioni iniziali*
   $y(x_0) = y_0$
   $y'(x_0) = y_1$
   $\dots\dots$
   $y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$

### 4.2. EDO lineari

Un tipo molto particolare di EDO sono le EDO lineari, in cui la funzione $F$ è lineare rispetto alle $n+1$ variabili $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$. Limitandoci alle EDO lineari in forma norma, consideriamo cioè le EDO della forma

$$y^{(n)} = a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y + b(x) \tag{4.4}$$

dove le funzioni $a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, b$ sono funzioni continue in un comune intervallo $I$. Le funzioni $a_1, \dots, a_n$ si dicono *coefficienti dell'equazione* mentre la funzione $b$ si chiama *termine noto*. Se $b$ è la funzione identicamente nulla, l'equazione si dice *omogenea*.

#### 4.2.1. Spazi di funzioni

Prima di cominciare lo studio delle EDO lineari, diamo alcuni richiami sull'insieme delle funzioni definite in un comune intervallo.

Consideriamo l'insieme delle funzioni definite su un intervallo $(a, b) \subset \mathbb{R}$:

$$V \equiv \{u \colon u \colon x \in (a, b) \to u(x) \in \mathbb{R}\}$$

Se $u_1, u_2 \in V$, definiamo $u_1 + u_2$ come la funzione che porta $x \in (a, b)$ in $u_1(x) + u_2(x) \in \mathbb{R}$:

$$(u_1 + u_2) \colon x \in (a, b) \to u_1(x) + u_2(x) \in \mathbb{R}\,.$$

Sicuramente $u_1 + u_2 \in V$. Se $u \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, definiamo $\lambda u$ come la funzione che porta $x \in (a, b)$ in $\lambda u(x) \in \mathbb{R}$:

$$(\lambda u) \colon x \in (a, b) \to \lambda u(x) \in \mathbb{R}\,.$$

Anche $\lambda u$ è sicuramente un elemento di $V$. Verifichiamo che:
**$V$ con queste operazioni è uno spazio vettoriale**:

1. la funzione 0 definita da $0 \colon x \in (a, b) \to 0 \in \mathbb{R}$ è un elemento di $V$ e, se $u$ è un qualsiasi altro elemento di $V$ si ha:

$$(0 + u)(x) = 0(x) + u(x) = 0 + u(x) = u(x)$$

2. se $u \in V$, la funzione $v \colon x \in (a, b) \to -u(x) \in \mathbb{R}$ è un elemento di $V$ e si ha
$$(u + v)(x) = u(x) + v(x) = u(x) - u(x) = 0$$

3. Siano $u_1$, $u_2 \in V$

$$(u_1 + u_2)(x) = u_1(x) + u_2(x) = u_2(x) + u_1(x) = (u_2 + u_1)(x)$$

4. Siano $u_1$, $u_2$, $u_3 \in V$

$$\begin{aligned}&[(u_1 + u_2) + u_3](x) = (u_1 + u_2)(x) + u_3(x) = \\ &u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) = u_1(x) + (u_2 + u_3)(x) = [u_1 + (u_2 + u_3)](x)\end{aligned}$$

5. Sia $u \in V$:
$$(1u)(x) = 1u(x) = u(x)$$

6. Sia $u \in V$ e siano $\lambda_1$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$:

$$[(\lambda_1 + \lambda_2)u](x) = (\lambda_1 + \lambda_2)u(x) = \lambda_1 u(x) + \lambda_2 u(x) = (\lambda_1 u)(x) + \lambda_2 u)(x)$$

7. Sia $u \in V$ e siano $\lambda_1$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$:

$$[(\lambda_1 \lambda_2)u](x) = (\lambda_1 \lambda_2)u(x) = \lambda_1(\lambda_2 u(x)) = (\lambda_1(\lambda_2 u))(x)$$

8. Siano $u_1$, $u_2 \in V$ e sia $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$[\lambda(u_1 + u_2)](x) = \lambda[u_1(x) + u_2(x)] = \lambda u_1(x) + \lambda u_2(x) = (\lambda u_1 + \lambda u_2)(x)$$

È inoltre facile dimostrare che

**Proposizione 4.2.1.**

$$W \equiv \{u\colon x \in (a, b) \to \mathbb{R}\colon u \in C^n(a, b)\}$$

è un sottospazio vettoriale di $V$.

**Osservazione 4.2.1.** Ricordiamo che $u \in C^n(a, b)$ significa che $u$ è una funzione definita su $(a, b)$ a valori reali, derivabile almeno $n$ volte e tale che $u$, $u'$, $u'' \dots u^{(n)}$ sono funzioni continue sull'intervallo $(a, b)$

*Dimostrazione.* Per la dimostrazione si sfruttino le proprietà di linearità dell'operazione di derivazione. □

## 4.3. Struttura dell'insieme delle soluzioni di una equazione differenziale lineare omogenea

Consideriamo ora la EDO lineare omogenea

$$y^{(n)} = a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y \tag{4.5}$$

dove i coefficienti $a_i$, $i = 1, \dots, n$ sono funzioni continue su un intervallo $I$. Possiamo riscrivere la (4.5) nella forma

$$y^{(n)} - a_1(x)y^{(n-1)} - \dots - a_{n-1}(x)y' - a_n(x)y = 0.$$

Definisco l'operatore

$$L\colon y \in C^n(I) \mapsto y^{(n)} - a_1(x)y^{(n-1)} - \dots - a_{n-1}(x)y' - a_n(x)y \in C^0(I). \tag{4.6}$$

L è un operatore lineare tra spazi vettoriali, dunque il suo nucleo $\ker L$ è un sottospazio vettoriale del dominio $C^n(I)$. Ma $\ker L$ è proprio l'insieme delle soluzioni in $I$ della (4.5). Dunque abbiamo dimostrato la seguente:

**Proposizione 4.3.1.** Sia (4.5) una EDO lineare omogenea a coefficienti continui in un intervallo $I$. L'insieme delle soluzioni della (4.5) in $I$ è un sottospazio vettoriale di $C^n(I)$.

**Esercizio 4.3.1.** Dimostrare che l'operatore $L$ definito nella (4.6) è effettivamente un operatore lineare.

In realtà vale un teorema molto più forte che è il seguente e che dimostreremo solo nei casi particolari $n = 1$ e $n = 2$.

**Teorema 4.3.1.** *L'insieme delle soluzioni di una equazione differenziale lineare omogenea di ordine $n$ a coefficienti continui in un intervallo $I$ è uno sottospazio vettoriale di dimensione $n$ di $C^n(I)$.*

## 4.4. Struttura dell'insieme delle soluzioni di una equazione differenziale lineare non omogenea

Consideriamo ora una EDO lineare non omogenea

$$y^{(n)} = a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y + b(x) \tag{4.7}$$

che possiamo scrivere anche nella forma

$$y^{(n)} - a_1(x)y^{(n-1)} - \ldots - a_{n-1}(x)y' - a_0(x)y = b(x). \tag{4.8}$$

Ricorrendo di nuovo all'operatore $L$ definito nella (4.6) abbiamo che l'insieme delle soluzioni di (4.8) in $I$ è dato da tutte e sole le funzioni $y \in C^n(I)$ tali che $(Ly)(x) = b(x)$ $\forall x \in I$, cioè tali che $Ly = b$ (uguaglianza tra elementi dello spazio vettoriale $C^0(I)$).

**Proposizione 4.4.1.** Sia $\overline{v}$ soluzione della EDO lineare non omogenea (4.8) in un interavallo $I$, allora l'insieme delle soluzioni di (4.8) è dato da tutte e sole le funzioni della forma $v = \overline{v} + u$, al variare di $u$ nello spazio vettoriale delle soluzioni della EDO lineare omogenea (4.4) associata a (4.8).

*Dimostrazione. 1.* Sia $v = \overline{v} + u$, con $u$ soluzione della EDO omogenea associata (4.4). Faccio vedere che $v$ è soluzione della (4.8). Sappiamo che

$$\begin{aligned} L\overline{v} &= b \\ Lu &= 0 \end{aligned}$$

Dunque

$$Lv = L(\overline{v} + u) = L\overline{v} + Lu = b + 0 = b$$

cioè $v$ è soluzione della EDO (4.8).

*2.* Viceversa, ora facciamo vedere che ogni soluzione della (4.8) si può scrivere nella forma voluta. Sappiamo che

$$\begin{aligned} L\overline{v} &= b \\ Lv &= b \end{aligned}$$

Definisco $u := v - \overline{v}$. Abbiamo

$$Lu = L(v - \overline{v}) = Lv - L\overline{v} = b - b = 0.$$

Dunque $u$ è soluzione della EDO omogenea associata e d'altra parte $u = v - \overline{v}$ implica $v = \overline{v} + u$. □

## 4.5. Il caso $\mathbf{n} = 1$

### 4.5.1. EDO lineare omogenea

Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo. Vogliamo dimostrare che se $a \in C^0(I)$, allora l'insieme delle soluzioni dell'equazione

$$y' = a(x)y \tag{4.9}$$

è un sottospazio vettoriale di dimensione uno di $C^1(I)$. Dimostriamo questo risultato trovando esplicitamente tutte e sole le soluzioni di (4.9).

**Proposizione 4.5.1.** Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e sia $a \in C^0(I)$. Allora le soluzioni di (4.9) sono definite su tutto l'intervallo $I$ e sono tutte e sole della forma

$$u(x) = C \exp(A(x)) \qquad C \in \mathbb{R} \tag{4.10}$$

dove $A(x)$ è una qualsiasi fissata primitiva di $a(x)$.

*Dimostrazione.* Osserviamo che poiché $a$ è continua in $I$, il teorema fondamentale del calcolo integrale assicura che una primitiva $A$ esiste ed è $C^1(I)$, dunque anche le funzioni della forma $x \mapsto C \exp(A(x))$ sono di classe $C^1(I)$.
Verifichiamo ora che una funzione $u$ della forma (4.10) è soluzione di (4.9). Abbiamo $u'(x) = a(x)C \exp(A(x))$ e dunque

$$u'(x) - a(x)u(x) = a(x)C \exp(A(x)) - a(x)C \exp(A(x)) = 0\,.$$

Viceversa, supponiamo ora che $v$ sia una soluzione di (4.9) e dimostriamo che deve essere della forma $C \exp(A(x))$. Osserviamo che $v(x) = C \exp(A(x))$ se e solo se $v(x) \exp(-A(x)) = C$. Consideriamo allora la funzione prodotto $c(x) \equiv v(x) \exp(-A(x))$ e dimostriamo che è costante. Poiché $c$ è di classe $C^1$ nell'intervallo $I$, basta dimostrare che la sua derivata è identicamente nulla. Abbiamo

$$c'(x) = v'(x) \exp(-A(x)) - a(x)v(x) \exp(-A(x))\,.$$

Ma $v$ è soluzione di (4.9) e dunque

$$c'(x) = a(x)v(x) \exp(-A(x)) - a(x)v(x) \exp(-A(x)) = 0$$

□

### 4.5.2. EDO lineare non omogenea

Per la Proposizione 4.4.1, se troviamo almeno una soluzione $\overline{v}$ della EDO

$$y' = a(x)y + b(x), \tag{4.11}$$

avremo automaticamente trovato tutte le soluzioni, che dovranno essere (per la Proposizione 4.5.1) della forma $\overline{v} + C \exp(A(x))$, $C \in \mathbb{R}$, dove $A$ è una qualche primitiva di $a(x)$. La cerchiamo nella forma $\overline{v}(x) = B(x) \exp(A(x))$ (questo metodo di ricerca di soluzioni particolari si chiama *metodo della variazione delle costanti*). Abbiamo

$$\overline{v}'(x) = B'(x)\exp(A(x)) + a(x)B(x)\exp(A(x))$$

e dunque se $\overline{v}(x)$ è soluzione di (4.11) deve essere

$$B'(x)\exp(A(x)) + a(x)B(x)\exp(A(x)) = a(x)B(x)\exp(A(x)) + b(x)$$

cioè

$$B'(x) = \exp(-A(x))b(x).$$

Fissiamo allora $B(x)$ primitiva di $\exp(-A(x))b(x)$ (per il teorema fondamentale del calcolo integrale $B$ esiste ed è $C^1(I)$) e consideriamo

$$\overline{v}(x) = B(x)\exp(A(x)).$$

Anche $\overline{v}$ è di classe $C^1(I)$. Inoltre, calcolando $\overline{v}'(x)$ e sostituendolo in (4.11) otteniamo che $\overline{v}$ è soluzione dell'equazione.

Applicando la proposizione (4.4.1) otteniamo

**Proposizione 4.5.2.** Le soluzioni dell'equazione (4.11) sono tutte e sole della forma

$$v(x) = (C + B(x))\exp(A(x)) \quad C \in \mathbb{R}$$

dove $A(x)$ è una primitiva di $a(x)$ e $B(x)$ è una primitiva di $\exp(-A(x))b(x)$.

## 4.6. Il caso $\mathbf{n} = 2$

### 4.6.1. EDO lineare omogenea

Vale il seguente Teorema di Cauchy (che non dimostriamo)

**Teorema 4.6.1.** *Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo. Sia $x_0 \in I$ e siano $y_0$, $v_0 \in \mathbb{R}$. Siano $b$, $c$, $d$ funzioni continue in $I$. Allora esiste una ed una sola soluzione $C^2(I)$ del problema*

$$\begin{cases} y'' = b(x)y' + c(x)y + d(x) & \text{in } I \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = v_0. \end{cases}$$

**Teorema 4.6.2.** *Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e siano $b$, $c$ funzioni continue in $I$. Siano $y_1$ e $y_2$ soluzioni della EDO lineare omogenea*

$$y'' = b(x)y' + c(x)y.$$

*Allora $y_1$ e $y_2$ sono linearmente dipendenti in $I$ se e solo esistono $x_0 \in I$ e $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tali che*

$$\begin{cases} \alpha y_1(x_0) + \beta y_2(x_0) = 0 \\ \alpha y_1'(x_0) + \beta y_2'(x_0) = 0 \end{cases}$$

*Dimostrazione.* Si veda il testo. □

**Teorema 4.6.3.** *Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo. Sia $x_0 \in I$ e siano $b$, $c$, $d$, funzioni continue in $I$.*

1. *Sia $y_1$ la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'' = b(x)y' + c(x)y & \text{in } I \\ y(x_0) = 1 \\ y'(x_0) = 0 \end{cases}$$

*e sia $y_2$ la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'' = b(x)y' + c(x)y & \text{in } I \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 1. \end{cases}$$

*Allora $y_1$ e $y_2$ sono funzioni linearmente indipendenti in $I$.*

2. *Le soluzioni della EDO lineare omogenea $y'' = b(x)y' + c(x)y$ sono tutte e sole le funzioni della forma*

$$y(x) = \alpha y_1(x) + \beta y_2(x), \quad \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}.$$

3. *Sia $\overline{y}(x)$ una soluzione della EDO lineare completa*

$$y'' = b(x)y' + c(x)y + d(x). \tag{4.12}$$

*Allora le soluzioni di (4.12) sono tutte e sole le funzioni della forma*

$$y(x) = \overline{y}(x) + \alpha y_1(x) + \beta y_2(x), \quad \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}.$$

*Dimostrazione.* Si veda il testo. □

### 4.6.2. EDO lineare omogenea a coefficienti costanti

Nel caso particolare in cui i coefficienti siano delle costanti, siamo in grado di determinare esplicitamente una base dello spazio vettoriale delle soluzioni. Consideriamo dunque la EDO

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \tag{4.13}$$

con $a_1$, $a_2 \in \mathbb{R}$.

Poiché per l'equazione lineare omogenea del primo ordine a coefficienti costanti $y' + ay = 0$ una base dello spazio dello soluzioni è la funzione $y(x) = \exp(-ax)$ cerchiamo, per analogia, soluzioni della forma $y(x) = \exp(\lambda x)$. Sostituendo nella (4.13) osserviamo che la funzione $y(x) = \exp(\lambda x)$ ne è soluzione se e solo se $\lambda$ è radice del polinomio $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$.

**Definizione 4.6.1.** Definiamo *polinomio caratteristico* associato all'equazione differenziale (4.13) il polinomio

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0. \tag{4.14}$$

Distinguiamo tre casi:

1. $\Delta = a_1^2 - 4a_2 > 0$. In questo caso l'equazione caratteristica ha due radici reali e distinte $\lambda_1$ e $\lambda_2$. Allora le due funzioni

   $$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \qquad y_2(x) = e^{\lambda_2 x}.$$

   sono entrambe soluzione dell'equazione differenziale in $\mathbb{R}$. Utilizzando il Teorema 4.6.2 proviamo che sono anche linearmente indipendenti: scelgo $x_0 = 0$ e sia $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tale che

   $$\begin{cases} \alpha e^{\lambda_1 0} + \beta e^{\lambda_2 0} = 0 \\ \alpha\lambda_1 e^{\lambda_1 0} + \beta\lambda_2 e^{\lambda_2 0} = 0 \end{cases}$$

   cioè

   $$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \lambda_1\alpha + \lambda_2\beta = 0 \end{cases}$$

   È un sistema lineare omogeneo $2 \times 2$ nelle incognite $\alpha$ e $\beta$. Il determinante della matrice associata al sistema è $\lambda_2 - \lambda_1$ che è diverso da zero perché $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Quindi, per il Teorema di Cramer $\alpha = \beta = 0$, cioè $e^{\lambda_1 x}$ e $e^{\lambda_2 x}$ sono due funzioni linearmente indipendenti.

2. $\Delta = a_1^2 - 4a_2 = 0$. In questo caso l'equazione caratteristica ha una radice reale doppia $\lambda = \frac{-a_1}{2}$. La funzione

   $$y_1(x) = e^{\lambda x}$$

   è dunque soluzione dell'equazione differenziale. Cerco una soluzione linearmente indipendente con il metodo di variazione delle costanti

   $$y_2(x) = C(x)\exp(\lambda x)$$

   Sostituendo nella EDO (4.13) abbiamo che $y_2$ è soluzione se e solo se

   $$C''(x) = 0.$$

   Scelgo $C(x) \equiv x$ e ottengo la soluzione $y_2(x) = x\exp(\lambda x)$. Se $y_1$ e $y_2$ sono linearmente indipendenti, allora ho concluso.

   Proviamo che sono anche linearmente indipendenti, di nuovo utilizzando il Teorema 4.6.2. Scelgo $x_0 = 0$ e sia $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tale che

   $$\begin{cases} \alpha e^{\lambda 0} + \beta 0 e^{\lambda 0} = 0 \\ \alpha\lambda e^{\lambda 0} + \beta(1 + \lambda 0)e^{\lambda 0} = 0 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha\lambda + \beta = 0 \end{cases}$$

È un sistema lineare omogeneo $2 \times 2$ nelle incognite $\alpha$ e $\beta$ la cui unica soluzione è $\alpha = \beta = 0$. Quindi $e^{\lambda x}$ e $xe^{\lambda x}$ sono due funzioni linearmente indipendenti.

3. $\Delta = a_1^2 - 4a_2 < 0$. In questo caso l'equazione caratteristica ha due radici complesse coniugate $\lambda_1 = \mu + i\omega$ e $\lambda_2 = \mu - i\omega$ con $\omega > 0$. Le due funzioni

$$z_1(x) = e^{\lambda_1 x} = \exp(\mu x)(\cos(\omega x) + i \sin(\beta x))$$
$$z_2(x) = e^{\lambda_2 x} = \exp(\mu x)(\cos(\omega x) - i \sin(\beta x))$$

sono dunque entrambe soluzione dell'equazione differenziale però sono funzioni a valori complessi. Pongo

$$y_1 := \frac{z_1 + z_2}{2}, \qquad y_1 := \frac{z_1 - z_2}{2i}$$

Abbiamo

$$y_1(x) = \exp(\mu x)\cos(\omega x) \qquad y_2(x) = \exp(\mu x)\sin(\beta x)$$

$y_1$ e $y_2$ sono due funzioni a valori reali e per linearità sono soluzioni della EDO (4.13).

Proviamo che sono anche linearmente indipendenti: scelgo $x_0 = 0$ e sia $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tale che

$$\begin{cases} \alpha e^{\mu 0}\cos(\omega 0) + \beta e^{\mu x}\sin(\omega 0) = 0 \\ \alpha e^{\mu 0}(\mu\cos(\omega 0) - \omega\sin(\omega 0)) + \beta e^{\mu 0}(\mu \sin(\omega 0) + \omega\cos(\omega 0)) = 0 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha\mu + \beta\omega = 0 \end{cases}$$

È un sistema lineare omogeneo $2 \times 2$ nelle incognite $\alpha$ e $\beta$. Poiché $\omega \neq 0$, l'unica soluzione è $\alpha = \beta = 0$, dunque $y_1$ e $y_2$ sono due funzioni linearmente indipendenti.

### 4.6.3. Il metodo della variazione delle costanti

Consideriamo ora l'equazione completa a coefficienti costanti

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = g(x) \tag{4.15}$$

Descriviamo qui un metodo che, almeno in linea di principio, permette di risolvere questa equazione, per qualsiasi funzione continua $g$. Siano $y_1$ e $y_2$ le due soluzioni dell'equazione omogenea associate trovate precedentemente tramite lo studio dell'equazione caratteristica. Cerco una soluzione particolare dell'equazione completa (4.15) della forma

$$\overline{y}(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)\,. \tag{4.16}$$

Abbiamo dunque

$$\overline{y}'(x) = c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) + c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x)$$

Abbiamo due funzioni incognite $c_1$ e $c_2$ e dobbiamo soddisfare una sola equazione, possiamo imporre una condizione supplementare: imponiamo che la funzione $\overline{y}$ si possa derivare come se le funzioni $c_1$ e $c_2$ fossero costanti, cioè imponiamo

$$c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0 \tag{4.17}$$

e dunque abbiamo

$$\begin{aligned}
&\overline{y}'(x) = +c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x)\\
&\overline{y}''(x) = c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) + c_1(x)y_1''(x) + c_2(x)y_2''(x)
\end{aligned}$$

Sostituendo nella EDO (4.15) e ricordando che $y_1$ e $y_2$ sono soluzioni della EDO omogenea associata, abbiamo che $\overline{y}$ è soluzione della stessa se e solo se

$$c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = g(x)\,.$$

Mettiamo questa equazione a sistema con la condizione (4.17) e otteniamo il sistema

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = g(x)\,. \end{cases}$$

È un sistema lineare $2 \times 2$ nelle incognite $c_1'$ e $c_2'$. Il determinante è $y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)$. Studiando l'equazione omogenea abbiamo visto che questo determinante non è nullo. Dunque posso ricavare

$$c_1'(x) = \frac{-y_2(x)g(x)}{y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)} \qquad c_2'(x) = \frac{y_1(x)g(x)}{y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)}\,.$$

Si tratta dunque di trovare una primitiva di ciascuno di questi due rapporti. Vediamo un esempio

**Esempio 4.6.1.** $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$. L'equazione omogenea associata è $y'' + y = 0$ che ha equazione caratteristica $\lambda^2 + \lambda = 0$. Troviamo dunque due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea:

$$y_1(x) = \cos x \qquad y_2(x) = \sin x\,.$$

Cerchiamo dunque una soluzione della forma $\overline{y}(x) = c_1(x)\cos x + c_2(x)\sin x$. Da cui $\overline{y}'(x) = c_1'(x)\cos x + c_2'(x)\sin x - c_1(x)\sin x + c_2(x)\cos x$. Imponiamo

$$c_1'(x)\cos x + c_2'(x)\sin x = 0\,.$$

Derivando ancora otteniamo

$$\overline{y}''(x) = -c_1'(x)\sin x + c_2'(x)\cos x - c_1(x)\cos x - c_2(x)\sin x\,.$$

Sostituendo nell'equazione differenziale otteniamo

$$-c_1'(x)\sin x + c_2'(x)\cos x = \frac{1}{\cos x}$$

e dunque abbiamo il sistema

$$\begin{cases} c_1'(x)\cos x + c_2'(x)\sin x = 0 \\ -c_1'(x)\sin x + c_2'(x)\cos x = \dfrac{1}{\cos x} \end{cases}$$

da cui si ricava

$$c_1'(x) = \frac{-\sin x}{\cos x} \qquad c_2'(x) = 1\,.$$

Dunque

$$c_1(x) = \ln|\cos x| \qquad c_2(x) = x\,.$$

e

$$\overline{y}(x) = \ln|\cos x|\cos x + x\sin x\,.$$

Le soluzioni dell'equazione saranno allora tutte e sole della forma

$$y(x) = (a + \ln|\cos x|)\cos x + (b + x)\sin x \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

□

### 4.6.4. Schema per la ricerca di una soluzione dell'equazione $y'' + a_1 y' + a_2 y = g(x)$ per alcuni tipi particolari di funzioni $g(x)$

1. $g(x) = e^{\gamma x} P_n(x)$
   a) Se $\gamma$ non è radice dell'equazione caratteristica $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$, allora esiste una soluzione dell'equazione differenziale della forma

   $$\overline{y}(x) = e^{\gamma x} Q_n(x)$$

   dove $Q_n$ è un polinomio di grado $n$.
   b) Se $\gamma$ è radice semplice dell'equazione caratteristica $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$, allora esiste una soluzione dell'equazione differenziale della forma

   $$\overline{y}(x) = x e^{\gamma x} Q_n(x)$$

   dove $Q_n$ è un polinomio di grado $n$.

c) Se $\gamma$ è radice doppia dell'equazione caratteristica $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$, allora esiste una soluzione dell'equazione differenziale della forma

$$\overline{y}(x) = x^2 e^{\gamma x} Q_n(x)$$

dove $Q_n$ è un polinomio di grado $n$.

2. $g(x) = e^{\gamma x} \left(P_n(x)\cos(\omega x) + Q_m(x)\sin(\omega x)\right)$
Definiamo $N \equiv \max\{n, m\}$.

a) Se $\gamma \pm i\omega$ non sono le radici complesse coniugate dell'equazione caratteristica $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$, allora esiste una soluzione dell'equazione differenziale della forma

$$\overline{y}(x) = e^{\gamma x} \left(S_N(x)\cos(\omega x) + T_N(x)\sin(\omega x)\right)$$

dove $S_N$ e $T_N$ sono due polinomi di grado $N$.

b) Se $\gamma \pm i\omega$ sono le radici complesse coniugate dell'equazione caratteristica $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$, allora esiste una soluzione dell'equazione differenziale della forma

$$\overline{y}(x) = xe^{\gamma x} \left(S_N(x)\cos(\omega x) + T_N(x)\sin(\omega x)\right)$$

dove $S_N$ e $T_N$ sono due polinomi di grado $N$.

**Osservazione 4.6.1.** Il caso $\gamma = 0$ rientra in questa casistica. Che forma hanno le funzioni $g$ e $\overline{y}$ in questo caso?

**Osservazione 4.6.2.** Il caso $n = 0$ e/o $m = 0$ rientra in questa casistica. Che forma hanno le funzioni $g$ e $\overline{y}$ in questo caso?

## 4.7. Principio di sovrapposizione

**Teorema 4.7.1** (Principio di sovrapposizione)**.** *Si consideri l'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti*

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = g_1(x) + g_2(x) + \ldots + g_n(x) \tag{4.18}$$

*Se $\overline{u_i}$ è soluzione dell'equazione differenziale*

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = g_i(x)\,, \qquad i = 1, \ldots, n\,,$$

*allora la funzione $\overline{u}(x) = \overline{u_1}(x) + \overline{u_2}(x) + \ldots + \overline{u_n}(x)$ è soluzione dell'equazione differenziale* (4.18).

## 4.8. Combinazioni lineari di funzioni trigonometriche

Facciamo vedere che ogni funzione del tipo $A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ con $A$, $B \in \mathbb{R}$ si può scrivere nella forma $R\cos(\omega t + \varphi)$ con $R > 0$ e $\varphi \in [0, 2\pi)$.

*Dimostrazione.*

$$A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) = R\cos(\omega t + \varphi)$$

se e solo se

$$A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) = R\cos(\omega t)\cos\varphi - R\sin(\omega t)\sin\varphi\,.$$

Poiché $\cos(\omega t)$ e $\sin(\omega t)$ sono due funzioni linearmente indipendenti, questo equivale a

$$\begin{cases} A = R\cos(\varphi) \\ B = -R\sin(\varphi) \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} R = \sqrt{A^2 + B^2} \\ \cos\varphi = \dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\,, \quad \sin\varphi = \dfrac{-B}{\sqrt{A^2+B^2}}\,. \end{cases}$$

□

## 4.9. Vibrazioni lineari

Consideriamo una massa puntiforme $(P, m)$ vincolata a muoversi lungo una retta. Supponiamo che essa sia soggetta ad una forza elastica di richiamo $\vec{F}_e = -k(P - O)$ $(k > 0)$ e ad una resistenza viscosa $\vec{F}_r = -\mu\dot{P}$ $(\mu \geq 0)$. Introduciamo un sistema di riferimento lungo la retta in questo modo: scegliamo un orientamento e poniamo l'origine nella posizione di riposo della forza elastica. Detto $\vec{i}$ il versore che indica direzione e verso della retta così orientata abbiamo:

$$\begin{aligned} &\vec{F}_e = -k(P - O) = -kx\vec{i} \\ &\vec{F}_r = -\mu\dot{P} = -\mu\dot{x}\vec{i} \\ &\vec{a} = \ddot{x}\vec{i}\,. \end{aligned}$$

La legge della dinamica $m\vec{a} = \vec{F}_e + \vec{F}_r$ assume la forma

$$\ddot{x} + \frac{\mu}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0\,. \tag{4.19}$$

Supponiamo di conoscere lo stato iniziale della nostra particella:

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases} \tag{4.20}$$

1. $\mu = 0$: non c'è resistenza viscosa.
L'equazione (4.19) diventa

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

L'equazione caratteristica associata è

$$\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0$$

le cui radici sono $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$. Poniamo $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ e dunque $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$. Le soluzioni sono dunque tutte e sole della forma

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) = R\cos(\omega_0 t + \varphi)\,.$$

Imponiamo le condizioni iniziali (4.20):

$$\begin{cases} x_0 = R\cos(\varphi) \\ v_0 = -\omega_0 R\sin(\varphi) \end{cases}$$

da cui ricaviamo

$$R = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}\,, \quad \sin(\varphi) = \frac{-\frac{v_0}{\omega_0}}{\sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}}\,, \quad \cos(\varphi) = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}}$$

La particella si muove dunque di moto armonico avente

a) ampiezza $R = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}$

b) sfasamento $\varphi \in [0, 2\pi]$ individuato da

$$\sin(\varphi) = \frac{-\frac{v_0}{\omega_0}}{\sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}}\,, \quad \cos(\varphi) = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}}\,,$$

c) frequenza $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ e

d) periodo $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

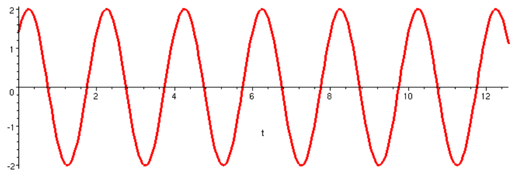


Figura 4.1: Moto armonico

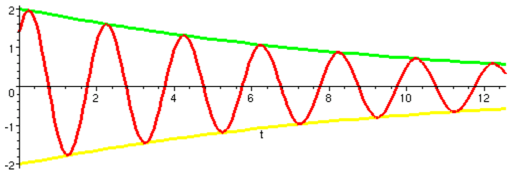


Figura 4.2: Moto armonico smorzato

2. $\mu > 0$ e $\Delta = \dfrac{\mu^2 - 4km}{m^2} < 0$. L'equazione caratteristica associata all'equazione (4.19) è
$$\lambda^2 + \frac{\mu}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$
le cui radici complesse coniugate sono
$$\lambda_{1,2} = \frac{-\mu}{2m} \pm i\frac{\sqrt{4mk - \mu^2}}{2m}$$
Per brevità indichiamo $\gamma = \dfrac{\mu}{2m} > 0$ e $\omega_0 = \dfrac{\sqrt{4mk - \mu^2}}{2m} > 0$. Le soluzioni sono tutte e sole quelle del tipo
$$x(t) = \exp(-\gamma t) R \cos(\omega_0 t + \varphi)\,. \tag{4.21}$$
Un moto di questo tipo si chiama *moto armonico smorzato*. Imponendo le condizioni iniziali troviamo
$$\begin{cases} R = \sqrt{x_0^2 + \left(\dfrac{v_0 + \gamma x_0}{\omega_0}\right)^2} \\ \sin(\varphi) = \dfrac{-(v_0 + \gamma x_0)}{\omega_0\sqrt{x_0^2 + \left(\dfrac{v_0 + \gamma x_0}{\omega_0}\right)^2}}\,, \quad \cos(\varphi) = \dfrac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + \left(\dfrac{v_0 + \gamma x_0}{\omega_0}\right)^2}}\,. \end{cases}$$
Da (4.21) osserviamo che $|x(t)| \le R\exp(-\gamma t)$ e quindi $x(t)$ converge a 0 con velocità esponenziale quando $t \to +\infty$.

3. $\mu > 0$ e $\Delta = \dfrac{\mu^2 - 4km}{m^2} = 0$ cioè $\mu = 2\sqrt{km}$. L'equazione caratteristica

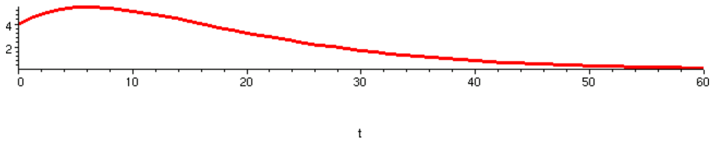



Figura 4.3: Moto criticamente smorzato

associata all'equazione (4.19) è

$$\left(\lambda + \sqrt{\frac{k}{m}}\right)^2 = 0$$

la cui unica radice è $\lambda = -\sqrt{\frac{k}{m}}$, con molteplicità 2. Poniamo $\gamma \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$, quindi le soluzioni sono tutte e sole le funzioni della forma

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} + Bte^{-\gamma t} = (A + Bt)e^{-\gamma t}.$$

Imponendo le condizioni iniziali troviamo

$$\begin{cases} A = x_0 \\ B = v_0 + \gamma x_0 \end{cases} \qquad \text{da cui} \;\; x(t) = (x_0 + (v_0 + \gamma x_0)t)\, e^{-\gamma t}\,.$$

Un moto di questo tipo si dice con *smorzamento critico*. Poiché $\gamma > 0$ anche in questo caso possiamo dire che $\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0$.

4. $\mu > 0$ e $\Delta = \dfrac{\mu^2 - 4km}{m^2} > 0$. Le soluzioni dell'equazione caratteristica sono

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4mk}}{2m}$$

Per la regola dei segni di Cartesio sia $\lambda_1$ che $\lambda_2$ sono negative. Le soluzioni sono tutte e sole del tipo

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}\,;$$

ed imponendo le condizioni iniziali otteniamo

$$A = \frac{\lambda_2 x_0 - v_0}{\lambda_2 - \lambda_1}\,.B = \frac{-(\lambda_1 x_0 - v_0)}{\lambda_2 - \lambda_1}\,.$$

$$x(t) = \frac{\lambda_2 x_0 - v_0}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1 x_0 - v_0}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 t}$$

Il moto si dice *con smorzamento supercritico.*

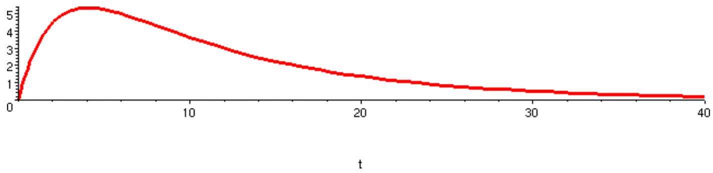



Figura 4.4: Moto con smorzamento supercritico

Supponiamo ora che la particella sia sottoposta ad una ulteriore forza $\vec{F}(t) = F(t)\vec{i}$ dipendente soltanto dal tempo. La legge di moto in questo caso è

$$\ddot{x} + \frac{\mu}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F(t)}{m}\,.$$

In linea di principio, mediante il metodo della variazione delle costanti, è possibile risolvere questa equazione. Nel caso $\mu > 0$ si può dimostrare che

1. se $F(t)$ è limitata, allora anche $x(t)$ è limitata;
2. se $\lim_{t\to+\infty} F(t) = 0$, allora anche $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$.

Non lo dimostriamo. Facciamo vedere però che per $\mu = 0$ queste conclusioni non sono più vere. Supponiamo che $F$ sia della forma $F(t) = M\cos(\omega t)$.

1. $\omega \neq \omega_0$. Le soluzioni sono tutte e sole della forma

   $$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + \frac{M\cos(\omega t)}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

   Per semplicità supponiamo che al tempo $t = 0$ la particella sia ferma ($v_0 = 0$) nella posizione di equilibrio ($x_0 = 0$). Imponendo queste condizioni iniziali si ottiene

   $$x(t) = \frac{M}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}(\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t))\,,$$

   ovvero, applicando le formule di prostaferesi:

   $$x(t) = \frac{2M}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\sin\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_0 + \omega}{2}t\right)$$

   cioè $x(t)$ è il prodotto di due funzioni oscillanti una delle quali oscilla più velocemente dell'altra. Questo fenomeno si chiama *dei battimenti.*

2. $\omega = \omega_0$. Le soluzioni sono tutte e sole della forma

   $$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + \frac{Mt\sin(\omega_0 t)}{2m\omega_0}$$

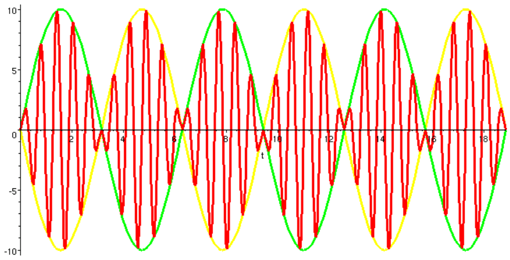



Figura 4.5: Fenomeno dei battimenti

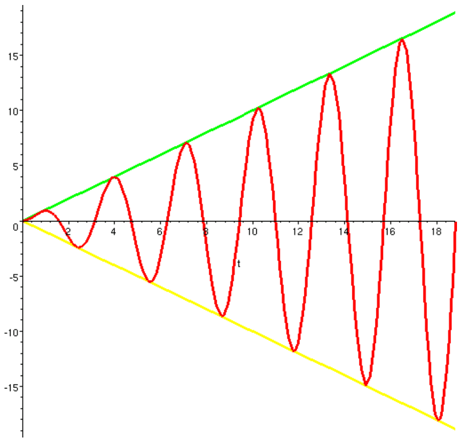



Figura 4.6: Fenomeno della risonanza

Per semplicità supponiamo che al tempo $t = 0$ la particella sia ferma ($v_0 = 0$) nella posizione di equilibrio ($x_0 = 0$). Imponendo queste condizioni iniziali si ottiene

$$x(t) = \frac{Mt\sin(\omega_0 t)}{2m\omega_0}$$

cioè la soluzione oscilla tra le due rette $y(t) = \dfrac{Mt}{2m\omega_0}$ e $y(t) = \dfrac{-Mt}{2m\omega_0}$. In questo caso, anche se la forza esterna $F$ è limitata, la soluzione $x(t)$ non lo è. Questo fenomeno si chiama *risonanza*.

## 4.10. Equazioni differenziali non lineari

Per quanto riguarda le EDO non lineari, ci limitiamo a considerare EDO del primo ordine in forma normale, cioè equazioni del tipo

$$y' = f(x, y) \tag{4.22}$$

con $f\colon B \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Per la teoria generale si veda il testo [**?**].

## 4.11. Metodi risolutivi

### 4.11.1. Edo a variabili separabili

Consideriamo un tipo molto particolare di edo non lineare, dove la funzione $f(x, y)$ è il prodotto tra una funzione della sola $x$ ed una funzione della sola $y$.

$$y' = g(x)h(y)\,. \tag{4.23}$$

Edo della forma (4.23) si dicono *a variabili separabili.* Osserviamo innanzitutto che se $y_0 \in \mathbb{R}$ è tale che $h(y_0) = 0$, allora la funzione $y(x) \equiv y_0$ è soluzione dell'equazione (4.23). Come si determinano le altre soluzioni?

Supponiamo che $y\colon x \in (a, b) \to y(x) \in \mathbb{R}$ sia soluzione dell'equazione (4.23) e che $h(y(x_0)) \neq 0$ per un certo $x_0 \in (a, b)$. Allora $y(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a, b)$. Di più, $y(x)$ ha sempre lo stesso segno di $y(x_0)$.

Poiché $y(x)$ è soluzione abbiamo $y'(x) = g(x)h(y(x)) \quad \forall\, x \in (a, b)$ e poiché $h(y(x))$ non si annulla mai possiamo scrivere, equivalentemente

$$\frac{y'(x)}{h(y(x))} = g(x) \quad \forall\, x \in (a, b).$$

I due membri dell'uguaglianza devono avere lo stesso integrale indefinito cioè deve essere

$$\int \frac{y'(x)}{h(y(x))}\,\mathrm{d}x = \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

Nell'integrale a primo membro cambio variabile con la sostituzione $y = y(x)$ e ottengo

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{h(y)}\bigg|_{y=y(x)} = \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

Cioè, se $H$ è una primitiva di $1/h$ e se $G$ è una primitiva di $g$, deve essere

$$H(y(x)) = G(x) + C \quad \forall\, x \in (a, b)$$

con $C$ opportuna costante reale.

Sia $(c, d)$ l'immagine di $y$: $(c, d) = y((a, b))$. Considero la funzione

$$H\colon t \in (c, d) \mapsto H(t) \in \mathbb{R}.$$

$H \in C^1((c, d))$, inoltre $H'(t) = h(t)$ ha segno costante in $(c, d)$. Quindi $H$ è strettamente monotona in un intervallo e dunque invertibile. Dunque, abbiamo una formaula per le soluzioni non costanti della EDO $y' = g(x)h(y)$:

$$y(x) = H^{-1}(G(x) + C) \quad \forall\, x \in (a, b)$$

per qualche $C \in \mathbb{R}$.

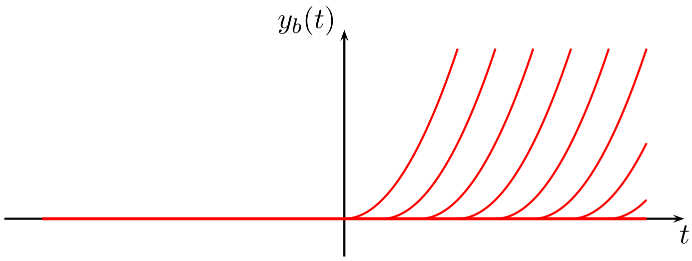



Figura 4.7: Il pennello di Peano per il problema di Cauchy (4.24)

### 4.12. Il pennello di Peano

Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2\sqrt{|y|} \\ y(0) = 0 \end{cases} . \tag{4.24}$$

qui abbiamo $a(t) = 2$ che è sicuramente una funzione di classe $C^0(\mathbb{R})$ e $b(y) = \sqrt{|y|}$ che non è derivabile per $y = 0$ e dunque non è di classe $C^1(\mathbb{R})$.

Vogliamo far vedere che questo problema di Cauchy ammette infinite soluzioni.

Osserviamo che la funzione $y_0(x) \equiv 0$ è soluzione del problema di Cauchy su tutto $\mathbb{R}$.

Vediamo come costruire altre soluzioni dello stesso problema. Supponiamo che $y(t)$ sia una soluzione del problema (4.24) e che essa sia positiva in un intervallo $I$.

Per ogni $t \in I$ abbiamo allora

$$y(t)^{\frac{-1}{2}} y'(t) = 2$$

e dunque, integrando memboro a membro

$$2\sqrt{y(t)} = 2t + C \text{ per qualche costante } C \in \mathbb{R}.$$

Definendo $b \equiv \dfrac{-C}{2}$, posso scrivere

$$y(t) = (t - b)^2 \text{ per qualche costante } b \in \mathbb{R}.$$

Per ogni $b \geq 0$, definisco

$$y_b \colon t \in \mathbb{R} \to \begin{cases} 0 & t \leq b \\ (t-b)^2 & t > b\,. \end{cases} \in \mathbb{R}$$

Verificare TUTTI i dettagli e provare che per ogni $b \geq 0$ $y_b$ è soluzione del problema di Cauchy (4.24).

## 4.13. Esercizi svolti e/o proposti

### 4.13.1. Equazioni differenziali a variabili separabili

**Esercizio 4.13.1.** Al variare del parametro reale $\alpha$, risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y - y^2 \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

indicando esplicitamente il dominio della soluzione.

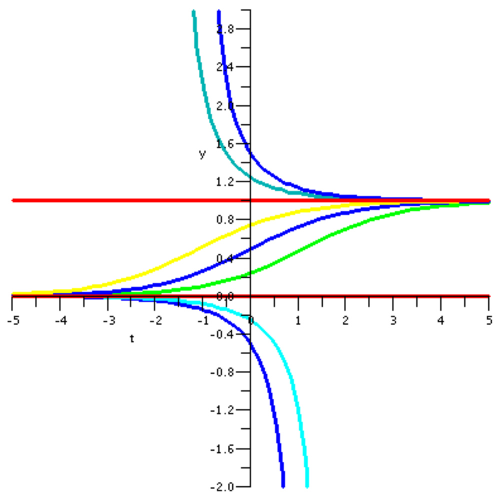



Figura 4.8: Le soluzioni dell'equazione logistica $y' = y - y^2$

**Esercizio 4.13.2.** Trovare la soluzione massimale dei seguenti problemi di Cauchy indicandone il dominio.

$$\begin{cases} y' = 4x + xy^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' + x^3y^4 = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' + x^3y^4 = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2y' = \tan(y) \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

### 4.13.2. Equazioni differenziali lineari del primo ordine

**Esercizio 4.13.3.** Calcolare il valore per $t = 2$ della soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' - y\ln(t) = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

**Esercizio 4.13.4.** Calcolare il valore per $t = 2$ della soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' - \dfrac{y}{t} - \dfrac{1}{t} - 1 = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

**Esercizio 4.13.5.** Tra tutte le soluzioni $y(x)$ dell'equazione differenziale

$$y' = -2y\left(x + \frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x},$$

determinare se ne esiste una tale che $\lim_{x\to 0} y(x)$ esiste finito.

**Esercizio 4.13.6.** Risolvere il seguente problema di Cauchy, indicando chiaramente il dominio della soluzione:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{\ln(x^2)}{x} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

**Esercizio 4.13.7.** Determinare tutte e sole le soluzioni delle seguenti equazioni differenziali

$$y' + 2y = e^t\,, \quad y' + 2y = e^{-2t}\,, \quad y' - y = \sin(x)\,.$$

**Esercizio 4.13.8.** Integrare le seguenti equazioni differenziali:

$$t(1+y^2)y' = 3 \qquad (1+t^3)y' - t^2 y = 0 \qquad y' = \frac{2xy}{x^2-1}$$

**Esercizio 4.13.9.** Risolvere il Problema di Cauchy

$$y' = -\frac{2x}{1+x^2}y + \frac{1}{x(1+x^2)}, \qquad y(-1) = 0$$

e specificare qual è il piu' ampio intervallo in cui la soluzione è definita.

**Esercizio 4.13.10.** Integrare la seguente equazione differenziale

$$y' = \frac{x+y}{x-y}$$

utilizzando il cambio di variabile $z = \frac{y}{x}$

### 4.13.3. Equazioni differenziali lineari del secondo ordine

**Esercizio 4.13.11.** Verificare che le funzioni $y_1(x) = x$ e $y_2(x) = \dfrac{1}{x}$ sono entrambe soluzioni dell'equazione

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 0$$

e scrivere l'integrale generale dell'equazione.

**Esercizio 4.13.12.** Risolvere i seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \end{cases} , \quad \begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(\pi) = 1 \\ y'(\pi) = 1 \end{cases} , \quad \begin{cases} y'' - 6y' + 9y = 0 \\ y(4) = 0 \\ y'(4) = -2 \end{cases} .$$

**Esercizio 4.13.13.** Determinare, al variare del parametro reale $\alpha \neq 0$ l'insieme delle soluzioni del problema

$$\begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(\alpha) = 0 \, . \end{cases}$$

**Esercizio 4.13.14.** Determinare tutte e sole le soluzioni delle seguenti equazioni differenziali

$$y'' + y = \frac{1}{\cos(x)} , \quad y'' - y' = 2x - 1 - 3e^x , \quad y'' - 4y' + 4y = \sin(x) + e^{2x} .$$

**Esercizio 4.13.15.** Determinare tutte e sole le soluzioni delle seguenti equazioni differenziali

$$y'' + y = x \sin(x) , \quad y'' + 4y = 3\cos(x) - 2x$$

**Esercizio 4.13.16.** Determinare la soluzione del seguente Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 4y = e^t \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

**Esercizio 4.13.17.** Determinare tutte e sole le soluzioni della seguente equazione differenziale

$$y'' + y = \operatorname{cotan}(x)$$

# 5

# Sistemi di coordinate nel piano e nello spazio

## 5.1. Coordinate cartesiane e coordinate polari

Consideriamo un piano $\Pi$. Siamo abituati ad introdurvi un *sistema di coordinate cartesiane* nel seguente modo: fisso un punto del piano $O$ che chiamo *origine* e due distinte rette orientate passanti per $O$. Li chiamiamo *asse $x$* e *asse $y$*, rispettivamente. Su ciascun asse introduco una unitá di misura.

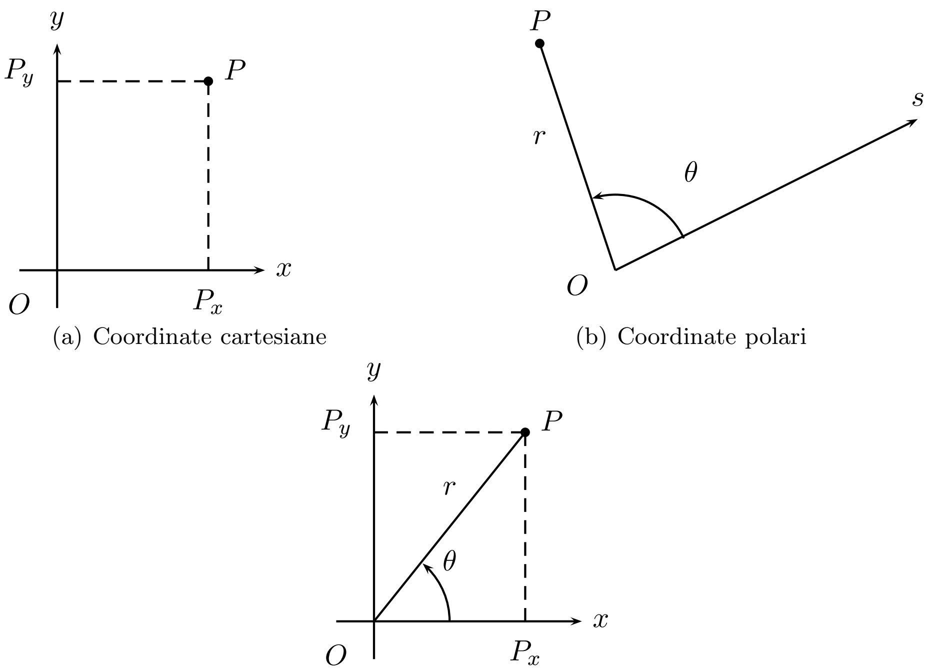
Consideriamo un punto $P$ del piano $\Pi$, traccio la retta parallela all'asse $y$ passante per $P$. Incontra l'asse $x$ in un punto che chiamo $P_x$. Traccio la retta parallela all'asse $x$ passante per $P$. Incontra l'asse $y$ in un punto che chiamo $P_y$.

I segmenti $OP_x$ e $OP_y$ hanno una misura determinata dall'unitá di misura scelta sui due assi. Se $P_x$ segue (o coincide con) $O$ nell'orientamento dell'asse $x$ chiamo *ascissa del punto $P$* la misura di $OP_x$. Se $P_x$ precede $O$ nell'orientamento dell'asse $x$ chiamo *ascissa del punto $P$* la misura di $OP_x$ cambiata di segno. Analogamente, considerando il segmento $OP_y$ definisco l'*ordinata* del punto $P$.

Se le due rette di riferimento, cioé l'asse $x$ e l'asse $y$ sono perpendicolari, il sistema di riferimento $Oxy$ si dice *sistema di riferimento cartesiano ortogonale.*

Il punto $P$ è cosí univocamente determinato dalla sua ascissa e dalla sua ordinata (piú brevemente dalle sue *coordinate cartesiane*). Si usa il simbolo $P \equiv (x, y)$ o $P(x, y)$ per dire che $P$ è il punto del piano $\Pi$ individuato dalle coordinate cartesiane $(x, y)$

Esistono altri sistemi di coordinate per individuare un punto del piano. Vediamone uno: considero un punto $O$ sul piano (che chiamo *polo*) ed una semiretta $s$, che chiamo *asse polare* uscente dal polo. Considero un punto $P$ sul piano: posso individuare la sua posizione sul piano in questo modo: mediante la sua distanza dall'origine e mediante l'angolo che devo percorrere in senso orario per portare l'asse polare sulla semiretta uscente da $O$ e passante per $P$, cioé tramite




(a) Coordinate cartesiane

(b) Coordinate polari

(c) Cambiamento di coordinate

Figura 5.1: Coordinate cartesiane e coordinate polari

una coppia ordinata $(r, \theta)$ con $r > 0$ e $\theta \in \mathbb{R}$ ( $\theta \in (-\pi, \pi]$ se voglio un solo valore di $\theta$ ).

**Osservazione 5.1.1.** Le coordinate polari sono ben definite solo per i punti $P$ diversi dal polo. Perché?

Considero ora un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani $Oxy$ ed un sistema di coordinate polari in cui il polo coincide con l'origine e l'asse polare con la semiretta positiva dell'asse $x$. Un punto $P$ del piano sarà individuato dalle coordinate cartesiane $(x, y)$ e dalle coordinate polari $(r, \theta)$. Che relazione c'è tra le due coordinate?

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases} \tag{5.1}$$

**Esempio 5.1.1.** Trovare le coordinate polari del punto $P$ di coordinate cartesiane $(1, 1)$.

Uso le formule (5.1): $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, mentre le uguaglianze $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$ ci dicono che $\theta = \dfrac{\pi}{4}$. Quindi le coordinate polari del punto $P$ sono $\left(\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

**Osservazione 5.1.2.** Le coordinate polari sono ben definite solo per i punti $P$ diversi dal polo. Come si riflette questo nelle formule di cambiamento di coordinate?

## 5.2. Coordinate cartesiane, cilindriche e sferiche

Consideriamo lo spazio affine tridimensionale. Di solito scegliamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, cioè fissiamo un punto $O$ dello spazio, che chiamiamo *origine* e 3 assi orientati e mutuamente ortogonali passanti per questo punto. Individuiamo un punto dello spazio tramite le proiezioni ortogonali del punto sui piani coordinati e sugli assi. Ma ci sono altri tipi di coordinate.

### 5.2.1. Coordinate cilindriche

Scelgo un punto $O$ dello spazio ed una retta orientata $t$ passante per $O$. Sul piano ortogonale alla retta e passante per $O$ metto un sistema di coordinate polari $(r, \varphi)$.
Se ho anche un sistema di coordinate cartesiane in cui l'origine è la stessa, l'asse $z$ coincide con l'asse $t$ e l'asse polare coincide con la direzione positiva dell'asse $x$, il cambiamento di coordinate è espresso dalle seguenti formule:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = t \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ t = z \end{cases} \tag{5.2}$$

### 5.2.2. Coordinate sferiche

Scelgo un punto $O$ dello spazio ed una semiretta orientata $t$ uscente da $O$. Sul piano $\pi$ ortogonale alla semiretta e passante per $O$ fisso un'ulteriore semiretta $s$ uscente da $O$.
La posizione di un punto $P$ dello spazio è univocamente determinata dalle seguenti 3 coordinate

**1.** la lunghezza $r$ del segmento orientato $P - O$ ;

**2.** L'angolo $\varphi$ che questo segmento orientato forma col semi-asse $t$ ;

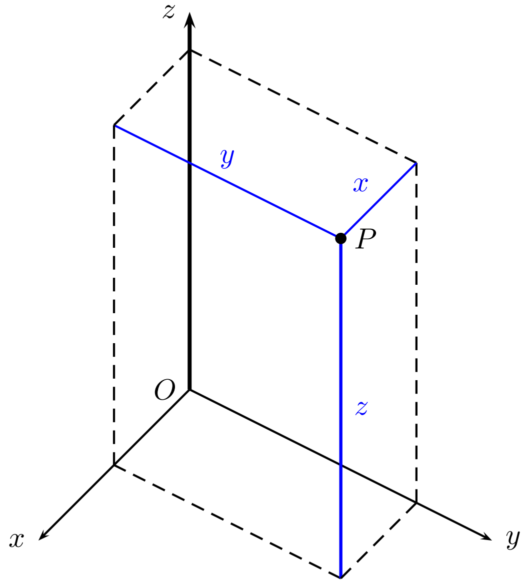



Figura 5.2: Coordinate cartesiane

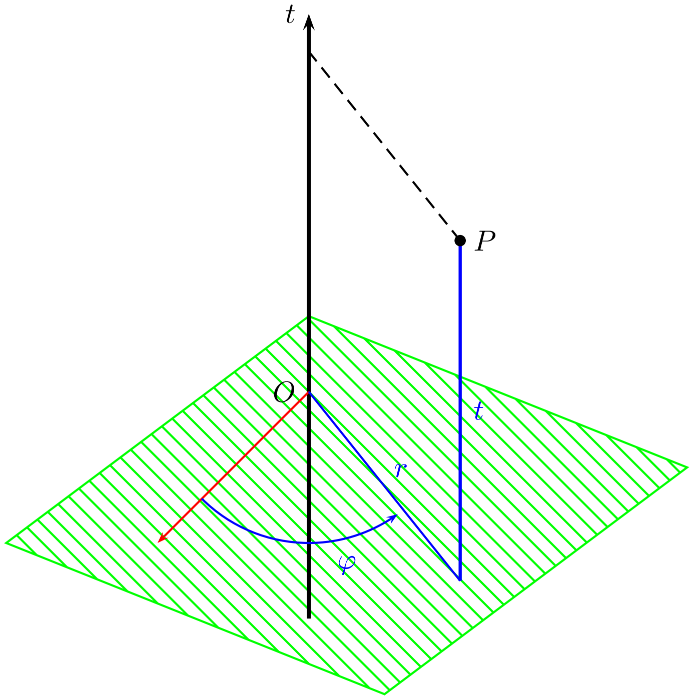



Figura 5.3: Coordinate cilindriche

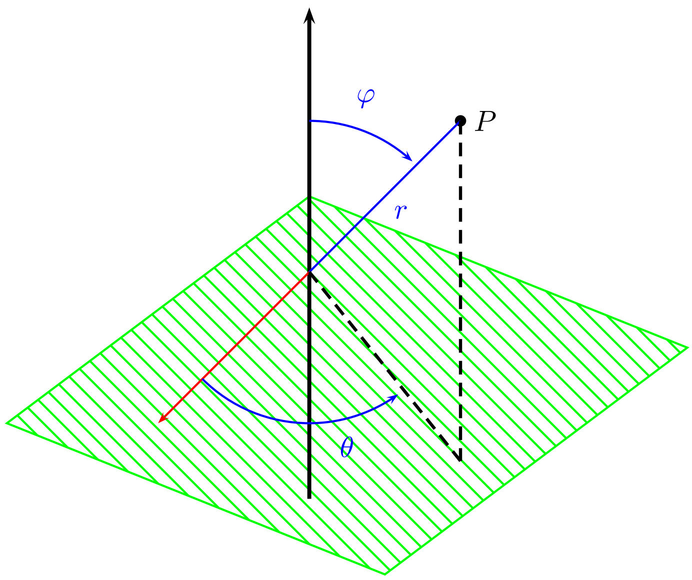



Figura 5.4: Coordinate sferiche

**3.** L'angolo $\theta$ che la proiezione di $P - O$ su $\pi$ forma col semi-asse $s$

Osserviamo che possiamo sempre supporre $\theta \in [0, 2\pi]$ e $\varphi \in [0, \pi]$. Se fisso un sistema di coordinate cartesiane ortogonali in cui l'origine coincide con il polo $O$, la direzione positiva dell'asse $z$ coincide col semi-asse $t$ e la direzione positiva dell'asse $x$ coincide col semi-asse $s$, valgono le seguenti formule di cambiamento di variabile:

$$\begin{cases} x = r \sin\varphi \cos\theta \\ y = r \sin\varphi \sin\theta \\ z = r \cos\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \sin\varphi = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \cos\varphi = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases} \tag{5.3}$$

# 6

# Funzioni di due o più variabili reali

## 6.1. Esempi ed esercizi svolti e/o proposti

### 6.1.1. Domini ed insiemi di livello

**Esercizio 6.1.1.** Disegnare sul piano $Oxy$ il dominio delle seguenti funzioni.

$$f(x,y) = \sqrt{1 - \ln\frac{y}{x}}\,, \qquad f(x,y) = \ln\frac{x^2-1}{4-y^2}\,,$$
$$f(x,y) = \frac{\sqrt{\dfrac{1}{2} - \sin\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{xy}}\,, \quad f(x,y) = \sqrt{\frac{\dfrac{1}{2} - \sin\sqrt{x^2+y^2}}{xy}}\,.$$

**Esercizio 6.1.2.** Disegnare il dominio e le linee di livello della funzione

$$f(x,y) = \frac{1}{\ln\left(1 - x^2 - \dfrac{y^2}{4}\right)}$$

**Esercizio 6.1.3.** Tra le seguenti funzioni identificare quelle radiali e quelle omogenee e studiarle

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{4+x^2+y^2}\,, \quad f(x,y) = \frac{y^2}{x^2}\exp\left(\frac{-y}{x}\right)\,, \quad f(x,y) = \frac{xy-y^2}{x^2+y^2}\,,$$
$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}\,, \quad f(x,y) = \frac{y}{x}\ln\left(\frac{y^2}{x^2}\right)\,, \qquad f(x,y) = \frac{x^2}{y^2+3x^2}$$
$$f(x,y) = \frac{xy+y^2}{x^2-y^2}\,, \qquad f(x,y) = \frac{y}{x}\exp\frac{-y}{x}\,.$$

### 6.1.2. Estremi assoluti tramite le linee di livello

**Esercizio 6.1.4.** Mediante lo studio degli insiemi di livello determinare massimo e minimo assoluti delle seguenti funzioni nell'insieme a fianco indicato (non fare nemmeno una derivata!!!) e determinare i punti in cui essi sono assunti

$$
\begin{array}{ll}
f(x,y) = \dfrac{y}{x^2+1}\,, & D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1\right\} \\
f(x,y) = y\mathrm{e}^{-x}\,, & D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq x \leq 1, \quad |y| \leq 2\right\} \\
f(x,y) = xy \quad \text{e} \quad g(x,y) = (xy)^2, & D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + \dfrac{y^2}{4} \leq 1\right\} \\
f(x,y) = x^2 - y^2\,, & D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x-1)^2 + y^2 \leq 1\} \\
f(x,y) = (2x-y)^2\,, & D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 \leq y \leq 4\} \\
f(x,y) = xy\,, & D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \\
& \qquad\qquad\qquad x \geq 0,\ y \geq 0\}
\end{array}
$$

### 6.1.3. Derivate parziali

**Esercizio 6.1.5.** Calcolare le derivate parziali prime e seconde delle seguenti funzioni

$$
\begin{aligned}
&f(x,y) = \exp(x^2 - 3y)\cos(2x + 6y)\,, \\
&f(x,y,z) = \exp(xz) + zy - \sin(xyz) + \cos(xy^3)\,.
\end{aligned}
$$

**Esercizio 6.1.6.** Scrivere l'equazione del(l'iper)piano tangente e della retta normale al grafico delle seguenti funzioni nel punto a fianco indicato

$$
\begin{array}{ll}
f(x,y) = \ln(xy) + \cos(x+y) & P = \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{4}, f\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{4}\right)\right) \\
f(x,y,z) = \exp(yz) + \cos\left(\dfrac{\pi}{6}xy\right) & P = (1, 2, \ln 3, f(1, 2, \ln 3))
\end{array}
$$

**Esercizio 6.1.7.** Disegnare nello spazio $Oxyz$ il dominio della funzione

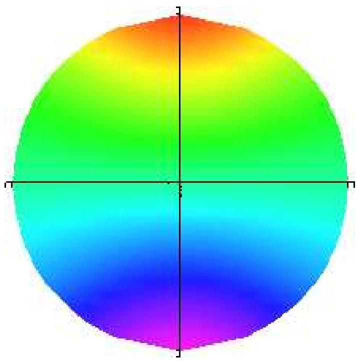
$$f(x,y,z) = \ln(x^2 - y^2 + z^2) + x - z + y\,.$$

Determinare, se esistono, i punti del dominio in cui l'iperpiano tangente al grafico orizzontale (cio del tipo $t = C$, dove $t$ la quarta coordinata.)

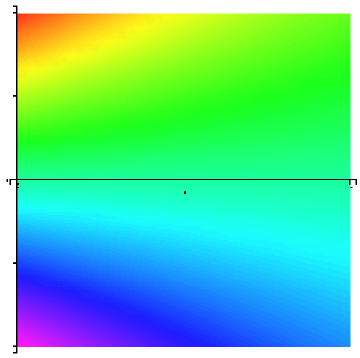
### 6.1.4. Funzioni composte, derivate direzionali

**Esercizio 6.1.8.** Siano $\alpha \colon t \in \mathbb{R} \to (t-1, t+1)$ e $\beta \colon t \in \mathbb{R} \to \left(t^2 - 1, 2\right)$ due curve nel piano. Sia $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile. Sapendo che

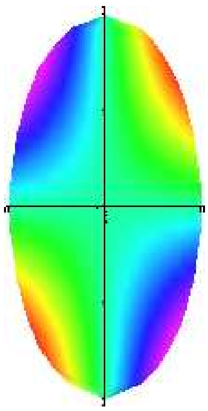
$$\frac{d}{dt} f \circ \alpha \bigg|_{t=1} = 2 \quad \text{e che} \quad \frac{d}{dt} f \circ \beta \bigg|_{t=1} = 3\,,$$



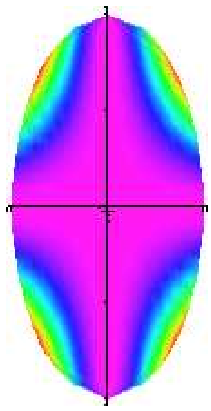
(a) $f(x,y) = \dfrac{y}{x^2+1}$



(b) $f(x,y) = y\mathrm{e}^{-x}$



(c) $f(x,y) = xy$



(d) $g(x,y) = (xy)^2$

Figura 6.1: Le linee di livello di alcune funzioni dell'esercizio 6.1.4

calcolare, se possibile $Df(0,2)$.
Ripetere sostituendo la curva $\beta$ con la curva $\beta \colon t \in \mathbb{R} \to \big(t^2 - 1, 2t\big)$

**Esercizio 6.1.9.** Calcolare $\displaystyle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \alpha)\Big|_{t=1}$ dove la funzione $f$ e la curva $\alpha$ sono definite da

$$\begin{aligned} &f \colon (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \to x^3 y + x z^3 \in \mathbb{R}, \\ &\alpha \colon t \in \mathbb{R} \to \big(3t, t^2, t^3 - 1\big) \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

**Esercizio 6.1.10.** Calcolare la derivata direzionale della funzione

$$f(x,y) = x^4 \cos(y)$$

nel punto $P \equiv \left(2, \frac{\pi}{4}\right)$, nella direzione individuata dal vettore $\mathbf{v} = (1,3)$.

**Esercizio 6.1.11.** Calcolare la derivata direzionale della funzione

$$f(x,y,z) = x^4 - xy^3 + zy$$

nel punto $P \equiv (1,2,3)$, nella direzione individuata dal vettore $\mathbf{v} = (1,1,1)$.

### 6.1.5. Polinomio di Taylor ed estremi locali

**Esercizio 6.1.12.** Per ciascuna delle seguenti funzioni calcolare lo sviluppo di Taylor al secondo ordine con resto di Peano, nel punto a fianco indicato

$$\begin{aligned} &f(x,y) = \mathrm{e}^{2x-3y} && P = (1,0) \\ &f(x,y) = \sin(x-y)(x+y^2) && P = (0,0) \\ &f(x,y) = \ln(xy)(x-2y) && P = (2,1) \\ &f(x,y) = x^5 y^3 - x^3 y^5 && P = (1,-1) \\ &f(x,y) = xy\ln(xy^2) + x^2 y && P = (1, \mathrm{e}^{-3/2}) \end{aligned}$$

**Esercizio 6.1.13.** Per ciascuna delle seguenti funzioni determinare i punti stazionari e stabilirne la natura (max rel, min rel, sella), cercando, ove possibile, di evitare lo studio della matrice hessiana.

$$\begin{aligned} &f(x,y) = x^2 \ln(x-y)\,, && f(x,y) = x\ln(x-y)\,, \\ &f(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}\,, && f(x,y) = y^2 - x^2 y \end{aligned}$$

**Esercizio 6.1.14.** Determinare, al variare del parametro reale $a$, la natura dei punti critici della funzione $f_a(x,y) = x^4 + ax^2 y + y^2$.

**Esercizio 6.1.15.** Delle seguenti funzioni di due o tre variabili reali, di classe $C^2$ noto lo sviluppo di Taylor con resto di Peano in un determinato punto. Determinare il valore della funzione, delle derivate parziali prime e seconde nel punto in esame e determinare, ove possibile, la natura del punto

$$
\begin{aligned}
&f(x,y) = (x-1)^2 + 2(x-1)y + 3y^2 + o((x-1)^2 + y^2)\,,\\
&f(x,y) = 3 + x + x^2 - xy + o(x^2 + y^2)\,,\\
&f(x,y,z) = 1 + x^2 + 4x(y-3) + 8(y-3)^2 + (z-1)^2 - 2x(z-1)\\
&\qquad\qquad + o(x^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2)\,,\\
&f(x,y,z) = 1 + 4x^2 + 2xy + 8y^2 + z^2 - 2xz + o(x^2 + y^2 + z^2)\,,
\end{aligned}
$$

**Esercizio 6.1.16.** Per ciascuna delle seguenti funzioni determinare l'insieme dei punti critici e studiarne, ove possibile, la natura

$$
f(x,y,z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + xyz\,, \quad f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 + xyz
$$

### 6.1.6. Estremi assoluti

Determinare gli estremi assoluti delle seguenti funzioni nel dominio a fianco indicato

$$
\begin{aligned}
&f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + y^2 - 1 && D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \le 9\}\,;\\
&f(x,y) = y^2(x^2 + y^2 - 2x) && D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \le 4\,,\\
& && \qquad x^2 + y^2 - 2x - 2y \le 0\,,\ y \ge 0\Big\},\\
&f(x,y) = \exp(x^2 + y^2) - \frac{x^2}{2} - y^2 && D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \ge \frac{1}{2},\\
& && \qquad 3x^2 + 4y^2 \le 4\Big\},\\
&f(x,y) = \big(1 + x^2 + y\big)\exp(x-y)\,, && D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ |x| \le 1\,,\quad |y| \le 1\big\}\,,\\
&f(x,y) = x^2 - 4y^2\,, && D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + 4y^2 \le 1\big\}\,,\\
&f(x,y) = \frac{1}{x^2 + xy + 2y^2}\,, && D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \le x^2 + y^2 \le 4\big\}\,,\\
&f(x,y) = x^2 + y^3\,, && D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \ge 0\,,\\
& && \qquad y \ge 0\,,\ x + y \le 4\Big\}.
\end{aligned}
$$

# 7

# Curve e integrali curvilinei

## 7.1. Esempi ed esercizi svolti e/o proposti

**Esempio 7.1.1.** Si consideri la curva parametrica

$$\varphi\colon t \in [0, 2\pi] \to \varphi(t) = (a\cos(t), a\sin(t), bt) \in \mathbb{R}^3$$

dove $a$ e $b$ sono due costanti positive. Provare che il supporto di $\varphi$ è contenuto sul cilindro di equazione $x^2 + y^2 = a^2$. Provare che $\varphi$ è regolare e calcolarne il versore tangente in ogni punto. Scrivere l'equazione della retta tangente in $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)$. È semplice? È chiusa? Calcolarne la lunghezza. Cosa posso dire della proiezione di $\varphi$ sul piano $Oxy$?

**Esercizio 7.1.1.** Si consideri la curva parametrica

$$\varphi\colon t \in [0, 2\pi] \to \varphi(t) = (at\cos(t), at\sin(t), bt) \in \mathbb{R}^3$$

dove $a$ e $b$ sono due costanti positive. Provare che il supporto di $\varphi$ è contenuto sul cono di equazione $x^2 + y^2 = \frac{a^2 z^2}{b^2}$. Provare che $\varphi$ è regolare e calcolarne il versore tangente in ogni punto. È semplice? È chiusa? Calcolarne la lunghezza. Cosa posso dire della proiezione di $\varphi$ sul piano $Oxy$? Detta $\psi$ tale proiezione, determinarne il versore tangente in ogni suo punto e scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente in $\psi\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

**Esercizio 7.1.2.** Si consideri la curva di equazione polare

$$r(\theta) = 1 + \cos(\theta) \quad \theta \in [-\pi, \pi]\,.$$

È regolare? Tracciare il suo supporto indicando punto iniziale, punto finale e verso di percorrenza. per ogni $t \in (-\pi, \pi)$ in cui è definito, scrivere il versore

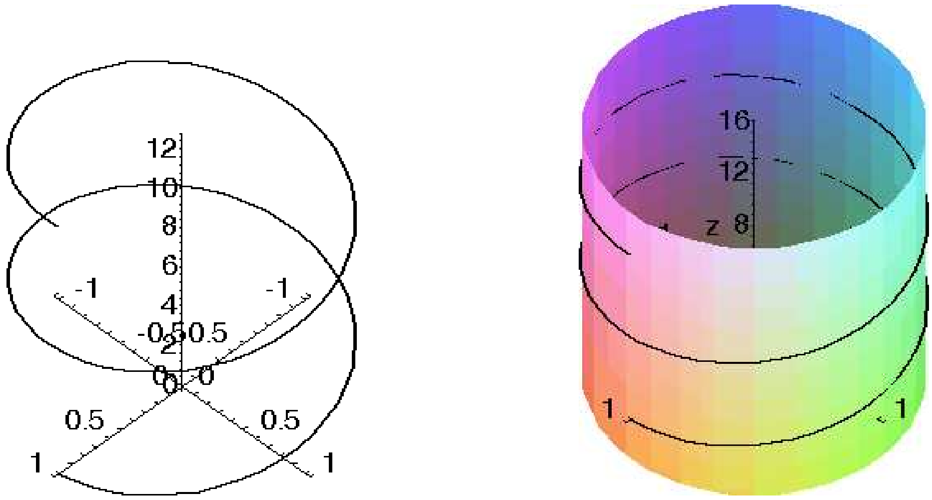
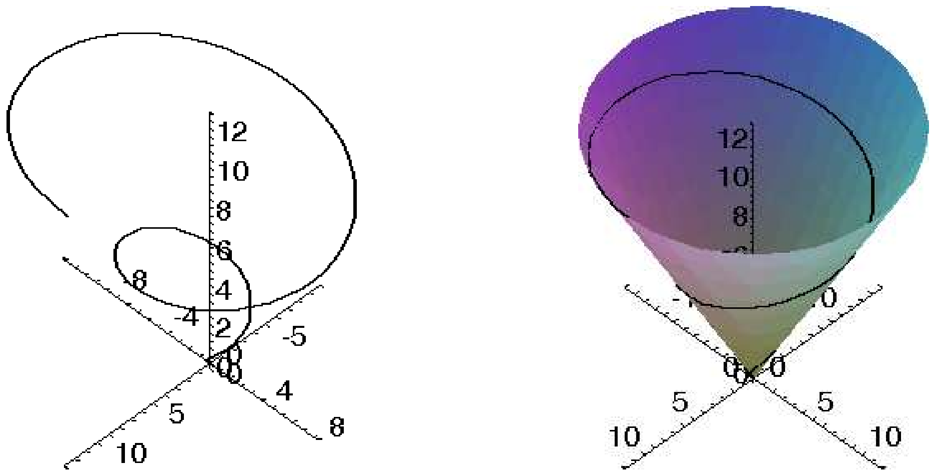
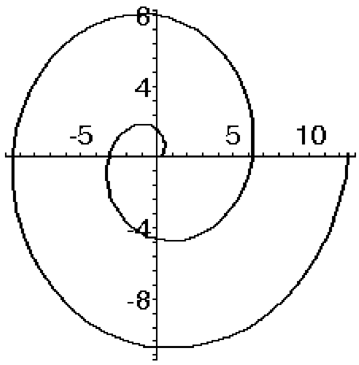



Figura 7.1: Elica su cilindro, $\varphi\colon t \in [0, 4\pi] \to \varphi(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$




(c) Proiezione sul piano $Oxy$

Figura 7.2: Elica su cono, $\varphi\colon t \in [0, 4\pi] \to \varphi(t) = (t\cos(t), t\sin(t), t)$

tangente alla curva. Scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente alla curva nel punto di coordinate polari $\left(r\left(\frac{\pi}{4}\right), \frac{\pi}{4}\right)$. Calcolarne la lunghezza e le coordinate del baricentro.

**Esercizio 7.1.3.** Sia $\alpha$ la curva parametrica di equazione

$$\alpha\colon t \in [0,1] \to \alpha(t) = (\exp(2t), 2\exp(t), t) \in \mathbb{R}^3.$$

Determinare l'equazione della retta tangente in $\alpha(2)$ e calcolare la lunghezza della curva.

**Esercizio 7.1.4.** Sia $\alpha$ la curva parametrica

$$\alpha\colon t \in [-\pi,\pi] \to \alpha(t) = (\exp(2t), 2t, \sin(2t)) \in \mathbb{R}^3$$

Sia $f\colon (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \to \frac{1}{4}\sqrt{x^2+2-\sin^2 y} \in \mathbb{R}$. Calcolare $\displaystyle\int_\alpha f \mathrm{d}s$.

**Esercizio 7.1.5.** Sia $\gamma$ l'intersezione tra il piano $x = y$ e la sfera $x^2+y^2+z^2 = 4$. Sia $f\colon (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \to \sqrt{2y^2+z^2} \in \mathbb{R}$. Calcolare $\displaystyle\int_\gamma f \mathrm{d}s$. Scrivere l'equazione della retta tangente alla curva nel punto $(1,1,\sqrt{2})$.

**Esercizio 7.1.6.** Sia $\gamma$ una curva piana il cui supporto è

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon x^2+y^2 = 4\,,\ y \geq 0\,,\ y \leq x\right\}$$

e avente $(2,0)$ come punto iniziale. Sia $\mathbf{F}\colon (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to \left(xy, \frac{x^2}{2}\right) \in \mathbb{R}^2$. Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{x}$.

**Esercizio 7.1.7.** Calcolare la lunghezza della porzione di curva $y^3 - x^2 = 0$ contenuta nel cerchio centrato nell'origine e raggio $\sqrt{2}$.

**Esercizio 7.1.8.** Sia $\gamma$ la frontiera dell'insieme

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon x+y \geq 0\,,\ x^2+y^2 \leq 4\right\}.$$

Sia $f\colon (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to x+y^2 \in \mathbb{R}$. Calcolare $\displaystyle\int_\gamma f \mathrm{d}s$.

**Esercizio 7.1.9.** Sia $\gamma$ l'unione dei tre seguenti segmenti in $\mathbb{R}^3$: $\gamma_1$ segmento parallelo all'asse $x$ che congiunge i punti $(0,0,0)$ e $(2,0,0)$; $\gamma_2$ segmento parallelo all'asse $y$ che congiunge i punti $(2,0,0)$ e $(2,2,0)$; $\gamma_3$ segmento parallelo all'asse $z$ che congiunge i punti $(2,2,0)$ e $(2,2,1)$; Sia $\mathbf{F}$ il campo vettoriale definito da

$$\mathbf{F}\colon (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \to (x^2+z, y, z^3+x) \in \mathbb{R}^3$$

Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{x}$.

**Esercizio 7.1.10.** Calcolare le coordinate del baricentro di un filo a forma di circonferenza definito come il luogo $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2=1, \ y \geq 0\}$, e avente densità lineare di massa costante $\delta(x,y)=1$

**Esercizio 7.1.11.** Calcolare le coordinate del baricentro di una molla a forma di elica di equazione $\gamma(t) = (a\cos(t), a\sin(t), bt)$, con $t \in [0, 2\pi]$, $a, b > 0$ e densità lineare di massa $\delta(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$.

**Esercizio 7.1.12.** Calcolare il momento di inerzia di:

1. circonferenza di equazione $\gamma(t) = (a\cos(t), a\sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$, $a > 0$ e densità lineare costante $\delta$, rispetto all'asse $y$.

2. elica di equazione $\gamma(t) = (a\cos(t), a\sin(t), bt)$, con $t \in [0, 4\pi]$, $a, b > 0$ e densità lineare di massa costante $\delta$, rispetto all'asse $z$.

**Esercizio 7.1.13.** Studiare la curva parametrica di equazioni

$$\begin{cases} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = \sin^3 t \end{cases} \quad t \in [-\pi, \pi]$$

**Esercizio 7.1.14.** Studiare il luogo dei punti di equazione polare

$$r(\theta) = \sin(3\theta)\,; \ r^2(\theta) = \cos(2\theta)$$

**Esercizio 7.1.15.** Data la curva parametrica

$$\vec{r}(t) = t(2t^2 - 3t + 1)\vec{i} + \cos(2\pi t)\vec{j}$$

con $t \in [0, 1]$,

1. stabilire se è chiusa e/o regolare.

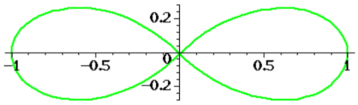
2. Trovare le equazioni parametriche della curva il cui sostegno è dato come intersezione delle superfici

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ z = x + y \end{cases}$$

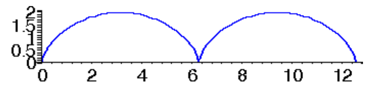
**Esercizio 7.1.16.** Trovare le equazioni parametriche della curva il cui sostegno è dato come intersezione delle superfici

$$\begin{cases} {}^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ (x-1)^2 + y^2 - z^2 = 0 \end{cases}$$

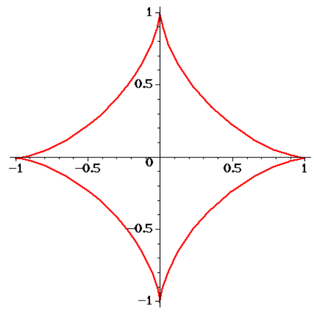
e dire se la curva è regolare/semplice/chiusa.



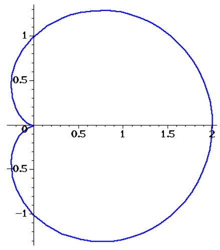

(a) Lemniscata $r^2 = \cos(2t)$



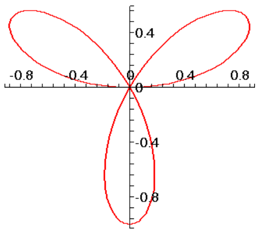

(b) Cicloide $x = t - \sin(t)$, $y = 1 - \cos(t)$




(c) Astroide $x = \cos^3(t)$, $y = \sin^3(t)$




(d) Cardioide $r = 1 + \cos(t)$




(e) $r = \sin(3t)$

Figura 7.3: Alcune curve famose

**Esercizio 7.1.17.** Calcolare la lunghezza della curva

$$\vec{r}(t) = \cos(t)\vec{i} - \sin(t)\vec{j} + \ln(3\sin(t))\vec{k}$$

con $t \in [\pi/3, \pi/2]$.

**Esercizio 7.1.18.** Data la curva parametrica

$$\vec{r}(t) = \left(e^t \cos(t)\vec{i} + e^t \sin(t)\vec{j} + e^t\vec{k}\right)$$

$t \in (-\infty, +\infty)$ calcolare la lunghezza d'arco $L_o(t)$ di origine $\vec{r}(0) = (1, 0, 1)$. Riparametrizzare poi la curva mediante l'ascissa curvilinea $s = L_o(t)$.

**Esercizio 7.1.19.** Calcolare l'integrale di linea di prima specie

$$\int_\Gamma \frac{1-x}{y^2+z^2}\mathrm{d}\gamma$$

dove $\Gamma$ è il cammino parametrizzato da

$$\vec{\gamma}(t) = \big(t^2, \cos(t), \sin(t)\big) \quad t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

**Esercizio 7.1.20.** Calcolare

$$\int_\Gamma \sqrt{2y^2+z^2}\mathrm{d}\gamma$$

dove $\Gamma$ è il cammino semplice con sostegno soluzione del sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 4 \\ y = x \end{cases}$$

ed orientato in modo che la sua proiezione sul piano $(z, x)$ sia percorsa in senso antiorario.

**Esercizio 7.1.21.** Determinare la retta tangente all'astroide

$$\vec{\gamma}(t) = \big((\cos(t))^3, (\sin(t))^3\big) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

nel punto $P = (\sqrt{2}/4, \sqrt{2}/4)$.

**Esercizio 7.1.22.** Calcolare

$$\int_\Gamma (x^2+y^2)\mathrm{d}\gamma$$

essendo $\Gamma$ la curva in forma polare

$$\rho = e^{2\theta}, \qquad \theta \in (-\infty, 0]$$

**Esercizio 7.1.23.** Un filo omogeneo, di densità lineare $\rho$, è disposto lungo la curva di equazione

$$\vec{r}(t) = a(\cos(t) + \sin(t))\vec{i} + a(\sin(t) - \cos(t))\vec{j}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Calcolare il momento di inerzia rispetto all'asse $z$.

**Esercizio 7.1.24.** Calcolare il lavoro del campo $\vec{F} = y\vec{i} + x^2\vec{j}$ lungo la frontiera $\partial S$ dell'insieme

$$S = \left\{(x, y) \colon x^2 - 1 \le y \le \sqrt{1 - x^2}, \quad y \le x + 1\right\}$$

**Esercizio 7.1.25.** Calcolare il lavoro del campo $\vec{F} = \cos x\vec{i} - y\vec{j}$ lungo la curva $y = \sin x$ per $x \in [0, \pi]$.

**Esercizio 7.1.26.** Sia dato il campo di forze

$$\vec{F}(x, y) = (x + y)\vec{i} + (x - y)\vec{j}$$

Dimostrare che il lavoro da esso compiuto su una particella in moto lungo la curva

$$\vec{\alpha}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j}$$

dipende solo da $f(a),\ f(b),\ g(a),\ g(b)$.

**Esercizio 7.1.27.** Sia dato il campo di forze piano in coordinate polari

$$\vec{F}(r, \theta) = -4\sin(\theta)\vec{i} + 4\sin(\theta)\vec{j}$$

Si calcoli il lavoro che esso compie quando una particella si muove dal punto $(1, 0)$ all'origine lungo la spirale di equazione polare $r = e^{-\theta}$.

# 8

# Integrali doppi e tripli, teorema della divergenza

sectionEsercizi svolti e/o proposti

**Esercizio 8.0.28.** Nei seguenti integrali si scambi l'ordine di integrazione. Disegnare il dominio di integrazione.

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{|x|}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x; \quad \int_{0}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x}}^{1-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x;$$
$$\int_{1/2}^{1}\left(\int_{0}^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

**Esercizio 8.0.29.** Calcolare i seguenti integrali doppi $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ usando le formule di riduzione

$$\begin{array}{ll}
D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le x\le 1,\ |y|\le x^2\} & f(x,y)=xe^y;\\
D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ |x|\ge 1,\ |y|\ge 1,\ x^2+y^2\le 2\} & f(x,y)=x;\\
D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\ge 0,\ 1\le x^2+y^2\le 4\} & f(x,y)=x^2+y;\\
D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le x\le y\le 1\} & f(x,y)=x^2y;\\
D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y\ge x^2,\ x\ge y^2\} & f(x,y)=xy^3;
\end{array}$$

**Esercizio 8.0.30.** Calcolare i seguenti integrali doppi $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ usando le formule di riduzione. Disegnare il dominio di integrazione.

$$\begin{array}{ll}
D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2/2\le y\le x^2,\ 1<x<2\} & f(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2};\\
D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2\le y\le 2,\ x\ge 1/2\} & f(x,y)=|\ln(xy)|;
\end{array}$$

**Esercizio 8.0.31.** Calcolare le coordinate del baricentro di una lamina $D$ di densità superficiale $\rho(x,y) = \sqrt{9+x^2} + 2y + 1$ dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le x \le 1/2,\ 0 \le y \le 1\}$.

**Esercizio 8.0.32.** Calcolare il momento di inerzia rispetto all'asse $x$ di un corpo $D$ di densità superficiale $\rho(x,y) = \sqrt{81 - y^2} + x$ dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 3/2\}$.

**Esercizio 8.0.33.** Calcolare il momento di inerzia rispetto all'asse $z$ di un corpo $D$ di densità superficiale $\rho$ costante, dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 3/2\}$.

**Esercizio 8.0.34.** Calcolare la massa di un corpo $D$ di densità superficiale $\rho(x,y) = \sqrt{1+x^4}$ dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\}$.

**Esercizio 8.0.35.** Sia $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 \le y \le 2x^2,\ 1 \le xy \le 4\big\}$. Disegnare $D$, calcolare l'Area di $D$ e $\displaystyle\iint_F x^3y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$

**Esercizio 8.0.36.** Sia $D$ la regione di piano limitata dalle circonferenze $x^2 - 2x + y^2 = 0$, $x^2 - 4x + y^2 = 0$, dalla bisettrice del primo e terzo quadrante e dall'asse delle ascisse. Disegnare $D$ e calcolarne l'Area.

**Esercizio 8.0.37.** Disegnare la regione

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \sqrt{x^2+y^2} \le 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right\}$$

e calcolarne l'Area. Determinarne il baricentro.

**Esercizio 8.0.38.** Disegnare il solido che si ottiene ruotando di $2\pi$ radianti il cerchio $\begin{cases} (x-2)^2 + z^2 = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ attorno all'asse $z$ e calcolarne il Volume.

**Esercizio 8.0.39.** Sia $E$ il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ limitato dalle rette $y = x$, $y = 2x$, $y + x = 2$, $y + 2x = 2$. Disegnare $E$. Calcolare l'Area di $E$ e $\displaystyle\iint_E xy^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

**Esercizio 8.0.40.** Sia $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \le ye^{-x} \le 2\,,\ 3 \le ye^x \le 5\big\}$. Calcolare l'Area di $D$ e $\displaystyle\iint_D xy \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

**Esercizio 8.0.41.**

1. Calcolare $\displaystyle\iint_C xy \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ dove $C$ è il semicerchio di centro $(1,0)$ e raggio 1 contenuto nel semipiano delle ordinate positive. Calcolarlo sia usando le coordinate polari centrate nell'origine che quelle centrate in $(1,0)$.

2. Calcolare $\iint_C (1 + x^2 + y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

**Esercizio 8.0.42.** Calcolare l'Area della regione di piano $D$ delimitata dall'ellisse $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$. Calcolare $\iint_D \exp\big(9x^2 + 16y^2\big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

**Esercizio 8.0.43.** Sia $E$ il tetradero di vertici $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,0,1)$. Disegnare $E$ e calcolare $\iiint_E (y + \sin z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

**Esercizio 8.0.44.** Sia $E$ il tetradero di vertici $(0,0,0)$, $(0,1,1)$, $(1,0,1)$, $(0,0,1)$. Disegnare $E$ e calcolare $\iiint_E (xy + \sin(\pi z))\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

**Esercizio 8.0.45.** Sia $E = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 \le x \le 1\,,\ 0 \le y \le 2\,,$ $0 \le z \le 6 - x^2 - y^2\big\}$. Disegnare $E$ e calcolare $\iiint_E x\ln(1+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

**Esercizio 8.0.46.** Sia $E$ l'intersezione tra la palla di raggio 1 centrata nell'origine e il cono $C = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z \ge 0\,,\ 3(x^2+y^2) \le z^2\big\}$. Disegnare $E$ e calcolare $\iiint_E y^2 z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

**Esercizio 8.0.47.** Sia $= \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z \ge 0\,,\ x^2+y^2+1 \le z^2 \le 4\big\}$. Disegnare $E$ e calcolare $\iiint_E y^2 z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

**Esercizio 8.0.48.** Sia $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le x,\ 0 \le z \le xy\}$. Sia $f \colon (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \to y^2 z \in \mathbb{R}$. Calcolare $\iiint_D f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

**Esercizio 8.0.49.** Esprimere $\int\int\int_B f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ per mezzo di integrali ripetuti di una variabile, dove $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2+z^2 \le 36,\ z > -1\}$ ed $f \in C(B, \mathbb{R})$, senza usare cambiamenti di variabile.

**Esercizio 8.0.50.** Calcolare i seguenti integrali tripli $\iiint_B f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ usando le formule di riduzione

1. $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ z > x^2+y^2,\ x+y+z < 1\}$, $f(x,y) = 1$;
2. $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ z^2 > x^2+y^2,\ 2z < -x+3,\ z > 1\}$, $f(x,y) = 1$;

**Esercizio 8.0.51.** Usando opportuni cambiamenti di coordinate, si calcoli

1. $\iiint_E \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+(z-3)^2}}$, dove $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2+4z^2 \le 4\}$;
2. $\iiint_S \sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, dove $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2 \le 1,\ z^2-x^2-y^2 \le 0,\ z \ge 0\}$;

**Esercizio 8.0.52.** Calcolare le coordinate del baricentro di una calotta sferica $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, \ z \geq \sqrt{R^2 - r^2}\}$ riempita di materiale omogeneo (n.b. il raggio della sfera è $R$ quello della calotta è $r$). (sugg. Usare coordinate cilindriche).

**Esercizio 8.0.53.** Calcolare il momento di inerzia rispetto all'asse $z$ di un corpo $S$ di densità costante 1, dove $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ z \geq 0\}$;

# 9
# Superfici, integrali di superficie, teorema di Stokes

## 9.1. Esercizi svolti e/o proposti

**Esercizio 9.1.1.** Verficare che le seguenti applicazioni definiscono delle superfici parametrizzate regolari e calcolarne il piano tangente ed il versore normale nel punto a fianco indicato

$$\varphi\colon (u,v) \in [0,4] \times [0,4] \to \begin{cases} x(u,v) = u+v \\ y(u,v) = u-2v \\ z(u,v) = u^2+4v^2 \end{cases} \qquad \varphi(1,2)$$

$$\varphi\colon (u,v) \in K \to \begin{cases} x(u,v) = u^2 \\ y(u,v) = v^2 \\ z(u,v) = uv \end{cases} \qquad \varphi(1,1)$$

dove $K$ Ã¨ la parte cerchio centrato nell'origine di raggio 3, contenuta nel primo e secondo quadrante.

$$\varphi\colon (u,v) \in [0,2\pi] \times [0,2\pi] \to \begin{cases} x(u,v) = (2+\cos(u))\cos(v) \\ y(u,v) = (2+\cos(u))\sin(v) \\ z(u,v) = \sin(u) \end{cases} \qquad \varphi\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right)$$

**Esercizio 9.1.2.** Calcolare l'Area di ciascuna delle superfici dell'esercizio precedente.

**Esercizio 9.1.3.** Sia $T = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2-x^2-y^2\right\}$. Disegnare $T$ e calcolare l'Area della frontiera di $T$.

**Esercizio 9.1.4.** Calcolare l'Area della superficie generata dalla rotazione della cicloide $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ , $t \in [0, 2\pi]$ attorno all'asse $x$ di un angolo giro.

**Esercizio 9.1.5.** Calcolare $\displaystyle\int_\Sigma z d\sigma$ dove $\Sigma$ Ã¨ la porzione di superficie $z = xy$ che si proietta in $T \equiv \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le y \le x\sqrt{3}\,,\ x^2 + y^2 \le 1\right\}$

**Esercizio 9.1.6.** Sia $\mathbf{F}\colon (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \to (y, x, 0) \in \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale. Sia $\Sigma$ la porzione di superficie $z = xy$ che si proietta sull'insieme

$$T \equiv \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \le x \le \sqrt{2 - y^2}\right\}.$$

Calcolare il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso $\Sigma$.

**Esercizio 9.1.7.** Sia $\mathbf{F}\colon (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \to (x + y, z - y, x^3 y) \in \mathbb{R}^3$. Calcolare il flusso di $rot\mathbf{F}$ attraverso la superficie

$$\Sigma \equiv \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = x^2 + y^2\,,\ x^2 + y^2 = 4\right\}$$

dove il versore normale $\mathbf{n}$ è orientato verso l'alto.

**Esercizio 9.1.8.** Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$\mathbf{F}\colon (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \to (z, x^2 y, y^2 z) \in \mathbb{R}^3$$

uscente dalla superficie del solido

$$D \equiv \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon 2\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 1 + x^2 + y^2\right\}\ .$$

**Esercizio 9.1.9.** Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$\mathbf{F}\colon (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \to (x^3, y^3, z) \in \mathbb{R}^3$$

uscente dalla sfera centrata nell'origine e di raggio 3.

**Esercizio 9.1.10.** Sia $\Sigma$ la porzione della superficie sferica centrata in $(0, 0, 1)$ contenuta nel semispazio $z \ge 0$. Sia $\mathbf{n}$ il versore normale a $\Sigma$ che punta verso l'esterno della sfera. Sia $\mathbf{F}$ il campo vettoriale di $\mathbb{R}^3$ definito da

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y\cos(xz), x^2, \exp(yz)).$$

Calcolare $\iint_\Sigma \langle \mathrm{rot}\,\mathbf{F}\,,\ \mathbf{n}\rangle$

**Esercizio 9.1.11.** Sia $\gamma$ l'intersezione tra le superfici cilindriche di equazioni $z = x^2$ e $x^2 + y^2 = 9$. Provare che $\gamma$ è una curva semplice e chiusa e calcolare

$$\int_\gamma y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y + z^2\mathrm{d}z.$$

# 10
# Disuguaglianza di Chebyshev

## 10.1. Disuguaglianza di Chebyshev

**Teorema 10.1.1.** *Sia $x_1, x_2, \ldots, x_n$ un campione relativo ad un carattere numerico, con media $\overline{x}$ e varianza $\sigma^2 > 0$. Per $k \geq 1$ sia*

$$S_k := \{x_i, i = 1, \ldots, n \colon |x_i - \overline{x}| < k\sigma\}\,.$$

*Allora $\dfrac{\#S_k}{n} \geq 1 - \dfrac{1}{k^2}$.*

*Dimostrazione.* Dalla definizione di varianza abbiamo

$$\begin{aligned} n\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n}(xi - \overline{x})^2 &= \sum_{i\colon x_i \in S_k}(xi - \overline{x})^2 + \sum_{i\colon x_i \notin S_k}(xi - \overline{x})^2 \geq \\ &\geq \sum_{i\colon x_i \notin S_k}(xi - \overline{x})^2 \geq \sum_{i\colon x_i \notin S_k}(k\sigma)^2 = (n - \#S_k)k^2\sigma^2. \end{aligned}$$

Dividendo per $n\sigma^2 k^2$ otteniamo

$$\frac{1}{k^2} \geq 1 - \frac{\#S_k}{n}$$

da cui la tesi. $\square$

# 11
# Probabilità: esercizi vari

## 11.1. Combinatorica e probabilità uniforme

**Esercizio 11.1.1.** Si lancia una moneta non truccata per $n$ volte e, ogni volta, si guarda se esce testa o croce. Quanti sono i possibili risultati dopo $n$ lanci?

**Esercizio 11.1.2.** Un lucchetto ha una combinazione di 4 cifre, da 0 a 9. Quante sono le possibili combinazioni del lucchetto? Se imponiamo che ogni cifra debba essere strettamente maggiore della precedente, quante combinazioni possibili ci sono nel lucchetto?

**Esercizio 11.1.3.** Quanti sono i possibili anagrammi della parola `matematica`? E della parola `ingegneria`?

**Esercizio 11.1.4.** $2n$ persone si devono dividere in 2 squadre, di $n$ persone ciascuna. In quanti modi è possibile farlo?

**Esercizio 11.1.5.** Quante diagonali ha un poligono convesso di $n$ lati?

**Esercizio 11.1.6.** La SST (Società Spaziale per le Telecomunicazioni) gestisce le comunicazioni tra i diversi pianeti. Affinché il sistema di comunicazione interplanetaria funzioni, è necessario assegnare un codice binario di $n$ cifre a ciascun pianeta. Se la SST gestisce $k$ pianeti, di quanti caratteri binari devono essere composti questi codici?

**Esercizio 11.1.7.** Lancio due dadi non truccati. Quanto vale la probabilità di ottenere almeno un "6"? Quanto vale la probabilità di ottenere due "6"? Mi dicono che è uscito almeno un "6", quanto vale ora la probabilità di aver ottenuto due "6"?

**Esercizio 11.1.8.** Un'urna contiene 10 palline bianche, numerate da 1 a 10. Una seconda urna contiene 20 palline rosse, numerate da 1 a 20. Estraggo una pallina dalla prima urna ed una pallina dalla seconda urna.

1. Quanto vale la probabilità di estrarre due palline con lo stesso numero?
2. Quanto vale la probabilità di estrarre due palline pari?

[$\frac{1}{20}$, $\frac{1}{4}$]

**Esercizio 11.1.9.** Un'urna contiene 20 palline, numerate da 1 a 20. Estraggo due palline. Quanto vale la probabilità di estrarre due palline pari?

[$\frac{9}{38}$]

**Esercizio 11.1.10.** Un'urna contiene 20 palline, numerate da 1 a 20. Estraggo tre palline. Quanto vale la probabilità di estrarre due palline pari ed una pallina dispari?

[$\frac{15}{38}$]

**Esercizio 11.1.11.** Un'urna contiene 20 palline bianche, 30 palline rosse, 10 palline verdi e 40 palline nere. Estraggo 10 palline.
Quanto vale la probabilità di aver estratto: 2 palline bianche, 3 palline rosse, 1 pallina verde e 4 palline nere?

[$\simeq 0.041$]

**Esercizio 11.1.12.** Giochiamo a poker con un mazzo da 28 carte.

1. Quanto vale la probabilità di ricevere un poker d'assi servito? E di ricevere un poker qualsiasi?
2. È più probabile ricevere un poker, un full o un colore?
3. Quanto vale la probabilità di ricevere un poker d'assi ed una picche (oltre l'asso)?
4. Rispondere ai quesiti dei punti precedenti supponendo di giocare con un mazzo da 32 carte o con un mazzo da 36 carte.

**Esercizio 11.1.13.** L'alfabeto marziano è composto da 999 caratteri. La Commissione per le Comunicazioni Intergalattiche ha deciso che tale alfabeto deve essere ridotto a 256 caratteri. Quanti alfabeti sono possibili?

Ooops! Dopo il ricorso del popolo marziano al TAI (Tribunale Amministrativo Intergalattico), alla commissione viene imposto di conservare 99 caratteri del vecchio alfabeto che vengono ritenuti essenziali. Quanti alfabeti di complessivi 256 caratteri sono ora possibili? Quanto vale la probabilità che un alfabeto creato a caso senza vincolo, in realtà lo rispetti?

**Esercizio 11.1.14.** Al telefono componiamo 6 cifre a caso. Calcolare la probabilità dei seguenti eventi:

1. le 6 cifre sono tutte diverse,
2. il prodotto delle 6 cifre è un numero divisibile per 2,
3. il prodotto delle 6 cifre è un numero divisibile per 3,
4. il prodotto delle 6 cifre è un numero divisibile per 6,
5. le 6 cifre sono in ordine strettamente crescente.

## 11.2. Probabilità condizionata e indipendenza

**Esercizio 11.2.1.** Siano $A$, $B$, $C$ una terna di eventi indipendenti in uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Dimostrare che $A$ e $B \cup C$ sono indipendenti.

**Esercizio 11.2.2.** Un sistema di comunicazione ninaria trasmette (e riceve) solo i caratteri "0" e "1". Supponiamo che il 45% delle volte venga trasmesso il carateere "1". La probabilità che il carattere "1" sia ricevuto correttamente è del 98%. La probabilità che il carattere "0" sia ricevuto correttamente è del 95%.

1. Calcolare la probabilità che sia ricevuto il carattere "1",
2. Sapendo che è stato ricevuto il carattere "1", calcolare la probabilità che sia stato trasmesso il carattere "1".
3. Sapendo che è stato ricevuto il carattere "0", calcolare la probabilità che sia stato trasmesso il carattere "0".

**Esercizio 11.2.3.** Una moneta, forse truccata (esce testa con probabilità $p$) viene lanciata 100 volte. Determinare le probabilità dei seguenti eventi:

1. al decimo lancio esce testa,
2. al decimo lancio esce testa e al primo lancio esce croce,
3. escono esattamente 8 teste,
4. escono almeno 8 teste,
5. esce croce a tutti i tiri pari,
6. esce croce in almeno un tiro pari,
7. la prima croce esce al $k$–esimo lancio.

**Esercizio 11.2.4.** Su un tratto della FI–PI–LI la probabilità di incidente al minuto per guida spericolata è di $10^{-3}$. La probabilità di incidente al minuto per guasto meccanico è di $10^{-5}$. Supponiamo che le due cause di incidente siano indipendenti l'una dall'altra.

1. Calcolare la probabilità di incidente al minuto su quel tratto della FI–PI–LI,
2. Se gli incidenti in minuti diversi sono indipendenti, qual è la probabilità di non avere incidenti in tutto l'anno?
3. Se gli incidenti in minuti diversi sono indipendenti, qual è la probabilità di non avere più di dieci incidenti all'anno?

**Esercizio 11.2.5.** Un'urna contiene una palla bianca, una palla rossa e una palla nera. Si compiono $n$ estrazioni di una palla alla volta, reinserendo, dopo ciascuna estrazione, la palla nell'urna. Calcolare la probabilità dei seguenti eventi

1. estraggo sempre la palla bianca,
2. estraggo sempre la stessa palla,
3. non estraggo mai la palla rossa,
4. estraggo ciascuna palla almeno una volta.

**Esercizio 11.2.6.** Un'urna contiene una palla bianca, 2 palle rosse e 3 palle nere. Si compiono $n$ estrazioni di una palla alla volta, reinserendo, dopo ciascuna estrazione, la palla nell'urna. Calcolare la probabilità dei seguenti eventi

1. estraggo sempre palle nere,
2. estraggo sempre palle dello stesso colore,
3. non estraggo mai la palla bianca,
4. estraggo palle di tutti e tre i colori.

**Esercizio 11.2.7.** Un telefono guasto squilla in un momento a caso nell'arco di 10 ore. Calcolare la probabilità che squilli in un momento compreso tra la quarta e la settima ora. Sapendo che non squillerà nelle prossime cinque ore, calcolare la probabiulità che squilli in un momento compreso tra la quarta e la settima ora.

### 11.3. Variabili aleatorie

**Esercizio 11.3.1.** Lanciamo due dadi non truccati. Dopo aver definito uno spazio di probabilità opportuno, dire quali sono i possibili valori che le seguenti variabile aleatoria possono assumere:

$X_1$ il punteggio minimo tra i due punteggi,
$X_2$ il punteggio massimo tra i due punteggi,
$X_3$ la somma dei due punteggi,
$X_4$ la differenza tra il punteggio massimo ed il punteggio minimo.

Per ciascuna delle precedenti variabile aleatoria scrivere la densità discreta e la funzione di ripartizione. Tracciare i grafici delle funzioni di ripartizione.

**Esercizio 11.3.2.** Lancio una moneta $n$ volte. Supponiamo che ogni lancio sia indipendente e che ad ogni lancio la probabilità che esca testa sia $p$. Sia $X$ la variabile aleatoria che descrive la differenza tra il numero di teste ed il numero di croci che si ottengono negli $n$ lanci.

1. introdurre un opportuno spazio di probabilità e scrivere $X$,
2. chi è l'insieme immagine di $X$?
3. a partire dalla densità binomiale di parametri $n$ e $p$, $B(n,p)$, calcolare la densità di $X$.

**Esercizio 11.3.3.** Sia $X$ una variabile aleatoria di Poisson di parametro $\lambda$. Calcolare $\mathbb{P}(X \text{ è pari})$ e $\mathbb{P}(X \text{ è dispari})$.

**Esercizio 11.3.4.** 1. Per ogni fissato $\lambda$ parametro reale positivo studiare l'andamento della successione

$$p\colon k \in \mathbb{N} \mapsto \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \in \mathbb{R}.$$

È monotona? Ammette massimo? Ammette minimo?

2. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ fissato, studiare l'andamento della funzione

$$f\colon \lambda \in (0, +\infty) \mapsto \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \in \mathbb{R}.$$

È monotona? Ammette massimo? Ammette minimo?

**Esercizio 11.3.5.** Supponiamo che il numero di incidenti giornalieri che avvengono ogni giorno sul tratto di autostrada Firenze–Bologna si distribuisca come una variabile aleatoria di Poisson di parametro $\lambda = 4$.

1. Qual è la probabilità che oggi accadano 3 incidenti?
2. Qual è la probabilità che oggi accadano almeno 3 incidenti?
3. Qual è la probabilità che oggi accadano almeno 3 incidenti, sapendo che ce n'è sicuramente uno?
4. Qual è la probabilità che accadono 3 incidenti, sapendo che non ne possono accadere più di 10?

**Esercizio 11.3.6.** Consideriamo una particella che si muove sul piano $Oxy$ nel seguente modo:

1. al tempo $t = 0$ si trova nell'origine;
2. ad ogni tempo $t = i$ si può spostare in uno dei quattro seguenti modi

a) di una unità verso l'alto con probabilità $p_A$,
b) di una unità verso il basso con probabilità $p_B$,
c) di una unità verso destra con probabilità $p_D$,
d) di una unità verso sinistra con probabilità $p_S$.

Calcolare la probabilità che al tempo $t = k$ la particella torni nell'origine.

**Esercizio 11.3.7.** Lanciamo una moneta in cui esce testa con probabilità $p$. È più probabile ottenere almeno una testa in due lanci o almeno due teste in quattro lanci?

**Esercizio 11.3.8.** Siano $\alpha$ e $\lambda$ parametri reali positivi. Mostrare che la funzione $f\colon x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) := \begin{cases} c\, x^{\alpha-1}\, \mathrm{e}^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

è densità di una variabile aleatoria continua $X$ se e solo se

$$c = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \quad \text{dove} \quad \Gamma(\alpha) := \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x.$$

Provare che per $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ si ha $\Gamma(n) = (n-1)!$

**Esercizio 11.3.9.** Sia $X$ una variabile aleatoria di densità continua $f$. Per $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, scrivere la funzione di ripartizione e la densità della variabile aleatoria $Y := X^k$.

## 11.4. Densità condizionale

**Esercizio 11.4.1.** Siano $X$ e $Y$ variabili aleatorie indipendenti. Supponiamo che $X$ abbia densità $B(n,p)$ e che $Y$ abbia densità $B(k,p)$. Calcolare $p_{X|X+Y}(\cdot, j)$, $j = 0, 1, \ldots, k$.

**Esercizio 11.4.2.** Siano $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variabili aleatorie indipendenti, tutte di densità $B(1,p)$. Sia $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Calcolare $p_{X_i|Y}(\cdot, j)$, $j = 0, 1, \ldots, n$.

**Esercizio 11.4.3.** Sia

$$p\colon (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{cases} \dfrac{c}{x+2y} & x,\ y = 1,2,3 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Determinare $c$ in modo che $p$ sia una densità. Sia $(X,Y)$ una variabile aleatoria avente $p$ come propria densità. Calcolare $\mathbb{P}(X^2 + Y^2 < 6)$, calcolare le densità marginali di $(X,Y)$. Calcolare $\mathbb{P}(X = 3 | Y > 1)$.

**Esercizio 11.4.4.** Sia $(X,Y)$ una variabile aleatoria bidimensionale la cui densità congiunta è la distribuzione uniforme sul triangolo di vertici $(0,0)$ $(a,0)$, $(0,a)$, $a$ parametro reale positivo. Calcolare le densità marginali.

**Esercizio 11.4.5.** Al variare di $\alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ determinare il valore della costante $C$ per cui la funzione $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ che vale $Cy^2 \mathrm{e}^{-x}$ se il punto $(x,y)$ appartiene all'angolo convesso determinato dalle due semirette che formano angoli $\alpha$ e $-\alpha$ con la direzione positiva dell'asse dell'ascisse e che vale 0 altrimenti, sia densità congiunta di una variabile aleatoria $(X,Y)$. Calcolare poi le densità marginali di tale variabile aleatoria

**Esercizio 11.4.6.** Mario e Giovanni hanno fissato di incontrarsi alla macchinetta del caffè tra mezzogiorno e il tocco. Hanno anche fissato di non aspettarsi l'un l'altro per più di 15 minuti. Supponendo che gli orari di arrivo alla macchinetta del caffè di Mario e Giovanni siano indipendenti ed entrambi uniformemente distribuiti, calcolare la probabilità che Mario e Giovanni si incontrino alla macchinetta del caffè. $[\frac{7}{16}]$

**Esercizio 11.4.7.** Siano $a$, $b$ parametri positivi. Supponiamo che $X$ e $Y$ siano v.a. congiuntamente continue con densità

$$f(x,y) = \begin{cases} C \exp(-ax) \exp(-by) & \text{se } x > 0 \text{ e } y > 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

1. Determinare il valore di $C$,
2. calcolare la funzione di ripartizione congiunta,
3. calcolare le densità marginali,

4. calcolare $\mathbb{P}(Y \leq X)$.

[1. $ab$, 4. $\frac{b}{a+b}$]

**Esercizio 11.4.8.** Siano $U$ e $V$ v.a. indipendenti. Calcolare le funzioni di ripartizione delle v.a. $W := \max(U, V)$ e $Y := \min(U, V)$ in termini delle funzioni di ripartizione di $U$ e di $V$.

**Esercizio 11.4.9.** Una moneta ed un dado vengono lanciati insieme ripetutamente. Qual'è la probabilità che la moneta dia testa prima che il dado dia "6"? Si supponga che il dado e la moneta non siano truccati. [$\frac{5}{7}$]

### 11.5. Speranza e varianza

**Esercizio 11.5.1.** Sia

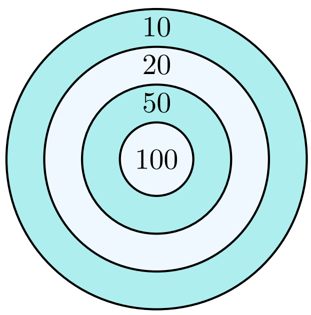
$$p\colon x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \dfrac{c}{x+1} & x = 0, 1, 2, 3, 4 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Determinare $c$ in modo che $p$ sia una densità. Sia $X$ una variabile aleatoria avente $p$ come propria densità. Calcolare $\mathbb{P}(X < 2)$, $\mathrm{E}[X]$, $\mathrm{Var}(X)$.

**Esercizio 11.5.2.** In una scatola di 10 gomitoli di lana, ce ne sono 6 bianchi e 4 colorati. Si estraggono i gomitoli dalla scatola uno alla volta, senza reiscatolarli. Qual è la probabilità di estrarre il primo gomitolo colorato all'$i$–esimo tentativo? A quale tentativo devo aspettarmi di estrarre il primo gomitolo colorato? Con quale varianza?

**Esercizio 11.5.3.** Il sistema antiincendio di un supermercato è costituito da sei sensori. L'assicurazione copre eventuali danni causati da un incendio se almeno quattro dei sei sensori funzionano. Supponiamo che ogni sensore funzioni, indipendentemente dagli altri, con probabilità dell'80%. Con quale probabilità siamo coperti dall'assicurazione? Quanti sensori ci aspettiamo che funzionino?

**Esercizio 11.5.4.** Si consideri il seguente bersaglio:




Tiro una freccia contro il bersaglio e ottengo un certo punteggio a seconda della zona colpita, come indicato in figura. Supponendo di non mancare il bersaglio, qual è il punteggio medio atteso? La varianza dei punteggi?

**Esercizio 11.5.5.** Una variabile aleatoria continua $X$ ha densità

$$f\colon x \in \mathbb{R} \mapsto c\,|x|\exp^{-ax^2} \in \mathbb{R}$$

dove $a$ è un parametro reale positivo. Determinare il valore di $c$ in funzione di $a$. Calcolare la speranza matematica e la varianza di $X$.

**Esercizio 11.5.6.** Sia $X$ una variabile aleatoria continua di densità

$$f\colon x \in \mathbb{R} \mapsto c(1+x^2)^{-1} \in \mathbb{R}$$

Determinare il valore di $c$. Calcolare la funzione di ripartizione$F_X$. Calcolare la densità di $Y := X^{-1}$. Calcolare speranza e varianza di $X$ e $Y$.

**Esercizio 11.5.7.** Sia $X$ una variabile aleatoria continua non negativa di densità $f$ e funzione di ripartizione $F$. Dimostrare che

$$E[X] = \int_0^{+\infty} (1 - F(x))\mathrm{d}x$$

e che

$$E[X^k] = \int_0^{+\infty} kx^{k-1}(1 - F(x))\mathrm{d}x$$

**Esercizio 11.5.8.** Sia $X$ una variabile aleatoria che assume valori solo nell'intervallo $[0, a]$ e di densità $f$. Mostrare ch $\mathrm{Var}(X) \leq \left(\frac{a}{2}\right)^2$.

**Esercizio 11.5.9.** Il quantile $q_{\frac{1}{2}}$ (se è definito) di una variabile aleatoria $X$ si dice *mediana* di $X$. I quantili $q_{\frac{1}{4}}$ e $q_{\frac{3}{4}}$ (se sono definiti) di una variabile aleatoria $X$ si dicono *quartili* di $X$. Calcolare mediana e quartili delle seguenti variabile aleatoria

1. $X$ variabile aleatoria uniformemente distribuita su un intervallo $(a, b)$;
2. $X$ variabile aleatoria normale di parametri $\mu$ e $\sigma^2$;
3. $X$ variabile aleatoria esponenziale di parametro $\lambda$.

**Esercizio 11.5.10.** Un *valore modale* di una variabile aleatoria continua $X$ con densità $f\colon x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$ è un punto di massimo di $f$. Calcolare i valori modali delle seguenti variabile aleatoria

1. $X$ variabile aleatoria uniformemente distribuita su un intervallo $(a, b)$;
2. $X$ variabile aleatoria normale di parametri $\mu$ e $\sigma^2$;
3. $X$ variabile aleatoria esponenziale di parametro $\lambda$.

**Esercizio 11.5.11.** La *funzione di rischio* di una variabile aleatoria continua $X$ con densità $f\colon x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$ è definita come

$$\lambda(x) := \begin{cases} \dfrac{f(x)}{1 - F_X(x)} & F_X(x) < 1 \\ 0 & F_X(x) = 1. \end{cases}$$

1. Calcolare la funzione di ripartizione e la densità in funzione della sola funzione di rischio

2. Calcolare la funzione di rischio delle seguenti variabile aleatoria

   a) $X$ variabile aleatoria uniformemente distribuita su un intervallo $(a, b)$;

   b) $X$ variabile aleatoria normale di parametri $\mu$ e $\sigma^2$;

   c) $X$ variabile aleatoria esponenziale di parametro $\lambda$.

# Parte II

## Prove scritte di Analisi Matematica II assegnate durante gli a.a. precedenti

# 1
# a.a. 2002-03

## 1.1. Recupero Prima Prova Intercorso - Primo appello

**Esercizio 1.1.1.** Scrivere la Formula di Taylor al secondo ordine con il resto di Peano con centro in $P \equiv (4, 2)$ per la funzione

$$f(x, y) = \arctan\left(\frac{y^2}{x}\right).$$

**Esercizio 1.1.2.** Disegnare sul piano complesso l'insieme delle soluzioni dell'equazione

$$z|z| = -\overline{z}^2$$

## 1.2. Recupero Seconda Prova Intercorso - Primo appello

**Esercizio 1.2.1.** Siano $O = (0, 0)$, $C = (2, 4)$ e $A = (4, 4)$. Sia $\gamma$ la curva composta dall'arco di parabola $OC$ $y = x^2$ e dal segmento $CA$, percorsa da $O$ verso $A$. Sia $\mathbf{F}\colon (x, y) \in \mathbb{R}^2 \to (F_1, F_2) = (y, -x^2)$. Calcolare $\int_\gamma F_1 dx + F_2 dy$.

**Esercizio 1.2.2.** Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = x - x^2 \\ x(0) = -1 \end{cases} \tag{1.1}$$

indicando chiaramente il dominio della soluzione.

## 1.3. Recupero Terza Prova Intercorso - Primo appello

**Esercizio 1.3.1.** Calcolare l'Area della porzione di sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, compresa tra i piani $z = 2$ e $z = 4$.

**Esercizio 1.3.2.** Disegnare la regione

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{3}{x}\,, \quad x \leq y \leq 2x \right\}$$

e calcolarne l'Area.

### 1.4. Compito A - Primo appello

**Esercizio 1.4.1.** Sia $f \in C^2(\mathbb{R})$ e sia $u(x, y) = f\left(\frac{y}{x}\right)$.
Verificare che se $u$ soddisfa l'equazione alle derivate parziali

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{1.2}$$

allora $f$ soddisfa l'equazione differenziale

$$(t^2 + 1)f^{''}(t) + 2tf^{'}(t) = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R} \tag{1.3}$$

Di che tipo di equazione si tratta? Cosa possiamo dire dell'insieme delle soluzioni? Dopo aver posto $g(t) = f^{'}(t)$, trovare l'insieme delle soluzioni di (1.3) e di (1.2) della forma assegnata.

**Esercizio 1.4.2.** Disegnare il dominio e le linee di livello della funzione

$$f(x, y) = \arcsin(x^2 y)$$

Studiare la natura dei punti critici di $f$.

**Esercizio 1.4.3.** Rispondere a **uno e uno solo** dei due seguenti quesiti

1. Introdurre le nozioni di curva parametrica regolare e di curva regolare. Spiegare il significato della lunghezza di una curva.

2. Si definisca la nozione di dominio regolare del piano e si enunci il teorema della divergenza per i domini piani.

### 1.5. Compito B - Primo appello

**Esercizio 1.5.1.** Studiare il fenomeno dei battimenti per il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'' + 4x = 12\cos(4t) \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

**Esercizio 1.5.2.** Sia $S$ il toro di equazione parametrica

$$\psi\colon (u,v) \in [0,2\pi] \times [0,2\pi] \to \begin{cases} x = (2+\cos u)\cos v \\ y = (2+\cos u)\sin v \\ z = \sin u \end{cases} \in \mathbb{R}^3 \tag{1.5}$$

Sia $\gamma$ la curva

$$\gamma\colon t \in [0,2\pi] \to (t,2t) \in \mathbb{R}^2 \tag{1.6}$$

Si consideri la curva $\psi \circ \gamma\colon t \in [0,2\pi] \to \psi \circ \gamma(t) \in \mathbb{R}^3$. È semplice? È chiusa? Calcolare la retta tangente a $\psi \circ \gamma$ in $t = \dfrac{\pi}{6}$ ed esplicitare la lunghezza della curva

**Esercizio 1.5.3.** Rispondere a **uno e uno solo** dei due seguenti quesiti

1. Introdurre la notazione trigonometrica per i numeri complessi ed enunciare la formula di de Moivre.

2. Si definisca la nozione di dominio regolare del piano e si enunci il teorema della divergenza per i domini piani.

### 1.6. Compito C - Primo appello

**Esercizio 1.6.1.** Determinare gli estremi assoluti della funzione

$$f(x,y) = xy$$

nel dominio

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1 \right\}$$

**Esercizio 1.6.2.** Disegnare la regione esterna alla circonferenza $x^2 + y^2 = 4$ ed interna alla cardioide di equazione polare $r = 2(1+\cos\varphi)$. Calcolarne l'Area.

**Esercizio 1.6.3.** Rispondere a **uno e uno solo** dei due seguenti quesiti

1. Introdurre la notazione trigonometrica per i numeri complessi ed enunciare la formula di de Moivre.

2. Introdurre la nozione di curva parametrica regolare e di lunghezza di una curva parametrica regolare. Spiegare il significato della lunghezza.

## 1.7. Recupero Seconda Prova Intercorso - Secondo appello

**Esercizio 1.7.1.** Sia $\varphi\colon t \in [-2,2] \to \mathbb{R}^3$ la curva parametrica di equazioni

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^3 \\ z(t) = t^6 \end{cases} \qquad t \in [-2,2]$$

Calcolare la retta tangente alla curva in $t = 1$ ed esplicitare la lunghezza della curva.

**Esercizio 1.7.2.** Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'' - x' = e^t \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 0\,. \end{cases} \tag{1.7}$$

## 1.8. Recupero Terza Prova Intercorso - Secondo appello

**Esercizio 1.8.1.** Determinare la posizione del baricentro di una lamina che occupa la regione $\rho \leq 2(1 + \cos\theta)$ e la cui densità è $d(\rho,\theta) = \rho$.

**Esercizio 1.8.2.** Calcolare l'Area della porzione di cilindro $x^2 + z^2 = 16$ contenuta nella regione delimitata dal cilindro $x^2 + y^2 = 16$.

## 1.9. Compito A - Secondo appello

**Esercizio 1.9.1.** Disegnare sul piano $Oxy$ l'insieme

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon y \geq 0,\ x^2 + y^2 \geq 1,\ x^2 + y^2 - 2x \leq 0\right\}\,.$$

Determinare massimo e minimo assoluti di $f(x,y) = xy$ sull'insieme $D$ e calcolare $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$.
Perché posso affermare a priori che $f$ ammette massimo e minimo in $D$?

**Esercizio 1.9.2.** Tracciare sul piano complesso l'insieme delle soluzioni dell'equazione

$$z - z^2 + z\,|z|\,e^{\frac{\pi i}{3}} - |z|\,e^{\frac{\pi i}{3}} = 0$$

**Esercizio 1.9.3.** Rispondere a **uno e uno solo** dei due seguenti quesiti

1. Enunciare il teorema di Cauchy e spiegare il fenomeno del pennello di Peano per il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

2. Enunciare le condizioni necessarie e sufficienti del secondo ordine affinché un punto critico di una funzione $f \in C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ sia un punto di massimo relativo.

## 1.10. Compito B - Secondo appello

**Esercizio 1.10.1.** Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = e^x \ln t \\ x(1) = 0 \end{cases}$$

indicando bene il dominio della soluzione.

**Esercizio 1.10.2.** Calcolare il massimo ed il minimo di $f(x,y) = x^4 - y^4 + x^2y^2$ nel cerchio di raggio 1 centrato nell'origine.

**Esercizio 1.10.3.** Rispondere a **uno e uno solo** dei due seguenti quesiti

1. Dare la definizione di derivata direzionale per una funzione $f$ di due variabili reali in un punto $P_0 = (x_0, y_0)$. Quale o quali proprietà devono essere soddisfatte da $f$ per poter calcolare la derivata direzionale tramite le derivate parziali? Scrivere la formula.
2. Introdurre la nozione di integrale doppio su un dominio normale ed enunciare il teorema che permette la riduzione dell'integrale doppio ad un integrale iterato.

## 1.11. Compito C - Secondo appello

**Esercizio 1.11.1.** Disegnare

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \frac{1}{2x^2} \le y \le \frac{1}{x^2},\ 2x^2 \le y \le 3x^2,\ x \ge 0\right\}$$

e calcolare

$$\iint_D \frac{x^2}{y} dxdy\,.$$

**Esercizio 1.11.2.** Tracciare sul piano $Oxy$ il dominio $D$ della funzione

$$f(x,y) = \sqrt{3 - |x-3| - |y-3|}$$

È chiuso? è aperto? è limitato? è connesso? Calcolare il minimo su $D$ della funzione

$$d(x,y) = \sqrt{\left(x - \frac{4}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{5}\right)^2}$$

In quale punto è assunto?

**Esercizio 1.11.3.** Rispondere a **uno e uno solo** dei due seguenti quesiti

1. Enunciare il teorema di Schwarz per le funzioni di due variabili reali;

2. Introdurre il concetto di superficie parametrica regolare e enunciare il teorema di Guldino per le superfici di rotazione.

### 1.12. Compito A - Terzo appello

**Esercizio 1.12.1.** Trovare la soluzione $u(x,t)$ dell'equazione differenziale

$$2u_{xx} - u_t = 0$$

della forma $u(x,t) = f(x)g(t)$ con $f$ e $g$ di classe $C^2(\mathbb{R})$ e tale che

$$u(x,0) = \sin(x) \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Su ogni retta $t = t_0$, $t_0 > 0$, determinare, se esiste, il massimo di $u(x,t_0)$.

**Esercizio 1.12.2.** Si consideri la superficie parametrica

$$\varphi\colon [-1,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$$

di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(u,v) = \sqrt{u^2+1}\cosh v \\ y(u,v) = \sqrt{u^2+1}\sinh v \\ z(u,v) = u \end{cases}$$

Verificare che la superficie è regolare e che il suo sostegno è una porzione dell'iperboloide

$$x^2 - y^2 = z^2 + 1\,.$$

Disegnare l'iperboloide. Esplicitare l'Area della superficie $\varphi$. Calcolare tale Area (può essere utile ricordare la formula $\cosh^2 v + \sinh^2 v = \cosh(2v)$).

**Esercizio 1.12.3.** Rispondere a **uno e uno solo** dei due seguenti quesiti

1. Enunciare il teorema di Cauchy e spiegare il fenomeno del pennello di Peano per il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 3\sqrt[3]{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

2. Si definisca la nozione di dominio regolare del piano e si enunci il teorema della divergenza per i domini piani.

## 1.13. Compito B - Terzo appello

**Esercizio 1.13.1.** Disegnare sul piano complesso l'insieme delle soluzioni della seguente equazione

$$z^2 = -|z|\,\overline{z}$$

**Esercizio 1.13.2.** Risolvere i due seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x^2(y^2-4) \\ y(0) = -2 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} y' = x^2(y^2-4) \\ y(0) = -4 \end{cases}$$

indicando, in entrambi i casi, il dominio della soluzione.

**Esercizio 1.13.3.** Rispondere a **uno e uno solo** dei due seguenti quesiti

1. Definizione di curva regolare parametrica, di lunghezza di una tale curva e significato geometrico della lunghezza.

2. Principio di sovrapposizione per equazioni differenziali lineari.

## 1.14. Compito C - Terzo appello

**Esercizio 1.14.1.** Studiare il fenomeno della risonanza per il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x''(t) + 9x(t) = 12\cos(3t) \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

**Esercizio 1.14.2.** Sia

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| + |y| \leq 4\right\}$$

e sia

$$f(x,y) = y - \frac{x^2}{4}\,.$$

Disegnare $D$. Determinare, se esistono, gli estremi assoluti e relativi di $f$ su $D$ ed i punti in cui tali estremi sono assunti.
Calcolare $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$.

**Esercizio 1.14.3.** Rispondere a **uno e uno solo** dei due seguenti quesiti

1. Definizione di equazione differenziale in forma normale ed enunciato del teorema di Cauchy.

2. Teorema per il cambiamento di variabile negli integrali doppi.

### 1.15. Compito A - Quarto appello

**Esercizio 1.15.1.** Risolvere i due seguenti problemi di Cauchy, indicando, in entrambi i casi, il dominio della soluzione.

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2-4}{y} \\ y(0) = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = \dfrac{y^2-4}{y} \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

**Esercizio 1.15.2.** Si consideri la curva in $\mathbb{R}^3$ di equazioni parametriche

$$\varphi\colon t \in [0, 2\pi] \to \begin{cases} x = \sin(t)\cos(2t) \\ y = \cos(t) \\ z = \sin(t)\sin(2t)\,. \end{cases}$$

È regolare? È semplice? È chiusa? Verificare che il suo sostegno è contenuto sulla sfera centrata nell'origine e di raggio 1.
Trovare i punti $\varphi(t)$ sul sostegno della curva per cui la retta tangente alla curva in $\varphi(t)$ è contenuta in un piano parallelo al piano coordinato $z = 0$.

**Esercizio 1.15.3.** Rispondere a **uno e uno solo** dei due seguenti quesiti

1. Enunciare il teorema di Cauchy e spiegare il fenomeno del pennello di Peano per il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 3\sqrt[3]{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

2. Enunciare le condizioni necessarie e sufficienti del secondo ordine affinché un punto critico di una funzione $f \in C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ sia un punto di minimo relativo.

### 1.16. Compito C - Quarto appello

**Esercizio 1.16.1.** Risolvere i due seguenti problemi di Cauchy, indicando, in entrambi i casi, il dominio della soluzione.

$$\begin{cases} y' = y^2 - 16 \\ y(0) = -4 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = y^2 - 16 \\ y(0) = -8 \end{cases}$$

**Esercizio 1.16.2.** Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$(z-1)^5 = 32$$

e disegnare sul piano complesso l'insieme delle soluzioni.

**Esercizio 1.16.3.** Rispondere a **uno e uno solo** dei due seguenti quesiti

1. Enunciare la definizione di superficie parametrica regolare

2. Enunciare le condizioni necessarie e sufficienti del secondo ordine affinché un punto critico di una funzione $f \in C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ sia un punto di massimo relativo.

## 1.17. Compito B - Quinto appello

**Esercizio 1.17.1.** Risolvere i due seguenti problemi di Cauchy, indicando, in entrambi i casi, il dominio della soluzione.

$$\begin{cases} y' = y^2 - 2y \\ y(0) = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = y^2 - 2y \\ y(0) = -2 \end{cases}$$

**Esercizio 1.17.2.** Sia $D$ il dominio contenuto nel primo quadrante delimitato dalla curva di equazione polare $r = \sin(2\varphi)$. Disegnare la curva e calcolare $\displaystyle\int_{\partial D^+} x\mathrm{d}x - y\mathrm{d}y.$

**Esercizio 1.17.3.** Rispondere a **uno e uno solo** dei due seguenti quesiti

1. Dare la definizione di derivata direzionale per una funzione $f$ di due variabili reali in un punto $P_0 = (x_0, y_0)$. Quale o quali proprietà devono essere soddisfatte da $f$ per poter calcolare la derivata direzionale tramite le derivate parziali? Scrivere la formula.

2. Introdurre la nozione di curva parametrica regolare e di lunghezza di una curva parametrica regolare. Spiegare il significato della lunghezza.

## 1.18. Compito C - Quinto appello

**Esercizio 1.18.1.** Calcolare il Volume della regione di spazio contenuta all'interno della sfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2$$

e del cilindro

$$x^2 + y^2 = 1$$

**Esercizio 1.18.2.** Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = 0 \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = v_0 \end{cases}$$

Quale relazione devono soddisfare $y_0$ e $v_0$ affinchè

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0\ ?$$

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = x\exp(-2x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

**Esercizio 1.18.3.** Rispondere a **uno e uno solo** dei due seguenti quesiti

1. Introdurre la notazione trigonometrica per i numeri complessi ed enunciare la formula di de Moivre.

2. Introdurre la nozione di curva parametrica regolare e di lunghezza di una curva parametrica regolare. Spiegare il significato della lunghezza.

### 1.19. Compito B - Sesto appello

**Esercizio 1.19.1.** Risolvere il seguente problema di Cauchy, indicando il dominio della soluzione.

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1+y^2}{y(1+x^2)} \\ y(0) = -2 \end{cases}$$

**Esercizio 1.19.2.** Sia

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon \sqrt{3(x^2+y^2)} \le z \le \sqrt{1+x^2+y^2}\right\}.$$

Disegnare la proiezione di $A$ sul piano $Oxz$. Identificare e disegnare gli insiemi

$$B_1 = \left\{(x,y,z)\colon z = \sqrt{3(x^2+y^2)}\right\} \quad B_2 = \left\{(x,y,z)\colon z = \sqrt{1+x^2+y^2}\right\}$$

Calcolare il Volume di $A$.

**Esercizio 1.19.3.** Rispondere a **uno e uno solo** dei due seguenti quesiti

1. Dare la definizione di derivata direzionale per una funzione $f$ di due variabili reali in un punto $P_0 = (x_0, y_0)$. Quale o quali proprietà devono essere soddisfatte da $f$ per poter calcolare la derivata direzionale tramite le derivate parziali? Scrivere la formula.

2. Enunciare le condizioni necessarie e sufficienti del secondo ordine affinché un punto critico di una funzione $f \in C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ sia un punto di minimo relativo.

## 1.20. Compito C - Sesto appello

**Esercizio 1.20.1.** Sia
$$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{2},\ |x| \leq 1,\ |y| \leq 1\right\}$$
Disegnare la proiezione di $D$ sul piano $Oxz$. Disegnare e identificare l'insieme
$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = \sqrt{x^2 + y^2}\right\}$$
Calcolare $\displaystyle\iiint_D z \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

**Esercizio 1.20.2.** Risolvere il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = 5e^t \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$$
Per quali valori del parametro reale $\beta$ il limite $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \frac{y(t)}{e^{\beta t}}$ esiste ed è finito? Per quali valori di $\beta$ questo limite esiste e vale 0?

**Esercizio 1.20.3.** Rispondere a **uno e uno solo** dei due seguenti quesiti

1. Enunciare il teorema di Schwarz per le funzioni di due variabili reali;
2. Introdurre la nozione di curva parametrica regolare e di lunghezza di una curva parametrica regolare. Spiegare il significato della lunghezza.

## 1.21. Compito C - Settimo appello

**Esercizio 1.21.1.** Risolvere il seguente problema di Cauchy, indicando **chiaramente** il dominio della soluzione.
$$\begin{cases} y' = \dfrac{1 + y^2}{y(x^2 - 1)} \\ y(0) = -2 \end{cases}$$

**Esercizio 1.21.2.** Disegnare sul piano complesso il luogo degli $z \in \mathbb{C}$ tali che $\dfrac{z + i}{z}$ è un numero reale.

**Esercizio 1.21.3.** Rispondere a **uno e uno solo** dei due seguenti quesiti

1. Definizione di curva regolare parametrica, di lunghezza di una tale curva e significato geometrico della lunghezza.
2. Enunciare le condizioni necessarie e sufficienti del secondo ordine affinché un punto critico di una funzione $f \in C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ sia un punto di massimo relativo.

# 2
# a.a. 2003-04

## 2.1. Compito A - Pre-appello

**Esercizio 2.1.1.** Si consideri la serie di potenze $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(k+1)!}$.

1. Determinare l'insieme di convergenza della serie.

2. Detto $D$ tale insieme, per ogni $x \in D$, sia $f(x)$ la somma della serie. Riconoscere la funzione $f$. *Suggerimento: porre* $y = -x^2$.

3. Determinare tutte e sole le soluzioni $y(x)$ della equazione differenziale

$$y' = -2y\left(x + \frac{1}{x}\right) - \frac{2}{x} \tag{2.1}$$

4. Verificare che la funzione $f(x)$ l'unica soluzione di (2.1) tale che $\lim\limits_{x\to 0} y(x)$ esiste ed finito.

**Esercizio 2.1.2.** Avendo riferito lo spazio ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, riconoscere e disegnare gli insiemi

$$A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 - 4y = 0\right\} ,$$
$$B = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon z^2 = x^2 + y^2\right\} .$$

Disegnare la porzione di $A$ contenuta nella regione

$$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon z^2 \leq x^2 + y^2\right\} .$$

e calcolarne l'Area.

**Esercizio 2.1.3.** Rispondere a **uno e uno solo** dei due seguenti quesiti

1. Enunciare le condizioni necessarie e sufficienti del secondo ordine affinch un punto critico di una funzione $f \in C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ sia un punto di minimo relativo.

2. Si definisca la nozione di curva polare e si dica quale condizione deve essere soddisfatta affinch una curva polare sia una curva parametrica regolare del piano.

### 2.2. Compito B - Pre-appello

**Esercizio 2.2.1.** Si consideri la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n x^{2n}$. Determinare l'insieme di convergenza della serie. Detto $D$ tale insieme, per ogni $x \in D$, sia $f(x)$ la somma della serie. Dopo aver riconosciuto la funzione $f$, si calcoli $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

**Esercizio 2.2.2.** Si consideri la curva parametrica $\varphi\colon t \in \left[0, \dfrac{\pi}{3}\right] \to \varphi(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$, definita dalle equazioni

$$\begin{cases} x(t) = \tan t \\ y(t) = \cos^2 t \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right].$$

1. Verificare che si tratta di una curva parametrica regolare.

2. Sia $\psi$ la curva cartesiana definita dalla funzione $f\colon x \in [0, \sqrt{3}] \to \dfrac{1}{1+x^2} \in \mathbb{R}$. Mostrare che $\varphi$ e $\psi$ sono curve parametriche equivalenti.

**Esercizio 2.2.3.** Rispondere a **uno e uno solo** dei due seguenti quesiti

1. Definizione di superficie parametrica regolare.

2. Dare la definizione di derivata direzionale per una funzione $f$ di due variabili reali in un punto $P_0 = (x_0, y_0)$. Quale o quali propriet devono essere soddisfatte da $f$ per poter calcolare la derivata direzionale tramite le derivate parziali? Scrivere la formula.

### 2.3. Compito C - Pre-appello

**Esercizio 2.3.1.** Si consideri la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n x^{n}$. Determinare l'insieme di convergenza della serie. Detto $D$ tale insieme, per ogni $x \in D$, sia $f(x)$ la somma della serie. Dopo aver riconosciuto la funzione $f$, si calcoli $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

**Esercizio 2.3.2.** Risolvere il seguente problema di Cauchy, indicando chiaramente il dominio della soluzione

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{\ln\left(x^2\right)}{x} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

**Esercizio 2.3.3.** Rispondere a **uno e uno solo** dei due seguenti quesiti

1. Definizione di curva parametrica regolare.
2. Teorema per il cambiamento di variabile negli integrali doppi.

### 2.4. Compito A - Primo appello

**Esercizio 2.4.1.** Si consideri la serie di potenze $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$.

1. Determinare l'insieme di convergenza della serie.
2. Detto $D$ tale insieme, per ogni $x \in D$, sia $f(x)$ la somma della serie. Verificare che $f(0) = 0$ e che $f'(0) = 1$ e, usando la propriet di derivazione per serie, verificare che $f$ soddisfa l'equazione differenziale $y'' - y = 0$.
3. Risolvere il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y'' - y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$
4. Sia $g(x)$ la soluzione di tale problema. Perch posso affermare che $f(x) = g(x) \quad \forall x \in D$?

**Esercizio 2.4.2.** Si considerino gli insiemi

$$A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon z^2 = x^2 + y^2\right\} \qquad B = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = 1 + x\right\}$$

Disegnare $A$. Identificare gli insiemi $A$ e $B$. Si consideri la curva parametrica

$$\varphi \colon t \in [-2, 2] \to \varphi(t) = \left(\frac{t^2 - 1}{2}, t, \frac{t^2 + 1}{2}\right) \in \mathbb{R}^3$$

Verificare che il supporto di $\varphi$ contenuto in $A \cap B$. Esplicitare la lunghezza di $\varphi$. Si consideri il campo vettoriale

$$\mathbf{F} \colon (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \to (y + z, z + x, x + y) \in \mathbb{R}^3$$

Verificare che il prodotto scalare tra il campo vettoriale e il vettore tangente alla curva, $\mathbf{F}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$, positivo in ogni punto della curva ed crescente lungo la curva.

**Esercizio 2.4.3.** Rispondere a **uno e uno solo** dei due seguenti quesiti

1. Enunciare la definizione di superficie parametrica regolare
2. Enunciare le condizioni necessarie e sufficienti del secondo ordine affinch un punto critico di una funzione $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ sia un punto di massimo relativo.

### 2.5. Compito B - Primo appello

**Esercizio 2.5.1.** Si consideri la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n}$. Determinare l'insieme di convergenza della serie. Detto $D$ tale insieme, per ogni $x \in D$, sia $f(x)$ la somma della serie. Dopo aver riconosciuto la funzione $f$, si calcoli $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

**Esercizio 2.5.2.** Risolvere i seguente problemi di Cauchy, indicando, in entrambi i casi, il dominio della soluzione

$$\begin{cases} y' = \dfrac{4-y^2}{x} \\ y(1) = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = x(4-y^2) \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

**Esercizio 2.5.3.** Rispondere a **uno e uno solo** dei due seguenti quesiti

1. Enunciare la definizione di superficie parametrica regolare
2. Enunciare le condizioni necessarie e sufficienti del secondo ordine affinch un punto critico di una funzione $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ sia un punto di massimo relativo.

### 2.6. Compito C - Primo appello

**Esercizio 2.6.1.** Si consideri la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n}}{n}$. Determinare l'insieme di convergenza della serie. Detto $D$ tale insieme, per ogni $x \in D$, sia $f(x)$ la somma della serie. Dopo aver riconosciuto la funzione $f$, si calcoli $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

**Esercizio 2.6.2.** Disegnare e riconoscere i due seguenti insiemi

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z - 10 = 0\right\}$$
$$B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 2x^2 + 2y^2 - z - 2 = 0\right\}$$

Calcolare il volume della regione finita dello spazio delimitata dai due insiemi.

**Esercizio 2.6.3.** Rispondere a **uno e uno solo** dei due seguenti quesiti

1. Enunciare la definizione di superficie parametrica regolare
2. Enunciare le condizioni necessarie e sufficienti del secondo ordine affinch un punto critico di una funzione $f \in C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ sia un punto di massimo relativo.

### 2.7. Compito B - Secondo appello

**Esercizio 2.7.1.** Si consideri la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)x^{n/2}$. Determinare l'insieme di convergenza della serie. Detto $D$ tale insieme, per ogni $x \in D$, sia $f(x)$ la somma della serie. Dopo aver riconosciuto la funzione $f$, si calcoli $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

**Esercizio 2.7.2.** Si consideri l'insieme

$$A \equiv \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y = 0\right\}$$

Disegnare e identificare $A$.
Si consideri la curva $\gamma \colon t \in [-1,1] \to \gamma(t) \in \mathbb{R}^3$ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = t \\ y = -t^2 \\ z = t - t^2 \end{cases}$$

Verificare che il supporto di $\gamma$ contenuto in $A$.
$\gamma$ una curva piana? Cio esiste un piano che contiene il supporto di $\gamma$?
Esplicitare la lunghezza di $\gamma$. Calcolare la lunghezza di $\gamma$.
Si consideri la funzione

$$f \colon (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \to x^2 + z^2 - y^2 + xy \in \mathbb{R}\,.$$

Verificare che $(0,0,0)$ un punto critico di $f$ e determinarne la natura. Si consideri la funzione composta

$$g \colon t \in [-1,1] \to f(\gamma(t)) \in \mathbb{R}\,.$$

Verificare che $\gamma(0) = (0,0,0)$. Perch posso affermare, senza fare alcun calcolo che $t = 0$ un punto stazionario di $g$? Determinarne la natura,

**Esercizio 2.7.3.** Rispondere a **uno e uno solo** dei due seguenti quesiti

1. Dare la definizione di derivata direzionale per una funzione $f$ di due variabili reali in un punto $P_0 = (x_0, y_0)$. Quale o quali propriet devono essere soddisfatte da $f$ per poter calcolare la derivata direzionale tramite le derivate parziali? Scrivere la formula.
2. Enunciare le condizioni necessarie e sufficienti del secondo ordine affinch un punto critico di una funzione $f \in C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ sia un punto di minimo relativo.

### 2.8. Compito C - Secondo appello

**Esercizio 2.8.1.** Si consideri la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)(2x)^n$. Determinare l'insieme di convergenza della serie. Detto $D$ tale insieme, per ogni $x \in D$, sia $f(x)$ la somma della serie. Dopo aver riconosciuto la funzione $f$, si calcoli $f\left(\frac{1}{3}\right)$.

**Esercizio 2.8.2.** Si consideri la funzione

$$f\colon (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \to x^2 - y^2 + z^2 \in \mathbb{R}\,.$$

Siano $L_0$ ed $L_1$, rispettivamente, gli insiemi di livello 0 e di livello 1 della funzione $f$. Disegnare ed identificare i due insiemi.
Sia

$$A \equiv \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon f(x,y,0) \leq 1\,, |y| \leq 2\right\}\;.$$

Disegnare $A$. Si consideri la funzione

$$g\colon (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to x^4 - y^2 \in \mathbb{R}\,.$$

Determinare gli estremi assoluti di $g$ in $A$. Scrivere sottoforma di integrale iterato l'integrale doppio $\iint_A g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

**Esercizio 2.8.3.** Rispondere a **uno e uno solo** dei due seguenti quesiti

1. Dare la definizione di derivata direzionale per una funzione $f$ di due variabili reali in un punto $P_0 = (x_0, y_0)$. Quale o quali propriet devono essere soddisfatte da $f$ per poter calcolare la derivata direzionale tramite le derivate parziali? Scrivere la formula.

2. Enunciare le condizioni necessarie e sufficienti del secondo ordine affinch un punto critico di una funzione $f \in C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ sia un punto di minimo relativo.

### 2.9. Compito B - Terzo appello

**Esercizio 2.9.1.** Esibire 3 successioni positive $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, tali che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = +\infty \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{c_n} = 0$$

e, allo stesso tempo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} \text{ diverge, mentre } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{c_n} \text{ converge.}$$

Motivare la risposta.

**Esercizio 2.9.2.** Si considerino le funzioni

$$F\colon (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \to x^2+y^2+z^2\in\mathbb{R} \qquad G\colon (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \to x^2+y^2-x\in\mathbb{R}$$

Disegnare e identificare gli insiemi

$$L_1 \equiv \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon F(x,y,z)=1\big\} \qquad M_0 \equiv \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon G(x,y,z)=0\big\}$$

Si consideri la curva $\gamma\colon t\in[0,\pi]\to\gamma(t)\in\mathbb{R}^3$ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t)=\sin^2 t \\ y(t)=\sin t\cos t \quad t\in[0,\pi] \\ z(t)=\cos t \end{cases}$$

Dopo aver verificato che $\gamma$ una curva regolare, e che il suo supporto contenuto in $L_1\cap M_0$, determinare, tra tutti i punti del supporto, quello avente minima distanza dal punto $(0,1,0)$ e quello avente massima distanza dallo stesso punto $(0,1,0)$.

Detto $P_0$ il punto che realizza la minima distanza, scrivere l'equazione della retta tangente alla curva in tale punto.

Si consideri la funzione $F$ precedentemente definita e sia $\mathbf{\Phi}$ il campo vettoriale definito dal gradiente di $F$:

$$\mathbf{\Phi}\colon (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mapsto \operatorname{grad} F(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$$

Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \mathbf{\Phi}\,\mathrm{ds}$.

**Esercizio 2.9.3.** Rispondere a **uno e uno solo** dei due seguenti quesiti

1. Introdurre la nozione di integrale doppio su un dominio normale ed enunciare il teorema che permette la riduzione dell'integrale doppio ad un integrale iterato.
2. Introdurre la nozione di superficie parametrica regolare.

### 2.10. Compito C - Terzo appello

**Esercizio 2.10.1.** Esibire 3 successioni positive $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, tali che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{c_n} = 0$$

e, allo stesso tempo,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n} \text{ diverge, mentre } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{c_n} \text{ converge.}$$

Motivare la risposta.

**Esercizio 2.10.2.** Si considerino le funzioni

$$F\colon (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \to x^2+y^2-z^2\in\mathbb{R}$$
$$G\colon (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \to x^2+y^2+z^2\in\mathbb{R}$$

Disegnare e identificare gli insiemi

$$L_1 \equiv \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon F(x,y,z)=1\right\}$$
$$M_1 \equiv \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon G(x,y,z)=1\right\}$$

Disegnare e identificare l'insieme $L_1\cap M_1$.
Si considerino la funzione

$$f\colon (x,y)\in\mathbb{R}^2 \to F(x,y,0)-xy\in\mathbb{R}\,.$$

e l'insieme

$$A\equiv\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x^2+y^2\leq 4\,,\ x\geq 0\right\}\cup \\ \cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon\ -x-2\leq y\leq x+2\,,\ x<0\right\}.$$

Determinare gli estremi assoluti di $f$ in $A$ e, dopo aver parametrizzato la frontiera di $A$, calcolare $\displaystyle\int_{\partial A} f\,\mathrm{d}s$.

**Esercizio 2.10.3.** Rispondere a **uno e uno solo** dei due seguenti quesiti

1. Introdurre la nozione di integrale doppio su un dominio normale ed enunciare il teorema che permette la riduzione dell'integrale doppio ad un integrale iterato.

2. Introdurre la nozione di superficie parametrica regolare.

## 2.11. Compito - Quarto appello

**Esercizio 2.11.1.** Si consideri la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{nx^{\frac{n}{3}}}{3}$. Determinare l'insieme di convergenza della serie. Detto $D$ tale insieme, per ogni $x\in D$, sia $f(x)$ la somma della serie. Dopo aver riconosciuto la funzione $f$, si calcoli $f\left(\frac{1}{3}\right)$.

**Esercizio 2.11.2.** Si consideri la funzione

$$F\colon (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \to x^2+y^2+4z^2\in\mathbb{R}$$

Disegnare e identificare l'insieme

$$A\equiv\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon F(x,y,z)=1\right\}\,.$$

Si consideri la superficie parametrica

$$\varphi\colon (u,v) \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \varphi(u,v) = \left(\cos v \sin u, \sin v \sin u, \frac{1}{2}\cos u\right) \in \mathbb{R}^3 .$$

Verificare che l'immagine $\Sigma$ della superficie $\varphi$ contenuta in $A$. Indicare sul disegno di $A$ quale porzione rappresenta $\Sigma$. Esplicitare l'Area di $\Sigma$.

Si consideri il campo vettoriale

$$\mathbf{G}\colon (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \to \mathbf{G}(x,y,z) \equiv \left(y, 2z, \frac{x}{2}\right) \in \mathbb{R}^3 .$$

Calcolare il flusso di $\mathbf{G}$ attraverso la superficie $\Sigma$.

Si considerino l'insieme

$$B \equiv \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \geq |x| \ , \ 1 \leq F(x,y,0) \leq 3\right\}$$

e la funzione

$$f\colon (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to \frac{xy^3}{\sqrt{x^2+y^2}} .$$

Disegnare $B$ e determinare gli estremi assoluti di $f$ in $B$.

**Esercizio 2.11.3.** Rispondere a **uno e uno solo** dei due seguenti quesiti

1. Definizione di curva parametrica regolare.

2. Teorema per il cambiamento di variabile negli integrali doppi.

### 2.12. Compito - Quinto appello

**Esercizio 2.12.1.** Al variare dei parametri $\omega \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{R}$ si consideri il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} y'' + \omega^2 y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = a \end{cases}$$

Verificare che

1. se $\omega$ dispari, il problema ammette soluzione solo per $a = 0$. In questo caso, quante sono le soluzioni?

2. se $\omega$ pari, per ogni valore di $a$ il problema ammette una ed una sola soluzione. Determinarla.

Nel caso particolare $\omega = 2$, determinare $a$ in modo che il grafico della soluzione passi per il punto $\left(\frac{\pi}{12}, 1\right)$ e sia $f\colon x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to f(x) \in \mathbb{R}$ la restrizione all'intervallo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ della soluzione cos ottenuta.

Sia
$$g\colon (x,y)\in\mathbb{R}^2 \to y\cos(x)\in\mathbb{R}.$$
e sia $A$ la regione del piano $Oxy$ delimitata dal grafico di $f$ e dall'asse delle ascisse.
Disegnare $A$. Determinare gli estremi assoluti di $g$ in $A$ e calcolare $\displaystyle\int_A g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

**Esercizio 2.12.2.** Sul piano $Oxz$ si consideri la curva parametrica generata dal grafico della funzione
$$f\colon x\in[a,1]\to|\ln(x)|\ .$$
Verificare che per ogni $a\in(0,1)$ si ha una curva parametrica regolare.
Si consideri la superficie generata dalla rotazione di questa curva attorno all'asse $z$. Calcolarne l'Area. Scrivere in forma parametrica la curva che si ottiene intersecando la superficie con l'insieme
$$A\equiv\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon\ \exp(z)=2y\right\}$$

**Esercizio 2.12.3.** Rispondere a **uno e uno solo** dei due seguenti quesiti

1. Teorema di derivazione e integrazione per serie di potenze.
2. Criterio di Leibnitz.

### 2.13. Compito - Sesto appello

**Esercizio 2.13.1.** Al variare dei parametri $n\in\mathbb{N}$ e $k\in\mathbb{Z}$ si consideri l'equazione differenziale
$$y''-n^2y=\exp(kx) \tag{2.2}$$
Determinare per quali valori dei parametri $n$ e $k$ esistono soluzioni $y(x)$ tali che

1. esiste finito $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)\neq 0$;
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)=0$;
3. $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)=0\\ y(0)=0\end{cases}$ ;
4. $y(x)$ una funzione pari.

Nel caso particolare $k=n=2$, risovere il problema di Cauchy associato all'equazione (2.2) con condizioni iniziali
$$y(\ln(2))=0\,,\quad y'(\ln(2))=1-\frac{16}{15}\ln(2)\,.$$

**Esercizio 2.13.2.** Siano $a$ e $b$ due parametri reali tali che $a^2 + b^2 = 1$. Si considerino le funzioni

$$g_{ab} \colon x \in \mathbb{R} \to a\cos(x) + b\sin(x) \in \mathbb{R}$$

e sia

$$f_{ab} \colon x \in [0, \pi] \to g_{ab}(x) \in \mathbb{R}$$

la restrizione di $g_{ab}$ all'intervallo $[0, \pi]$. Sul piano $Oxy$ si considerino la curva $\gamma$ generata dal grafico di $f_{ab}$ e il campo vettoriale

$$\mathbf{F} \colon (x, y) \in \mathbb{R}^2 \to (y, 2) \in \mathbb{R}^2.$$

Determinare $a$ e $b$ in modo che il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo $\gamma$ sia minimo. Calcolare tale minimo. Siano $\overline{a}$ e $\overline{b}$ i valori dei parametri $a$ e $b$ che realizzano tale minimo e sia $g_{\overline{a}\overline{b}}$ la funzione che si ottiene in corrispondenza di tali parametri.

Sia $h \colon (x, y) \in \mathbb{R}^2 \to g_{\overline{a}\overline{b}}(x - y) - g_{\overline{a}\overline{b}}(x + y) \in \mathbb{R}$. Determinare la natura dei punti critici di $h$.

**Esercizio 2.13.3.** Rispondere a **uno e uno solo** dei due seguenti quesiti

1. Teorema di derivazione e integrazione per serie di potenze.

2. Definizione di dominio connesso e di superficie parametrica regolare.

## 2.14. Compito - Sesto appello - bis

**Esercizio 2.14.1.** Si consideri la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n x^{\frac{n}{2}}}{n+1}$. Determinare l'insieme di convergenza della serie. Detto $D$ tale insieme, per ogni $x \in D$, sia $f(x)$ la somma della serie. Dopo aver riconosciuto la funzione $f$, si calcoli $f\left(\frac{1}{3}\right)$.

**Esercizio 2.14.2.** Si consideri la funzione

$$F \colon (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \to x^2 + y^2 - z^2 \in \mathbb{R}$$

Disegnare e identificare l'insieme

$$A \equiv \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon F(x, y, z) = -1\right\}.$$

Si consideri la superficie parametrica

$$\varphi \colon (u, v) \in \left[\frac{1}{4}, 4\right] \times \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] \to \varphi(u, v) = (\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, \cosh u) \in \mathbb{R}^3.$$

Verificare che l'immagine $\Sigma$ della superficie $\varphi$ contenuta in $A$. Indicare sul disegno di $A$ quale porzione rappresenta $\Sigma$.

Calcolare $\iint_\Sigma \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}\sigma$.

Scrivere l'equazione del piano tangente $\alpha$ e della retta normale alla superficie in $\varphi\left(\ln 2, \frac{\pi}{3}\right)$. Determinare, se esiste, il punto di $\alpha$ avente minima distanza dall'origine.

Si consideri la regione $D$ dello spazio delimitata da $A$ e dai piani $z = \cosh\frac{1}{4}$, $z = \cosh 4$ e sia $E$ la proiezione di $D$ sul piano $x = 0$. Calcolare l'Area di $E$ e $\iint_E |y|\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

**Esercizio 2.14.3.** Rispondere a **uno e uno solo** dei due seguenti quesiti

1. Caratterizzazione delle soluzioni di una equazione differenziale lineare omogenea e delle soluzioni di una equazione differenziale lineare non omogenea.

2. Teorema di Cauchy.

### 2.15. Compito - Settimo appello

**Esercizio 2.15.1.** Sviluppare in serie di McLaurin la funzione $f(x) = \arctan(x)$.

1. Determinare l'insieme di convergenza della serie.

2. Usando tale sviluppo, trovare lo sviluppo in serie della funzione
$$F(x) = \int_0^x \frac{\arctan(t)}{t}\mathrm{d}t\,.$$

3. Determinare l'insieme di convergenza della serie ottenuta.

**Esercizio 2.15.2.** Si consideri la funzione
$$f\colon (x,y)\in\mathbb{R}^2 \to \frac{x-y}{1+x^2+y^2}\in\mathbb{R}\,.$$
Disegnare ed identificare gli insiemi di livello della funzione $f$. Mediante lo studio degli insiemi di livello determinare, se esistono, il massimo ed il minimo assoluto di $f$.

Disegnare ed identificare l'insieme
$$A \equiv \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon f(x,y)\geq\frac{1}{2}\right\}$$
Si consideri la curva
$$\gamma\colon t\in[0,2\pi]\to\gamma(t) = (1+\mathrm{e}^{-t}\cos t, -1+\mathrm{e}^{-t}\sin t)\in\mathbb{R}^2\,.$$
Verificare che il supporto della curva tutto contenuto in $A$. Calcolare il versore tangente alla curva in un generico punto $\gamma(t)$.

Scrivere la retta tangente alla curva in un generico punto $\gamma(t)$.

Esiste $t\in[0,2\pi]$ tale che questa retta passi per l'origine?

**Esercizio 2.15.3.** Rispondere a **uno e uno solo** dei due seguenti quesiti

1. Enunciare le condizioni necessarie e sufficienti del secondo ordine affinch un punto critico di una funzione $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ sia un punto di minimo relativo.

2. Si definisca la nozione di curva polare e si dica quale condizione deve essere soddisfatta affinch una curva polare sia una curva parametrica regolare del piano.

## 2.16. Compito - Settimo appello - bis

**Esercizio 2.16.1.** Si riferisca lo spazio euclideo ad un sistema di assi cartesiani ortogonali $Oxyz$. Sia

$$A \equiv \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x \geq 0\,, \quad y = 0\,, \quad x^2 - z^2 = 1\right\}$$

e sia $B$ l'insieme che si ottiene da $A$ con una rotazione completa attorno all'asse $z$. Identificare $A$ e $B$ e disegnarli nel riferimento $Oxyz$.

Si consideri la superficie $\Sigma$ di equazioni parametriche

$$\varphi(u, v) = \left(\cos(u) - \frac{v}{\sqrt{2}}\sin(u), \sin(u) + \frac{v}{\sqrt{2}}\cos(u), \frac{v}{\sqrt{2}}\right)$$
$$(u, v) \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times [-1, 1]\,.$$

Verificare che $\Sigma$ contenuta in $B$. Tracciare $\Sigma$ sul disegno di $B$. Calcolare l'Area di $\Sigma$.

Tra tutti i punti di $\Sigma$ determinare quello (o quelli) aventi minima distanza dal punto $(0, 0, -1)$. Disegnare tale punto (o tali punti) sul disegno di $B$.

Si fissi $u_0 \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e si consideri la curva parametrica

$$\psi \colon v \in [-1, 1] \to \psi(v) = \varphi(u_0, v) \in \mathbb{R}^3\,.$$

L'immagine di $\psi$ un oggetto noto: identificarlo. Sia $\psi_0$ la curva che si ottiene per $u_0 = 0$. Tracciare l'immagine di $\psi_0$ sul disegno di $B$.

Si consideri il campo vettoriale

$$\mathbf{F} \colon (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \to (\exp(x), \exp(y + z), \exp(y - z)) \in \mathbb{R}^3.$$

Calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo $\psi_0$.

**Esercizio 2.16.2.** Scrivere sotto forma di battimento la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + 4x(t) = -10\cos(3t) \\ x(0) = 0\,, \quad \dot{x}(0) = 0\,. \end{cases}$$

Determinare l'ampiezza massima del moto e i periodi del battimento.

**Esercizio 2.16.3.** Rispondere a **uno e uno solo** dei due seguenti quesiti

1. Introdurre la nozione di integrale doppio su un dominio normale ed enunciare il teorema che permette la riduzione dell'integrale doppio ad un integrale iterato.

2. Enunciare le condizioni necessarie e sufficienti del secondo ordine affinch un punto critico di una funzione $f \in C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ sia un punto di massimo relativo.

# 3
# a.a. 2004-05

## 3.1. Primo appello

### Primo Esercizio

**Esercizio 3.1.1.** Si consideri la successione

$$a_n = \sqrt{n^3+2} - 2\sqrt{n^3+1} + \sqrt{n^3}.$$

**1. (max 3 punti)** Calcolare $\lim_{n\to\infty} a_n$;

**2. (max 3 punti)** al variare del parametro reale $\alpha$ discutere il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^\alpha$.

**Esercizio 3.1.2.** Si consideri la successione

$$a_n = \sqrt{\mathrm{e}^n+2} - 2\sqrt{\mathrm{e}^n+1} + \sqrt{\mathrm{e}^n}.$$

**1. (max 3 punti)** Calcolare $\lim_{n\to\infty} a_n$;

**2. (max 3 punti)** al variare del parametro reale $\alpha$ discutere il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^\alpha$.

### Secondo Esercizio

**Esercizio 3.1.3.** Sia $f(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' - xy = x \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

**1. (max 3 punti)** Determinare la funzione $f$ e il suo dominio;

**2. (max 1 punto)** Siano

$$\begin{aligned} g &\colon (u,v) \in \mathbb{R}^2 \to f(u-v) - f(u+v) \in \mathbb{R} \\ h &\colon (u,v) \in \mathbb{R}^2 \to f\left(\sqrt{2\,|v|}\right) + f\left(\sqrt{2\,|u|}\right) \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Scrivere esplicitamente le funzioni $g$ e $h$;

**3. (max 4 punti)** Sul piano $Ouv$ sia $T$ il triangolo di vertici $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$. Determinare gli estremi assoluti di $g$ in $T$;

**4. (max 4 punti)** Calcolare $\displaystyle\iint_T h(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$.

**Esercizio 3.1.4.** Sia $f(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + xy = x \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

**1. (max 3 punti)** Determinare la funzione $f$ e il suo dominio;

**2. (max 1 punto)** Siano

$$\begin{aligned} g &\colon (u,v) \in \mathbb{R}^2 \to f(u-v) - f(u+v) \in \mathbb{R} \\ h &\colon (u,v) \in \mathbb{R}^2 \to f\left(\sqrt{2\,|v|}\right) + f\left(\sqrt{2\,|u|}\right) \in \mathbb{R}\,; \end{aligned}$$

Scrivere esplicitamente le funzioni $g$ e $h$;

**3. (max 4 punti)** Sul piano $Ouv$ sia $T$ il triangolo di vertici $(1,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$. Determinare gli estremi assoluti di $g$ in $T$;

**4. (max 4 punti)** Calcolare $\displaystyle\iint_T h(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$.

### 3.2. Secondo appello

#### Primo Esercizio

**Esercizio 3.2.1.** Sia $\varphi\colon t \in \mathbb{R} \to \varphi(t) \in \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^1$ e sia

$$u\colon (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to \varphi(x\mathrm{e}^{-y})\mathrm{e}^{y} \in \mathbb{R}\,.$$

**1. (max 3 punti)** Verificare che per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ si ha

$$x\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = u(x,y)\,.$$

2. **(max 3 punti)** Sul piano $Oxy$ sia $T$ il triangolo di vertici $(0,0)$, $(2,0)$, $(1,1)$. Posto $\varphi(t) = t^2$, calcolare $\displaystyle\iint_T u(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

**Esercizio 3.2.2.** Sia $\varphi\colon t \in \mathbb{R} \to \varphi(t) \in \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^1$ e sia

$$u\colon (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to \varphi(x\mathrm{e}^y)\mathrm{e}^{-y} \in \mathbb{R}\,.$$

1. **(max 3 punti)** Verificare che per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ si ha

$$x\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = u(x,y)\,.$$

2. **(max 3 punti)** Sul piano $Oxy$ sia $T$ il triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,1)$, $(0,2)$. Posto $\varphi(t) = t^2$, calcolare $\displaystyle\iint_T u(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

### Secondo Esercizio

**Esercizio 3.2.3.** Sul piano $Ouv$ si consideri l'insieme

$$E \equiv \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 < u^2 + v^2 < 9\right\}\,.$$

Sia $\Omega$ la frontiera di $E$.

1. **(max 1 punto)** Identificare $\Omega$ e disegnarlo sul piano $Ouv$;

2. **(max 3 punti)** Determinare gli estremi assoluti e i punti estremanti della restrizione a $\Omega$ della funzione

$$f\colon (u,v) \in \mathbb{R}^2 \to (u-1)^2 + v^2 \in \mathbb{R}\,;$$

3. **(max 3 punti)** Calcolare l'integrale curvilineo di $f$ esteso alla circonferenza centrata nell'origine e raggio 3;

4. **(max 1 punto)** Sia $D$ la chiusura di $E$. Identificare $D$ e disegnarlo sul piano $Ouv$;

5. **(max 4 punti)** Sia $\Sigma$ la superficie parametrica di equazioni

$$\mathbf{r}\colon (u,v) \in D \to (\mathrm{e}^u + \mathrm{e}^v, \mathrm{e}^u - \mathrm{e}^v, uv) \in \mathbb{R}^3\,.$$

   Determinare, se esistono, i punti di $\Sigma$ in cui il piano tangente è orizzontale (cioè è ben definito ed è della forma $z = costante$, dove $z$ è la terza coordinata di $\mathbb{R}^3$).

**Esercizio 3.2.4.** Sul piano $Ouv$ si consideri l'insieme

$$E \equiv \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 < u^2 + v^2 < 4\right\}\,.$$

Sia $\Omega$ la frontiera di $E$.

1. **(max 1 punto)** Identificare $\Omega$ e disegnarlo sul piano $Ouv$;

2. **(max 3 punti)** Determinare gli estremi assoluti e i punti estremanti della restrizione a $\Omega$ della funzione

$$f\colon (u,v) \in \mathbb{R}^2 \to u^2 + (v-1)^2 \in \mathbb{R}\,;$$

3. **(max 3 punti)** Calcolare l'integrale curvilineo di $f$ esteso alla circonferenza centrata nell'origine e raggio 2;

4. **(max 1 punto)** Sia $D$ la chiusura di $E$. Identificare $D$ e disegnarlo sul piano $Ouv$;

5. **(max 4 punti)** Sia $\Sigma$ la superficie parametrica di equazioni

$$\mathbf{r}\colon (u,v) \in D \to (\mathrm{e}^u + \mathrm{e}^v, \mathrm{e}^u - \mathrm{e}^v, uv) \in \mathbb{R}^3\,.$$

   Determinare, se esistono, i punti di $\Sigma$ in cui il piano tangente (ovvero il versore normale) non è definito.

### 3.3. Terzo appello

#### Primo Esercizio

**Esercizio 3.3.1.** Si consideri la funzione

$$f\colon x \in \mathbb{R} \to (4x^2+1)^{-1/2} \in \mathbb{R}$$

1. **(max 2 punti)** Usando gli sviluppi in serie di MacLaurin già noti, scrivere lo sviluppo in serie della funzione $f$;

2. **(max 4 punti)** Dopo aver calcolato la derivata prima della funzione

$$g\colon x \in \mathbb{R} \to \ln\left(6x + \sqrt{36x^2+9}\right) \in \mathbb{R}\,,$$

   determinare lo sviluppo in serie di MacLaurin della funzione $g$.

**Esercizio 3.3.2.** Si consideri la funzione

$$f\colon x \in \mathbb{R} \to (9x^2+1)^{-1/2} \in \mathbb{R}$$

1. **(max 2 punti)** Usando gli sviluppi in serie di MacLaurin già noti, scrivere lo sviluppo in serie della funzione $f$;

2. **(max 4 punti)** Dopo aver calcolato la derivata prima della funzione

$$g\colon x \in \mathbb{R} \to \ln\left(6x + \sqrt{36x^2+4}\right) \in \mathbb{R}\,,$$

   determinare lo sviluppo in serie di MacLaurin della funzione $g$.

**Secondo esercizio**

**Esercizio 3.3.3.** Sul piano $Oxy$ si consideri l'insieme

$$E \equiv \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ |x| \le 2\,,\ |y| \le 2\,,\ |x| + |y| \ge 1\right\}\,.$$

1. **(max 1 punto)** Disegnare $E$;
2. **(max 2 punti)** Posto $f(x,y) = y^2 - 2x^2$, determinarne gli estremi assoluti in $E$ ed i punti estremanti;
3. **(max 2 punti)** Descrivere, sotto forma di una o più curve parametriche, la frontiera dell'insieme $E$;
4. **(max 2 punti)** Calcolare $\displaystyle\int_{\partial E} f \,\mathrm{d}s$;
5. **(max 2 punti)** Dopo aver riferito lo spazio euclideo ad un sistema di assi cartesiani $Oxyz$, si consideri il solido $D$ che si ottiene con una rotazione completa attorno all'asse $z$ di

   $$F \equiv \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 \le x \le 2\,,\ |z| \le 2\,,\ x + |z| \ge 1\right\}\,.$$

   Disegnare $D$ e descriverlo tramite una o più disequazioni;
6. **(max 3 punti)** Sapendo che un corpo materiale è distribuito nella regione $D$ con densità

   $$\rho(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2} + z^2\,,$$

   se ne calcolino la massa ed il momento d'inerzia rispetto all'asse $z$.

**Esercizio 3.3.4.** Sul piano $Oxy$ si consideri l'insieme

$$E \equiv \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ \max\{|x|\ ,\ |y|\} \ge 1\,,\ |x| + |y| \le 4\right\}\,.$$

1. **(max 1 punto)** Disegnare $E$;
2. **(max 2 punti)** Posto $f(x,y) = 4y^2 - x^2$, determinarne gli estremi assoluti in $E$ ed i punti estremanti;
3. **(max 2 punti)** Descrivere, sotto forma di una o più curve parametriche, la frontiera dell'insieme $E$;
4. **(max 2 punti)** Calcolare $\displaystyle\int_{\partial E} f \,\mathrm{d}s$;
5. **(max 2 punti)** Dopo aver riferito lo spazio euclideo ad un sistema di assi cartesiani $Oxyz$, si consideri il solido $D$ che si ottiene con una rotazione completa attorno all'asse $z$ di

   $$F \equiv \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x \ge 0\,,\ \max\{x\ ,\ |z|\} \ge 1\,,\ x + |z| \le 4\right\}\,.$$

   Disegnare $D$ e descriverlo tramite una o più disequazioni;

6. **(max 4 punti)** Sapendo che un corpo materiale è distribuito nella regione $D$ con densità
$$\rho(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2} + z^2\,,$$
se ne calcolino la massa ed il momento d'inerzia rispetto all'asse $z$.

### 3.4. Quarto appello

#### Primo Esercizio

**Esercizio 3.4.1.** Al variare del parametro reale $a > 0$, si consideri la funzione
$$f(t) = \begin{cases} \exp(-t) & t < a \\ 0 & t > a \end{cases}.$$
Si consideri poi il seguente problema di Cauchy
$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + x(t) = f(t) \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}.$$

1. **(max 4 punti)** Determinare la soluzione $x\colon t \in \mathbb{R} \to x(t) \in \mathbb{R}$.

**Esercizio 3.4.2.** Al variare del parametro reale $a > 0$, si consideri la funzione
$$f(t) = \begin{cases} \cos(2t) & t < a \\ 0 & t > a \end{cases}.$$
Si consideri poi il seguente problema di Cauchy
$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + 4x(t) = f(t) \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}.$$

1. **(max 4 punti)** Determinare la soluzione $x\colon t \in \mathbb{R} \to x(t) \in \mathbb{R}$.

#### Secondo esercizio

**Esercizio 3.4.3.** Sul piano $Oxy$ si consideri l'insieme
$$E \equiv \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon y \geq 0\,,\ x^2+y^2 \leq 4\,,\ (|x|-1)^2+y^2 \geq 1\right\}.$$

1. **(max 2 punti)** Disegnare $E$;
2. **(max 1 punti)** Descrivere, sotto forma di una o più curve parametriche, la frontiera dell'insieme $E$;

3. **(max 4 punti)** Posto $f(x,y) = \sqrt{(x-1)^2+y^2} + \sqrt{(x+1)^2+y^2}$, determinarne gli estremi assoluti in $E$ ed i punti estremanti;

4. **(max 4 punti)** Si consideri il campo vettoriale

$$\mathbf{F}\colon (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to (xy, y^2) \in \mathbb{R}^2$$

   Calcolare $\displaystyle\int_{\partial E} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}$;

5. **(max 3 punti)** Si immerga il piano $Oxy$ nello spazio euclideo riferito ad una terna di assi ortogonali $Oxyz$ e si consideri la superficie $\Sigma$ che si ottiene ruotando $\partial E$ con una rotazione completa attorno all'asse $x$. Scrivere $\Sigma$ sotto forma di una o più superfici parametriche regolari.

**Esercizio 3.4.4.** Sul piano $Oxy$ si consideri l'insieme

$$E \equiv \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \geq 0\,,\ x^2+y^2 \leq 16\,,\ x^2+(y-2)^2 \geq 1\right\}\ .$$

1. **(max 2 punti)** Disegnare $E$;

2. **(max 1 punti)** Descrivere, sotto forma di una o più curve parametriche, la frontiera dell'insieme $E$;

3. **(max 4 punti)** Posto $f(x,y) = \sqrt{x^2+(y-1)^2} + \sqrt{x^2+(y-3)^2}$, determinarne gli estremi assoluti in $E$ ed i punti estremanti;

4. **(max 4 punti)** Si consideri il campo vettoriale

$$\mathbf{F}\colon (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to (xy, y^2) \in \mathbb{R}^2$$

   Calcolare $\displaystyle\int_{\partial E} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}$;

5. **(max 3 punti)** Si immerga il piano $Oxy$ nello spazio euclideo riferito ad una terna di assi ortogonali $Oxyz$ e si consideri la superficie $\Sigma$ che si ottiene ruotando $\partial E$ con una rotazione completa attorno all'asse $x$. Scrivere $\Sigma$ sotto forma di una o più superfici parametriche regolari.

## 3.5. Quinto appello

### Primo Esercizio

**Esercizio 3.5.1.** Sia $f\colon x \in \mathbb{R} \to f(x) \in \mathbb{R}$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y - \exp(x) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

1. **(max 2 punti)** Determinare $f$;

2. **(max 4 punti)** sia $g\colon (u,v) \in \mathbb{R}^2 \to f(u+v) - f(u-v)$. Esplicitare $g$, determinarne gli eventuali punti critici e la loro natura;

3. **(max 4 punti)** sia $h\colon (u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \to f(u+v+w)$. Calcolare l'integrale di $h$ esteso al tetraedro dello spazio $Ouvw$ di vertici $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$.

**Esercizio 3.5.2.** Sia $f\colon x \in \mathbb{R} \to f(x) \in \mathbb{R}$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -y + \exp(-x) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

1. **(max 2 punti)** Determinare $f$;

2. **(max 4 punti)** sia $g\colon (u,v) \in \mathbb{R}^2 \to f(u+v) - f(u-v)$. Esplicitare $g$, determinarne gli eventuali punti critici e la loro natura;

3. **(max 4 punti)** sia $h\colon (u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \to f(u+v+w)$. Calcolare l'integrale di $h$ esteso al tetraedro dello spazio $Ouvw$ di vertici $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,1,1)$.

### Secondo Esercizio

**Esercizio 3.5.3.** Sul piano $Oxy$ si consideri l'insieme

$$E \equiv \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \, , \; x^2+y^2 \le 1 \, , \; (|x|-1)^2 + (y-1)^2 \ge 1 \right\} .$$

1. **(max 2 punti)** Disegnare $E$;

2. **(max 4 punti)** Posto $f(x,y) = x^2 - y^2$, calcolare $\displaystyle\iint_E f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;

3. **(max 2 punti)** Determinare gli estremi assoluti ed i punti estremanti di $f$ in $E$;

**Esercizio 3.5.4.** Sul piano $Oxy$ si consideri l'insieme

$$E \equiv \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \, , \; x^2+y^2 \le 1 \, , \; (x-1)^2 + (|y|-1)^2 \ge 1 \right\} .$$

1. **(max 2 punti)** Disegnare $E$;

2. **(max 4 punti)** Posto $f(x,y) = x^2 - y^2$, calcolare $\displaystyle\iint_E f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;

3. **(max 2 punti)** Determinare gli estremi assoluti ed i punti estremanti di $f$ in $E$.

# 4
# a.a. 2005-06

## 4.1. Primo appello

### Primo Esercizio

**Esercizio 4.1.1.** Si consideri la funzione

$$f\colon (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to |y| - x^2 \in \mathbb{R}\,.$$

**1. (max 3 punti)** Tracciare le linee di livello della funzione $f$.
**2. (max 3 punti)** Determinare gli estremi assoluti della funzione $f$ nell'insieme $Q = [-1,1] \times [-1,1]$ indicando anche i punti estremanti.
**3. (max 3 punti)** Calcolare $\displaystyle\iint_Q f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
**4. (max 3 punti)** Calcolare $\displaystyle\int_{\partial Q} f\mathrm{d}s$ .

**Esercizio 4.1.2.** Si consideri la funzione

$$f\colon (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to |x| - y^2 \in \mathbb{R}\,.$$

**1. (max 3 punti)** Tracciare le linee di livello della funzione $f$.
**2. (max 3 punti)** Determinare gli estremi assoluti della funzione $f$ nell'insieme $Q = [-1,1] \times [-1,1]$ indicando anche i punti estremanti.
**3. (max 3 punti)** Calcolare $\displaystyle\iint_Q f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
**4. (max 3 punti)** Calcolare $\displaystyle\int_{\partial Q} f\mathrm{d}s$ .

### Secondo Esercizio

**Esercizio 4.1.3.** Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k-1}{k+1} 2^k x^k$$

**1. (max 2 punti)** Determinare l'insieme di convergenza $I$ della serie di potenze
**2. (max 4 punti)** Detta

$$f\colon x \in I \to \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k-1}{k+1} 2^k x^k \in \mathbb{R}$$

la funzione somma della serie, determinare una formula esplicita per $f$.

**Esercizio 4.1.4.** Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k-1}{k+1} 2^{-k} x^k$$

**1. (max 2 punti)** Determinare l'insieme di convergenza $I$ della serie di potenze
**2. (max 4 punti)** Detta

$$f\colon x \in I \to \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k-1}{k+1} 2^{-k} x^k \in \mathbb{R}$$

la funzione somma della serie, determinare una formula esplicita per $f$.

### 4.2. Secondo appello

**Esercizio unico**

**Esercizio 4.2.1.** Al variare del parametro reale $a$, si consideri il problema differenziale

$$\begin{cases} v'' + av = 0 \\ V(0) = 1 \\ \lim_{t\to+\infty} v(t) = 0 \end{cases}$$

**1. (max 4 punti)** Mostrare che

1. Se $a \geq 0$, il problema non ammette alcuna soluzione;
2. Se $a < 0$, il problema ammette una ed una soluzione definita su tutto $\mathbb{R}$.

**2. (max 2 punti)** Sul piano $Oxy$ si consideri l'insieme

$$D \equiv \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \leq |x-1| + |y-2| \leq 3\right\} .$$

Disegnare $D$.

**3. (max 4 punti)** Sia $v\colon t \in \mathbb{R} \to v(t) \in \mathbb{R}$ la soluzione che si ottiene per $a = -4$ e sia

$$f\colon (x, y) \in \mathbb{R}^2 \to v\left(\frac{x+y}{2}\right) - v(x) - v(y)$$

Calcolare gli estremi assoluti di $f$ in $D$ indicando i punti estremanti.

**4. (max 4 punti)** Supponiamo che su $\partial D$ sia distribuita una massa con densità lineare $\rho(x, y) = 1 + |xy|$. Calcolare la massa totale.

**5. (max 4 punti)** Supponiamo che su $D$ sia distribuita una massa con densità superficiale $d(x, y) = 1 + |x|$. Calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse $y$.

**Esercizio 4.2.2.** Al variare del parametro reale $a$, si consideri il problema differenziale

$$\begin{cases} v'' + av = 0 \\ v(0) = 1 \\ \lim_{t\to-\infty} v(t) = 0 \end{cases}$$

**1. (max 4 punti)** Mostrare che

1. Se $a \geq 0$, il problema non ammette alcuna soluzione;

2. Se $a < 0$, il problema ammette una ed una soluzione definita su tutto $\mathbb{R}$.

**2. (max 2 punti)** Sul piano $Oxy$ si consideri l'insieme

$$D \equiv \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \leq |x - 2| + |y - 1| \leq 3\right\} .$$

Disegnare $D$.

**3. (max 4 punti)** Sia $v \colon t \in \mathbb{R} \to v(t) \in \mathbb{R}$ la soluzione che si ottiene per $a = -4$ e sia

$$f \colon (x, y) \in \mathbb{R}^2 \to v\left(\frac{x + y}{2}\right) - v(x) - v(y)$$

Calcolare gli estremi assoluti di $f$ in $D$ indicando i punti estremanti.

**4. (max 4 punti)** Supponiamo che su $\partial D$ sia distribuita una massa con densità lineare $\rho(x, y) = 1 + |x|$. Calcolare la massa totale.

**5. (max 4 punti)** Supponiamo che su $D$ sia distribuita una massa con densità superficiale $d(x, y) = 2 + |xy|$. Calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse $y$.

### 4.3. Terzo appello

#### Primo esercizio

**Esercizio 4.3.1. (max 3 punti)** Al variare dei parametri $\alpha$, $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ determinare la parte principale in $t = 0$ della funzione

$$f(t) = \left(1 + t^{20}\right)^{\alpha} - \cos(\beta t^{10})$$

**Esercizio 4.3.2. (max 3 punti)** Al variare dei parametri $\alpha$, $\beta \in \mathbb{R}$ calcolare, se esiste,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\left(k^{\beta} + 1\right)^{\alpha}}{k}$$

**Secondo esercizio**

**Esercizio 4.3.3.** Al variare del parametro reale $\alpha$ si consideri la serie di potenze

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (k+1)^\alpha}{k} x^k$$

**1. (max 3 punti)** Determinare l'insieme di convergenza $I_\alpha$ della serie;
**2. (max 3 punti)** Nel caso patricolare $\alpha = 2$ scrivere esplicitamente la funzione somma della serie.

**Esercizio 4.3.4.** Al variare del parametro reale $\alpha$ si consideri la serie di potenze

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)^\alpha}{k} x^{3k}$$

**1. (max 3 punti)** Determinare l'insieme di convergenza $I_\alpha$ della serie;
**2. (max 3 punti)** Nel caso patricolare $\alpha = 2$ scrivere esplicitamente la funzione somma della serie.

**Terzo esercizio**

**Esercizio 4.3.5.** Si consideri l'insieme

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon |y-1| \leq x^2, \quad |x-1| + |y-1| \leq 1, \quad y \neq x\right\}$$

**1. (max 1 punto)** Disegnare $D$ e dire se è aperto, chiuso, limitato, connesso per archi;
**2. (max 1 punto)** Disegnare $A \equiv \operatorname{int}(D)$ e dire se è aperto, chiuso, limitato, connesso per archi;
**2. (max 1 punto)** Disegnare $E \equiv \overline{D}$ e dire se è aperto, chiuso, limitato, connesso per archi;
**4. (max 4 punti)** Sia

$$f \colon (x, y) \in E \to y|x-1| + 4x|y-1| \in \mathbb{R}$$

Determinare gli estremi assoluti di $f$ in $E$ indicando i punti estremanti;
**5. (max 3 punti)** Calcolare $\displaystyle\iint_E f(x, y)\, dxdy$.

**Esercizio 4.3.6.** Si consideri l'insieme

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon |y+1| \leq x^2, \quad |x-1| + |y+1| \leq 1, \quad y \neq -x\right\}$$

**1. (max 1 punto)** Disegnare $D$ e dire se è aperto, chiuso, limitato, connesso per archi;
**2. (max 1 punto)** Disegnare $A \equiv \operatorname{int}(D)$ e dire se è aperto, chiuso, limitato, connesso per archi;

**2. (max 1 punto)** Disegnare $E \equiv \overline{D}$ e dire se è aperto, chiuso, limitato, connesso per archi;
**4. (max 4 punti)** Sia

$$f\colon (x,y) \in E \to y|x-1| - 4x|y+1| \in \mathbb{R}$$

Determinare gli estremi assoluti di $f$ in $E$ indicando i punti estremanti;
**5. (max 3 punti)** Calcolare $\displaystyle\iint_E f(x,y)\,dxdy$.

### 4.4. Quarto appello

**Esercizio unico**

**Esercizio 4.4.1.** Al variare dei parametri reali $\alpha$ e $\beta$, si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'' + \alpha^2 x = \cos(\alpha t) \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = \beta \end{cases}$$

**1. (max 3 punti)** Al variare di $\alpha$ e $\beta$ si determini la soluzione

$$x_{\alpha,\beta}\colon t \in \mathbb{R} \to x_{\alpha,\beta}(t) \in \mathbb{R}$$

di detto problema.
**2. (max 3 punti)** Si consideri la funzione

$$f\colon (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \to x_{\alpha,\beta}(1) \in \mathbb{R}$$

$f$ è derivabile?
**3. (max 3 punti)** $f$ è differenziabile?
**4. (max 2 punti)** Sia

$$D \equiv \left\{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\colon \alpha \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad |\beta| \le \cos(\alpha)\right\}.$$

Disegnare $D$ sul piano $O\alpha\beta$.
**5. (max 4 punti)** Si consideri la funzione

$$g\colon (\alpha,\beta) \in D \to \alpha f(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}$$

Determinare, se esistono, gli estremi assoluti di $g$ in $D$.
**6. (max 3 punti)** Calcolare $\displaystyle\iint_D |g(\alpha,\beta)| d\alpha d\beta$.

## 4.5. Quinto appello

### Primo Esercizio

**Esercizio 4.5.1.** Sia

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \geq 0, \quad (x-1)^2 + y^2 \leq 1\right\}.$$

**1. (max 3 punti)** Disegnare $D$ e verificare che per ogni $a > 0$ esiste una ed una sola semiretta uscente dall'origine che divide $D$ in due sottoinsiemi $D_1$ e $D_2$ tali che

$$\iint_{D_1} y dx dy = a \iint_{D_2} y dx dy$$

dove $D_1$ è il sottoinsieme di $D$ che interseca l'asse delle ascisse solo nell'origine.
**2. (max 5 punti)** Verificare che per ogni $b > 0$ esiste una ed una sola semiretta uscente dall'origine che divide $D$ in due sottoinsiemi $E_1$ e $E_2$ tale che

$$\iint_{E_1} y dx dy = b \iint_{T_2} y dx dy$$

dove $E_1$ è il sottoinsieme di $D$ che interseca l'asse delle ascisse solo nell'origine e $T_2$ è il triangolo individuato dalla semiretta, dall'asse delle ascisse e dalla retta $x = 2$.

### Secondo esercizio

**Esercizio 4.5.2.** Sia $D$ il dominio della funzione

$$g(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2} \ln\left(2x - x^2 - y^2\right).$$

**1. (max 2 punti)** Disegnare $D$, $A \equiv \operatorname{int}(D)$, $F \equiv \partial D$, $E \equiv \overline{D}$ e, per ciascuno dei quattro insiemi, dire se si tratta di un insieme aperto, chiuso, limitato, connesso per archi;
**2. (max 4 punti)** Sia

$$f \colon (x, y) \in E \to \left|4y^2 - x^2\right| + 2x^2 \in \mathbb{R}$$

Determinare gli estremi assoluti di $f$ in $F$ indicando i punti estremanti;
Determinare gli estremi assoluti di $f$ in $E$ indicando i punti estremanti;
**3. (max 4 punti)** Calcolare $\displaystyle\int_F f\, ds$.

**Esercizio 4.5.3.** Sia $D$ il dominio della funzione

$$g(x, y) = \sqrt{(x-2)^2 - y^2} \ln\left(-2x - x^2 - y^2\right).$$

**1. (max 2 punti)** Disegnare $D$, $A \equiv \operatorname{int}(D)$, $F \equiv \partial D$, $E \equiv \overline{D}$ e, per ciascuno dei quattro insiemi, dire se si tratta di un insieme aperto, chiuso, limitato, connesso

per archi;
**2. (max 4 punti)** Sia

$$f\colon (x,y) \in E \to \left|4y^2 - x^2\right| + 9x^2 \in \mathbb{R}$$

Determinare gli estremi assoluti di $f$ in $F$ indicando i punti estremanti;
Determinare gli estremi assoluti di $f$ in $E$ indicando i punti estremanti;
**3. (max 4 punti)** Calcolare $\displaystyle\int_F f\, ds$.

### 4.6. Sesto appello

#### Primo Esercizio

**Esercizio 4.6.1.** Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2-1}{2^n} t^{2n},$$

1. **(max 1 punto)** Determinare l'insieme di convergenza $I$.
2. **(max 3 punti)** Sia $f\colon t \in I \to f(t) \in \mathbb{R}$ la funzione somma della serie. Esplicitare $f$
3. **(max 1 punto)** Sia
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \max\{|x|, |y|\} \in I\right\}.$$
D è aperto? è chiuso? è connesso per archi? è limitato? Disegnare $D$ e $\overline{D}$
4. **(max 2 punti)** Si consideri la funzione
$$g\colon (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to \left|y^2 - y\right| + x \in \mathbb{R}$$
Disegnare gli insiemi di livello di $g$.
5. **(max 2 punti)** Determinare, se esistono, gli estremi assoluti di $g$ in $\overline{D}$, indicando i punti estremanti.

#### Secondo Esercizio

**Esercizio 4.6.2.** Si consideri la curva

$$\varphi\colon u \in [0,\pi] \to \varphi(u) \in \mathbb{R}^3$$

di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = u + \sin u \\ y = 0 \\ z = 1 + \cos u. \end{cases}$$

1. **(max 2 punti)** Vericare che il supporto di $\varphi$ giace sul semipiano

$$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon x\geq 0,\quad y=0\right\}.$$

e disegnare, approssimativamente, il supporto di $\varphi$.

2. **(max 3 punti)** Sia $\Sigma$ la superficie che si ottiene ruotando il supporto di $\varphi$ attorno all'assse $z$. Calcolare l'Area di $\Sigma$.

3. **(max 1 punto)** Scrivere $\Sigma$ in forma parametrica.

4. **(max 3 punti)** Supponiamo che su $\Sigma$ sia distribuita una massa con densità $\rho(x,y,z)=|z|+1$. Calcolare la massa.

### 4.7. Settimo appello

**Primo esercizio**

**Esercizio 4.7.1.** Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\left(n^2+1\right)(2t)^n,$$

1. **(max 1 punto)** Determinare il raggio di convergenza $R$ e l'insieme di convergenza $I$ della serie.

2. **(max 4 punti)** Sia $f\colon t\in I\to f(t)\in\mathbb{R}$ la funzione somma della serie. Esplicitare $f$

3. **(max 2 punti)** Sia

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon R\leq\frac{\max\{|x|,|y|\}}{x^2+y^2}\leq 2R\right\}.$$

D è aperto? è chiuso? è connesso per archi? è limitato? Disegnare $D$.

4. **(max 2 punti)**Sia

$$E=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon x\geq 0,\ y=0\ (x,z)\in D\right\}$$

e sia $T$ la regione dello spazio che si ottiene ruotando $E$ attorno all'asse $z$. Disegnare $T$.

5. **(max 4 punti)** Calcolare il volume di $T$.

6. **(max 4 punti)** Calcolare l'area della frontiera di $T$

### Secondo esercizio

**Esercizio 4.7.2.** Si consideri l'insieme

$$Q = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon \ |x| + |y-1| \le 1\right\}.$$

1. **(max 1 punto)** Disegnare $Q$.
2. **(max 4 punti)** Si consideri la funzione

   $$g \colon (x, y) \in \mathbb{R}^2 \to \left|x^2 - xy\right| + xy \in \mathbb{R}$$

   Disegnare gli insiemi di livello di $g$.
3. **(max 3 punti)** Determinare, se esistono, gli estremi assoluti di $g$ in $Q$, indicando i punti estremanti.

# 5
# a.a. 2006-07

## 5.1. Primo appello

### Primo Esercizio

**Esercizio 5.1.1.** Si consideri la funzione $\alpha\colon t \in \mathbb{R} \mapsto \alpha(t) \in \mathbb{R}$ definita da

$$\alpha(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 2\pi \\ -2 & t > 2\pi \end{cases}$$

1. Determinare la soluzione $f\colon t \in \mathbb{R} \mapsto f(t) \in \mathbb{R}$, $f \in C^1(\mathbb{R})$, del problema differenziale
$$\begin{cases} \ddot{x} + \alpha(t)\dot{x} + x = 2\sin(t) \\ x(0) = \pi \\ \dot{x}(0) = -1 \end{cases}$$
2. Sia $\gamma\colon t \in [-\pi, \pi] \mapsto (f(t), f(\pi - t)) \in \mathbb{R}^2$. Dire se si tratta di una curva regolare, se è semplice e se è chiusa.
3. Scrivere, se esiste, la retta tangente al supporto di $\gamma$ nel punto $\gamma(0)$.

**Esercizio 5.1.2.** Si consideri la funzione $\alpha\colon t \in \mathbb{R} \mapsto \alpha(t) \in \mathbb{R}$ definita da

$$\alpha(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 2\pi \\ -2 & t > 2\pi \end{cases}$$

1. Determinare la soluzione $f\colon t \in \mathbb{R} \mapsto f(t) \in \mathbb{R}$, $f \in C^1(\mathbb{R})$, del problema differenziale
$$\begin{cases} \ddot{x} + \alpha(t)\dot{x} + x = -2\cos(t) \\ x(0) = \pi \\ \dot{x}(0) = -1 \end{cases}$$

2. Sia $\gamma\colon t \in [-\pi, \pi] \mapsto (f(t), f(\pi - t)) \in \mathbb{R}^2$. Dire se si tratta di una curva regolare, se è semplice e se è chiusa.

3. Scrivere, se esiste, la retta tangente al supporto di $\gamma$ nel punto $\gamma(0)$.

**Secondo Esercizio**

**Esercizio 5.1.3.** Sia $f\colon (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto 4x^2 + |y-1|\,(y-1) \in \mathbb{R}$.

1. Disegnare le linee di livello di $f$.

2. Disegnare l'insieme

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon\ |2x| + |y-1| \leq 4, \right\}.$$

3. Determinare gli estremi assoluti di $f$ in $D$, indicando i punti estremanti.

4. Sia $E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon x^2 + (y-1)^2 \leq 1 \quad |2x| + |y-1| \leq 2\right\}$. Disegnare $E$, calcolare $\displaystyle\int_{\partial E} f \mathrm{d}s$ e $\displaystyle\iint_E f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

5. Disegnare $F = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon f(x, y) \leq 4, \quad y \geq 1\right\}$ e calcolare il Volume della regione che si ottiene da $F$ con una rotazione completa attorno all'asse delle ordinate.

**Esercizio 5.1.4.** Sia $f\colon (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + 4\,|y-1|\,(y-1) \in \mathbb{R}$.

1. Disegnare le linee di livello di $f$.

2. Disegnare l'insieme

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon\ |x| + 2\,|y-1| \leq 1, \right\}.$$

3. Determinare gli estremi assoluti di $f$ in $D$, indicando i punti estremanti.

4. Sia $E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon x^2 + (y-1)^2 \leq 1 \quad |2x| + |y-1| \leq 2\right\}$. Disegnare $E$, calcolare $\displaystyle\int_{\partial E} f \mathrm{d}s$ e $\displaystyle\iint_E f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

5. Disegnare $F = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon f(x, y) \leq 2, \quad y \geq 1\right\}$ e calcolare il Volume della regione che si ottiene da $F$ con una rotazione completa attorno all'asse delle ordinate.

## 5.2. Secondo appello

### Primo Esercizio

**Esercizio 5.2.1.** Si consideri la funzione $f\colon (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to x^2 + \max\{x^2, y^2\} \in \mathbb{R}$.

1. Disegnare le linee di livello di $f$
2. Disegnare l'insieme

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ |x| + |y| \leq 2\right\}$$

3. Determinare gli estremi assoluti di $f$ in $D$ indicando i punti estremanti
4. Calcolare $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ e $\int_{\partial D} f\mathrm{d}s$

**Esercizio 5.2.2.** Si consideri la funzione $f\colon (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to x^2 + \min\{x^2, y^2\} \in \mathbb{R}$.

1. Disegnare le linee di livello di $f$
2. Disegnare l'insieme

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ |x| + |y| \leq 2\right\}$$

3. Determinare gli estremi assoluti di $f$ in $D$ indicando i punti estremanti
4. Calcolare $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ e $\int_{\partial D} f\mathrm{d}s$

### Secondo Esercizio

**Esercizio 5.2.3.**

$$y' = x^2y^2$$

determinare, se esistono, quelle il cui grafico è tangente alla retta $y = x$.

Indicare esplicitamente il dominio di tali soluzioni.

**Esercizio 5.2.4.** Tra tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = -xy^2$$

determinare, se esistono, quelle il cui grafico è tangente alla retta $y = x$.

Indicare esplicitamente il dominio di tali soluzioni.

**Terzo Esercizio**

**Esercizio 5.2.5.**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+2)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

Determinarne l'insieme di convergenza ed esplicitare la funzione somma della serie.

**Esercizio 5.2.6.** Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

Determinarne l'insieme di convergenza ed esplicitare la funzione somma della serie.

## 5.3. Terzo appello

**Primo Esercizio**

**Esercizio 5.3.1.** Al variare del parametro naturale $n \geq 1$, si consideri la curva parametrica

$$\varphi_n \colon t \in [-\pi, \pi] \mapsto \left( n \sin \frac{t}{n}, n \left( 1 - \cos \frac{t}{n} \right) \right) \in \mathbb{R}^2$$

1. Dimostrare che per ogni valore del parametro $n$ la curva $\varphi_n$ è regolare e semplice. Per quali valori di $n$ è chiusa?
2. Calcolare la lunghezza di $\varphi_n$
3. Che relazione c'è tra il parametro $t$ ed il parametro d'arco di $\varphi_n$?
4. Disegnare il supporto di $\varphi_1$ , $\varphi_2$, $\varphi_{1000}$ indicando punto iniziale, punto finale e verso di percorrenza.
5. Per ogni $t$ fissato calcolare, se esiste,

   $$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t).$$

   Suggerimento: trattare a parte il caso $t = 0$ e usare opportunamente gli sviluppi di MacLaurin per $t \neq 0$.
   al variare di $t$ quale oggetto viene descritto da $\varphi_t := \lim_{n\to\infty} \varphi_n(t)$?
6. Si consideri la superficie di equazione parametrica

   $$\psi \colon (u, v) \in [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi] \mapsto \left(u + v, u - v, u^2 - v^2\right) \in \mathbb{R}^3$$

   Verificare che il supporto di $\psi$ è contenuto sul grafico di una funzione $z = f(x, y)$

7. Scrivere le equazioni parametriche della curva $\gamma_n = \psi \circ \varphi_n$ ed esplicitarne la lunghezza.

**Secondo Esercizio**

**Esercizio 5.3.2.** Sul piano $Oxy$ si consideri l'insieme $D$ definito da

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ |x| \leq 2,\ |y| \leq 1\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + (|y|-1)^2 \leq 4\right\}$$

1. Disegnare $D$.
2. Disegnare le linee di livello della funzione $f(x,y) = |x| + \left|\min\left\{|y|, y^2\right\} - 1\right|$ evidenziando le eventuali simmetrie
3. Determinare gli estremi assoluti di $f$ in $D$
4. Calcolare $\int_{\partial D} f ds$
5. Supponendo che $f$ sia una densità di massa distribuita in $D$, calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse $x$ e rispetto ad un asse perpendicolare al piano $Oxy$ e passante per l'origine.

## 5.4. Quarto appello

**Primo Esercizio**

**Esercizio 5.4.1.** Sia $D = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \colon u^2 + v^2 \leq 4\right\}$ Al variare del parametro reale positivo $\alpha$ si consideri la superfici parametrica $\varphi_\alpha \colon D \to \mathbb{R}^3$ di equazioni

$$\begin{cases} x = \alpha u \\ y = \dfrac{v}{\alpha} \\ z = u^2 + v^2 \end{cases}$$

1. Dopo aver dato la definizione di superficie parametrica regolare, dimostrare che per ogni valore del parametro $\alpha$ la superficie $\varphi_\alpha$ è una superficie parametrica regolare e disegnarne il sostegno
2. Parametrizzare l'insieme $E = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \colon (u-1)^2 + v^2 = 1\right\}$ come una curva parametrica regolare $\gamma \colon I \to \mathbb{R}^2$, con $I$ opportuno intervallo chiuso e limitato
3. Considerare la curva parametrica $\psi_\alpha := \varphi_\alpha \circ \gamma$. Verificare che, qualunque sia il parametro positivo $\alpha$, il suo supporto è contenuto in un piano contenente l'asse $y$ . Esistono valori di $\alpha$ per cui questo piano coincide con il piano $z = x$?
4. Esplicitare l'Area della superficie $\varphi_\alpha$

5. Calcolare il flusso del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, xz, z^2)$ attraverso la superficie $\varphi_\alpha$, avendola orientata in modo che la terza componente del versore normale sia sempre negativa.

### Secondo esercizio

**Esercizio 5.4.2.** Dopo aver riferito il piano ad un sistema di assi cartesiani $Oxy$, si consideri l'insieme $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 4\right\}$ Sia $r$ una semiretta uscente dal punto $(2, 0)$, tutta contenuta nel quarto di piano $y \geq 0$, $x \leq 2$ e sia $s$ la sua simmetrica rispetto all'asse delle ascisse. La semiretta $r$ può essere individuata tramite l'angolo $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ che essa forma con la direzione positiva dell'asse $x$.

Si consideri la regione $E$ contenuta in $D$ e delimitata dalle due semirette.

1. Calcolare l'Area $A(\alpha)$ di $E$.

2. Scrivere $A(\alpha)$ in serie di Taylor centrata in $\pi$ (n.b. ricondursi a serie di MacLaurin già note, e non cercare di indovinare la serie calcolando esplicitamente i primi termini)

3. Siano $F_1$ ed $F_2$ la ulteriori due regioni in cui $D$ viene diviso dalle rette $r$ ed $s$.

   Determinare $\alpha$ in modo che
$$\iint_{F_1} |y| \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{F_2} |y| \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{E} |y| \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y?$$

4. È possibile scegliere $\alpha$ in modo che
$$\iint_{F_1} (x+2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{F_2} (x+2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{E} (x+2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y?$$

   In caso affermativo, quanti valori di $\alpha$ rendono vera questa catena di uguaglianze?

## 5.5. Quinto appello

### Primo Esercizio

**Esercizio 5.5.1.** Dopo aver definito la nozione di *raggio di convergenza di una serie di potenze*, determinare l'insieme di convergenza della serie di potenze
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^2 \ln(n)}{n!} x^n$$

**Secondo Esercizio**

**Esercizio 5.5.2.** Introdurre la nozione di curva in forma polare e scrivere la condizione necessaria e sufficiente per la regolarità di una tale curva.

In un piano euclideo si introduca un sistema di coordinate polari $Or\theta$. Tracciare il sostegno delle curve di equazione polare

$$r_1(\theta) = 2\sin(3\theta) \qquad r_2(\theta) = \sqrt{3} \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

e calcolare l'Area della regione

$$D = \{(r, \theta) \colon r \leq \min\{r_1(\theta), \quad r_2(\theta)\}\}\,.$$

**Terzo Esercizio**

**Esercizio 5.5.3.** Riferito il piano ad un sistema di assi cartesiani $Oxy$, si consideri l'insieme

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 4, \quad (x-2)^2 + y^2 \geq 4\right\}.$$

- Sia $Or\theta$ un sistema di coordinate polari in cui l'asse polare coincide con il semiasse positivo dell'asse $x$. Scrivere $D$ in queste nuove coordinate;
- Disegnare $\partial D$ e calcolare $\displaystyle\int_{\partial D} \min\{x^2, 3y^2\}\mathrm{d}s$;
- Calcolare $\displaystyle\int_D \min\{x^2, 3y^2\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;
- Tracciare le linee di livello della funzione

$$f \colon (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \min\{x^2, 3y^2\} \in \mathbb{R};$$

- Determinare massimo e minimo assoluti di $f$ in $D$, indicando i punti estremanti.

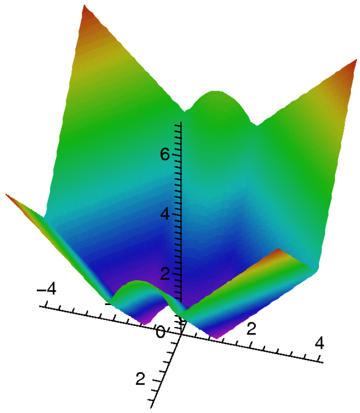
## 5.6. Sesto appello

**Primo Esercizio**

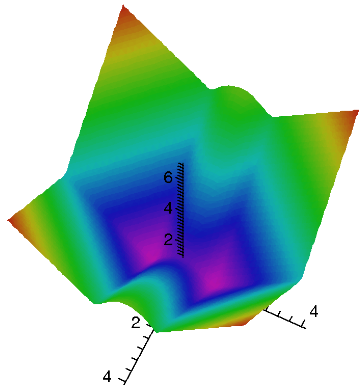
**Esercizio 5.6.1.** Si consideri l'equazione differenziale

$$x' = \exp(2x)\ln(t^2)$$

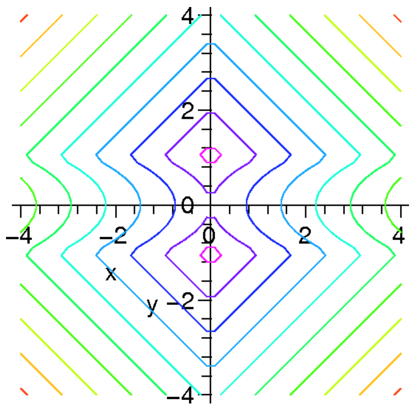
1. Di che tipo di equazione differenziale si tratta? Enunciare il Teorema di Cauchy per questo tipo di equazioni
2. Se $x \colon t \in I \mapsto x(t) \in \mathbb{R}$ è una sua qualsiasi soluzione definita anche per $t = 1$, cosa posso dire su $I$?




(a) Il grafico




(b) Il grafico da un'altra angolazione




(c) Le linee di livello

Figura 5.1: Grafico e linee di livello della funzione dell'esercizio 5.3.2

3. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x = \exp(2x)\ln(t^2) \\ x(1) = 0 \end{cases}$$

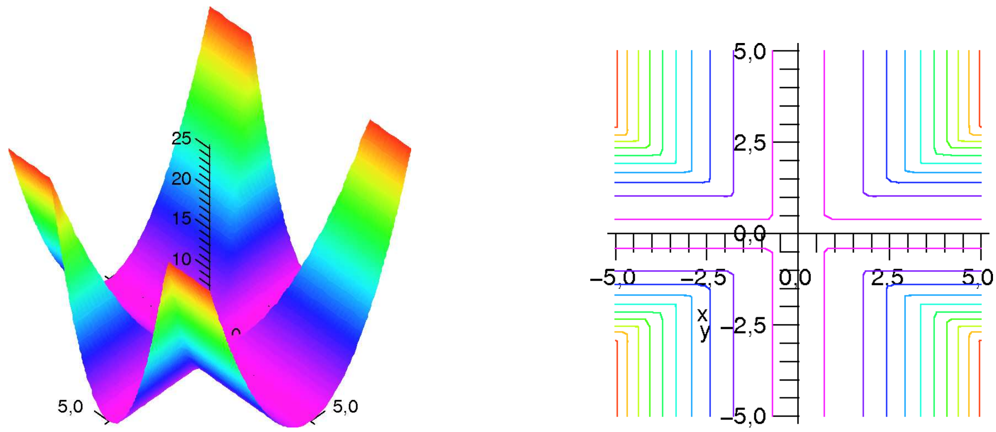
Se non è possibile esplicitare il dominio $J$ della soluzione, dire se $J$ è illimitato, limitato a destra, limitato a sinistra, se è aperto, se è chiuso.

### Secondo esercizio

**Esercizio 5.6.2.** Sul piano $Oxy$ si consideri l'insieme

$$E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 4, |y| \leq 1\right\}.$$

1. Disegnare $E$ e $\partial E$. Dire se si tratta di insiemi aperti, chiusi, connessi per archi, limitati.



(a) Il grafico

(b) Le linee di livello

Figura 5.2: Grafico e linee di livello della funzione dell'esercizio 5.5.3

2. Descrivere, sottoforma di una o più curve parametriche l'insieme $\partial E$.
3. Si consideri la funzione
$$f\colon (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto |x-1| + |y| \in \mathbb{R},$$
tracciare le linee di livello della funzione $f$ . Al variare di $c \in \mathbb{R}$, dire se la linea di livello $c$ della funzione $f$ è' connessa per archi.
4. Determinare l'insieme dei punti di $\mathbb{R}^2$ in cui $f$ non è differenziabile.
5. Determinare gli estremi di $f$ in $E$, ndicando i punti estremanti.
6. Calcolare $\iint_E (x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

### Terzo esercizio

**Esercizio 5.6.3.** Determinare l'insieme di convergenza della serie di potenze
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{n^2\, 3^n} t^{4n}.$$
Esplicitare la funzione somma della serie.

## 5.7. Settimo appello

### Primo esercizio

**Esercizio 5.7.1.** Si consideri l'equazione differenziale
$$x'(t) = x(t)\tan(t) + \sin(t)$$

1. Di che tipo di equazione differenziale si tratta? Se $x\colon t \in I \mapsto x(t) \in \mathbb{R}$ è una qualsiasi soluzione dell'equazione definita anche per $t = 3$ e che non ammette nessuna altra soluzione come propria estensione, chi è l'insieme $I$

2. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)\tan(t) + \sin(t) \\ x\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 \end{cases}$$

indicando esplicitamente il dominio della soluzione.

**Secondo esercizio**

**Esercizio 5.7.2.** Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una qualsiasi funzione definita su tutto $\mathbb{R}^2$ e sia $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ un punto fissato. Definire le seguenti nozioni

1. $f$ è continua in $(x_0, y_0)$
2. $f$ è derivabile in $(x_0, y_0)$
3. $f$ è differenziabile in $(x_0, y_0)$

Nel caso particolare in cui $f$ è la funzione di seguito definita

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. studiare la continuità di $f$ in $(0,0)$
2. studiare la derivabilità di $f$ in $(0,0)$
3. studiare la differenziabilità di $f$ in $(0,0)$

**Terzo esercizio**

**Esercizio 5.7.3.** Sia $Oxyz$ un sistema di coordinate cartesiane ortogonali. Si consideri l'insieme

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon \ : y = 0,\ |z| \leq 1 - (x-2)^2\right\}.$$

1. Disegnare $E$ e $\partial E$ sul piano $y = 0$.
2. Descrivere $\partial E$ tramite una o più curve parametriche regolari
3. Supponiamo che $E$ rappresenti una lamina piana su cui è distribuito un materiale avente densità superficiale $\rho = x^2$ Calcolare la massa della lamina.

4. Si consideri l'insieme $D$ generato da $E$ con una rotazione completa attorno all'asse $z$: descrivere $D$ in un opportuno sistema di coordinate cilindriche

5. Calcolare il Volume di $D$

6. Calcolare l'Area di $\partial D$

# 6
# a.a. 2007-08

## 6.1. Prima prova intercorso, prima data

### Primo Esercizio

**Esercizio 6.1.1.** Al variare del parametro reale $\alpha$ si consideri la successione

$$a_n := \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) + \alpha\left(1 - \cos\left(\frac{3}{n}\right)\right)$$

1. Provare che $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$$

converge. Enunciare il/i criterio/i impiegato/i.

2. Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} n^2 a_n = 0$$

3. In corrispondenza di tale valore di $\alpha$ determinare l'insieme dei $\beta \in \mathbb{R}$ tali che la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{\beta} |a_n|$$

converge.

### Secondo esercizio

**Esercizio 6.1.2.** Sia $Oxyz$ un sistema di coordinate cartesiane ortogonali. Si consideri l'insieme

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon y = 0,\ (x-3)^2 + z^2 \leq 4,\ x \geq 4\right\}.$$

1. Disegnare $E$ e $\partial E$ sul piano $y = 0$.
2. Descrivere $\partial E$ in forma parametrica
3. Supponiamo che $E$ rappresenti una lamina piana su cui è distribuito un materiale avente densità superficiale $\rho = 1+|z|$. Calcolare la massa della lamina.
4. Si consideri l'insieme $D$ generato da $E$ con una rotazione completa attorno all'asse $z$.
5. Descrivere $D$ in un opportuno sistema di coordinate cilindriche
6. Calcolare il Volume di $D$
7. Calcolare l'Area di $\partial D$.

### Terzo esercizio

**Esercizio 6.1.3.** Si consideri la funzione

$$f(x, y) = |x| \ln(1 + y)$$

1. Determinare il dominio di $f$ in $\mathbb{R}^2$ e disegnarlo
2. Determinare l'insieme dei punti in cui $f$ non è derivabile
3. Determinare l'insieme dei punti in cui $f$ è derivabile ma non differenziabile

## 6.2. Prima prova intercorso, seconda data

### Primo Esercizio

**Esercizio 6.2.1.** Al variare del parametro reale $c$ si consideri la successione

$$an := \ln\left(1 + \frac{c}{n}\right) + \sqrt{1 + \frac{4}{n}} - 1 \quad n \geq 1$$

1. Determinare per quale/i valore/i di $c$ la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$$

converge.

2. Enunciare il/i criterio/i impiegato/i.

### Secondo esercizio

**Esercizio 6.2.2.** Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-2)}{3^n} y^{2n}$$

1. Determinare l'insieme di convergenza della serie

2. Esplicitare la funzione somma della serie.

### Terzo esercizio

**Esercizio 6.2.3.** Sia $Oxyz$ un sistema di coordinate cartesiane ortogonali. Si consideri l'insieme

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ : y = 0, \ |z| \leq 1 - (x-2)^2\right\}.$$

1. Disegnare $E$ e $\partial E$ sul piano $y = 0$.
2. Descrivere $\partial E$ tramite una o più curve parametriche regolari
3. Supponiamo che $E$ rappresenti una lamina piana su cui è distribuito un materiale avente densità superficiale $\rho = x^2$ Calcolare la massa della lamina.
4. Si consideri l'insieme $D$ generato da $E$ con una rotazione completa attorno all'asse $z$: descrivere $D$ in un opportuno sistema di coordinate cilindriche
5. Calcolare il Volume di $D$
6. Calcolare l'Area di $\partial D$

### Quarto esercizio

**Esercizio 6.2.4.** Al variare del parametro reale positivo $\alpha$ si consideri la funzione

$$f_\alpha(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x\,|y|^\alpha)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Studiare la continuità di $f$ in $(0, 0)$
2. Studiare la derivabilità di $f$ in $(0, 0)$
3. Studiare la differenziabilità di $f$ in $(0, 0)$

## 6.3. Primo appello

### Primo Esercizio

**Esercizio 6.3.1.** Al variare del parametro reale $\beta$ si consideri la successione

$$a_n = \sqrt{1 + \ln\left(1 + \frac{\beta}{n}\right)} - \exp\left(\frac{2}{n}\right), \quad n \geq 1.$$

1. Determinare per quali valori di $\beta$ la successione $b_n := n a_n$ converge
2. In corrispondenza di tale/i valore/i determinare per quali valori di $\gamma$ la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^\gamma a_n$$

converge

3. Enunciare il/i criterio/i impiegato/i

### Secondo esercizio

**Esercizio 6.3.2.** Sia $Oxy$ un sistema di coordinate cartesiane ortogonali. Si consideri l'insieme

$$E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \geq 0,\ |y| \leq \min\{x^2, 2x - x^2\}\right\}$$

1. Disegnare $E$ e $\partial E$
2. Determinare il baricentro di $E$
3. Scrivere $\partial E$ in forma parametrica e calcolarne la lunghezza
4. Determinare gli estremi assoluti in $E$ della funzione $f(x, y) = (x-2)^2 - |y|$
5. Sia $F = E \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \geq 0\}$. Calcolare il volume del solido che si ottiene da $F$ con una rotazione completa attorno all'asse $x$

### Terzo esercizio

**Esercizio 6.3.3.** Si consideri la funzione di due variabili reali $f(x, y) = 1 - |xy|$.
1. In quali punti $f$ è derivabile?
2. In quali punti $f$ è differenziabile?
3. Determinare gli estremi assoluti di $f$ nel cerchio centrato nell'origine e raggio 1.

### Quarto esercizio

**Esercizio 6.3.4.** Determinare l'insieme di convergenza $I$ della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 x^{2n}}{n+1}.$$

Determinare la funzione somma della serie

$$f \colon x \in I \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 x^{2n}}{n+1} \in \mathbb{R}.$$

## 6.4. Secondo appello

### Primo Esercizio

**Esercizio 6.4.1.** Al variare del parametro reale $\beta$ si consideri la successione

$$a_n = \cos\left(\ln\left(1 + \frac{\beta}{n}\right)\right) - \sqrt{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}, \quad n \geq 1.$$

1. Determinare per quali valori di $\beta$ la successione $b_n := n^3 a_n$ converge

2. In corrispondenza di tale/i valore/i determinare per quali valori di $\gamma$ la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^\gamma a_n$$

converge

3. Enunciare il/i criterio/i impiegato/i

**Secondo Esercizio**

**Esercizio 6.4.2.** Sia $Or\varphi$ un sistema di coordinate polari nel piano. Sia $\gamma$ la curva di equazione polare

$$r = 2\cos(2\varphi), \qquad \varphi \in \left[\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right].$$

1. Tracciare il sostegno di $\gamma$;
2. dire se si tratta di una curva regolare;
3. *esplicitare* la lunghezza di $\gamma$;
4. Sia $E$ la regione di piano delimitata da $\gamma$

a) calcolare l'area di $E$;

b) determinare le coordinate del baricentro di $E$;

c) determinare il volume del solido generato da $E$ con una rotazione completa attorno alla retta del piano perpendicolare all'asse polare;

5. dopo aver introdotto sul medesimo piano un opportuno sistema di coordinate cartesiane $Oxy$, scrivere l'equazione della retta tangente al sostegno di $\gamma$ nel punto di coordinate polari $\left(r\left(\frac{\pi}{6}\right), \frac{\pi}{6}\right)$.

**Terzo Esercizio**

**Esercizio 6.4.3.** Si consideri la funzione di due variabili reali

$$f\colon (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \sqrt{|x^2 + xy|} \in \mathbb{R}.$$

1. In quali punti $f$ è derivabile?
2. In quali punti $f$ è differenziabile?
3. Determinare gli estremi assoluti di $f$ nel cerchio centrato nell'origine e raggio 1.

**Quarto Esercizio**

**Esercizio 6.4.4.** Determinare l'insieme di convergenza $I$ della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n(n-1)}{n(n+1)} x^{2n}.$$

Determinare la funzione somma della serie

$$f\colon x \in I \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n(n-1)}{n(n+1)} x^{2n} \in \mathbb{R}.$$

### 6.5. Terzo appello

#### Primo Esercizio

**Esercizio 6.5.1.** Al variare del parametro reale $a \neq 0$, si consideri la successione $\{c_n\}$ definita da

$$c_n = \sqrt[a]{1 + \frac{1}{n}} - \ln\left(1 + \frac{a}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

1. Determinare, se esiste, $b = b(a) \in \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{n^b}$$

esiste finito ed è diverso da zero.

2. Determinare per quali valori del parametro $a$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ è convergente.

#### Secondo esercizio

**Esercizio 6.5.2.** Dopo aver riferito lo spazio ad un sistema di assi cartesiani ortogonali $Oxyz$, si consideri la regione

$$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1\right\}$$

1. Disegnare ed identificare $D$
2. Supponiamo che in $D$ sia distribuita una massa con densità

$$d(x, y, z) = x(1 + z) + x^2|x|.$$

a) Calcolare la massa di $D$
b) Determinare le coordinate del baricentro di $D$

#### Terzo esercizio

**Esercizio 6.5.3.** Si consideri la funzione di due variabili reali $f(x, y) = |y| \ln(1+ x^2 + y^2)$.
1. In quali punti $f$ è derivabile?
2. In quali punti $f$ è differenziabile?
3. Determinare gli estremi assoluti di $f$ nel cerchio centrato nell'origine e raggio 1.

### Quarto esercizio

**Esercizio 6.5.4.** Determinare l'insieme di convergenza $I$ della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n(n-2)}{n+1}\sqrt{x^n}.$$

Determinare la funzione somma della serie

$$f\colon x \in I \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n(n-2)}{n+1}\sqrt{x^n} \in \mathbb{R}.$$

## 6.6. Quarto appello

### Primo esercizio

**Esercizio 6.6.1.** Al variare dei parametri reali $\alpha$ e $\beta$ si consideri la successione

$$a_n = \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{n^2} + \left(\frac{\alpha}{n}+1\right)^{\frac{1}{n}} - \cos\left(\frac{\beta}{n}\right), \quad n \geq 1.$$

1. Determinare, se esistono, i valori dei parametri $\alpha$ e $\beta$ per i quali la successione $b_n := n^3 a_n$ non converge
2. Determinare, se esistono, i i valori dei parametri $\alpha$ e $\beta$ per i quali la successione $b_n := n^3 a_n$ converge ad un reale non nullo
3. Determinare, se esistono, i valori dei parametri $\alpha$ e $\beta$ per i quali la successione $b_n := n^3 a_n$ converge a 0
4. Siano $\alpha$ e $\beta$ tali che la successione $b_n$ non converge. Determinare per quali valori del parametro reale $\gamma$ la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^\gamma b_n$$

converge

### Secondo esercizio

**Esercizio 6.6.2.** Sia $Oxy$ un sistema di coordinate cartesiane ortogonali. Si consideri l'insieme

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\ 0 \leq y \leq \min\{x, 2x - x^2\}\right\}$$

1. Disegnare $E$ e $\partial E$
2. Calcolare $\int_{\partial E^+} (\mathrm{e}^x - y)\mathrm{d}x + (y^2 - \ln(1+x))\mathrm{d}y$
3. Tracciare gli insiemi di livello della funzione

$$f\colon (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto |x-2| + (y-1)^2$$

4. Determinare gli estremi assoluti in $f|_E$
5. Calcolare $\iint_E f$
6. Calcolare $\int_{\partial E} f$

## Terzo esercizio

**Esercizio 6.6.3.** Si consideri la funzione

$$f\colon (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \sqrt{|x^2 - y^2|} \in \mathbb{R}.$$

1. In quali punti $f$ è derivabile?
2. In quali punti $f$ è differenziabile?
3. Determinare gli estremi assoluti di $f$ nel cerchio centrato nell'origine e raggio 1.