TEST D'IPOTESI

Note Title 27/11/2017

Si formula un'ipotesi detta IPOTESI NULLA (H_0), si stabilisce se è come accettabile in base ai dati.

- IPOTESI PARAMETRICHE: si suppone di conoscere il tipo di distribuzione del campione a meno di uno o più parametri reali. Se indico con θ lo scalare (o il vettore) che rappresenta i parametri incogniti, l'ipotesi nulla sarà un'ipotesi del tipo

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \subseteq \Theta$$

dove Θ è la regione dei valori ammissibili per il parametro e Θ_0 un suo sottoinsieme.

$\theta = (\mu, \sigma^2) \in \Theta = \mathbb{R} \times (0, +\infty)$

IPOTESI NON PARAMETRICHE

Sono ipotesi sul tipo di distribuzione

H_0 : il campione è gaussiano

oppure

H_0 : il campione è gaussiano con valore atteso 0

H_0 : la legge del campione $F(t) \in \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$
dove $\mathcal{F}$ è una classe ammissibile di leggi

Se Θ_0 (o $\mathcal{F}_0$) è un singoletto, l'ipotesi nulla si dice IPOTESI SEMPLICE. Altrimenti si dice IPOTESI COMPOSTA

1. Si definisce l'insieme delle distribuzioni compatibili con il campione
2. Si definisce l'ipotesi nulla H_0 da testare
3. Si definisce l'ipotesi alternativa (H_A) che considero valida quando rifiuto H_0

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \subset \Theta \Rightarrow H_A : \theta \in \Theta \setminus \Theta_0$$

$$H_0 : F \in \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow H_A : F \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_0$$

4. Si definisce una statistica cioè una funzione $f_0(X_1, \_\_ X_n)$ che abbia distribuzione nota quando H_0 è vera
5. Si suddivide lo spazio delle possibili osservazioni, $\mathcal{G}$ in due insiemi disgiunti
   $\mathcal{A}$, detto regione di accettazione
   $\mathcal{C}$, detto regione critica o regione di rifiuto
6. Stabilisco il criterio decisionale
   Accetto H_0 se $f_0(x_1 \_ x_n) \in \mathcal{A}$
   Rifiuto H_0 se $f_0(x_1 \_ x_n) \in \mathcal{C}$

Diciamo che commettiamo ERRORE DI 1ª SPECIE se rifiutiamo (in base ai dati) l'ipotesi nulla H_0 quando essa in realtà è vera.
La probabilità di commettere errore di 1ª specie è dunque

$$\alpha = \mathbb{P}(f_0(X_1 \_ X_n) \in \mathcal{C} \mid H_0 \text{ è vera})$$

e si dice LIVELLO DI SIGNIFICATIVITÀ DEL TEST
$1-\alpha$ è detto LIVELLO DI FIDUCIA DEL TEST
Diciamo che commettiamo ERRORE DI 2ª SPECIE se accettiamo (in base ai dati, $f_0(x_1 \_ x_n) \in \mathcal{A}$) l'ipotesi nulla quando essa in realtà è falsa.
La probabilità di commettere errore di 2ª specie è

$$\beta = \mathbb{P}(f_0(X_1 \_\_ X_n) \in \mathcal{A} \mid H_0 \text{ è falsa})$$

$1-\beta$ è detto POTENZA DEL TEST.

— o —

TEST D'IPOTESI SU CAMPIONI GAUSSIANI

1° CASO Faccio un Test sul valore atteso, con σ^2 nota.

1) TEST BIDIREZIONALE

$H_0: \mu = \mu_0$

$H_A: \mu \neq \mu_0$

Accetto H_0 se $|\bar{x} - \mu_0| < \varepsilon$

$$\alpha = \mathbb{P}(|\bar{X} - \mu_0| \geq \varepsilon \mid \mu = \mu_0) = \leftarrow$$

Se $\mathbb{P}_{X_i} = N(\mu_0, \sigma^2)$. $\quad \mathbb{P}_{\bar{X}} = N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

$\dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ ha distribuzione $N(0,1)$

$$\alpha = \mathbb{P}(|\bar{X} - \mu_0| \geq \varepsilon \mid \mu = \mu_0) = \mathbb{P}\left(\left|\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \geq \frac{\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}} \,\Big|\, \mu = \mu_0\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(|Z| \geq \varepsilon \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right) = \mathbb{P}\left(Z \geq \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) + \mathbb{P}\left(Z < \frac{-\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$

$$= 1 - \mathbb{P}\left(Z < \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) + \mathbb{P}\left(Z < \frac{-\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) =$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{-\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) =$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$

$$\alpha = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right)\right) \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma} = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \qquad \varepsilon = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}$$

Accetto H_0 se $|\bar{x} - \mu_0| < \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

Rifiuto H_0 se $|\bar{x} - \mu_0| \geq \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

$$\mathcal{A} = \left\{ (x_1 \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n : \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i - \mu_0 \right| < \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right\}$$

$$\mathcal{C} = \left\{ (x_1 \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n : \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i - \mu_0 \right| \geq \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right\}$$

— o —

$$\mu \neq \mu_0 \quad \beta(\mu) = \mathbb{P}\left(\bar{X} \in \mathcal{A} \mid \mathbb{E}[X_i] = \mu \neq \mu_0 \right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(|\bar{X} - \mu_0| < \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} \mid \mathbb{E}[X_i] = \mu \right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(\mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \bar{X} < \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} \mid \mathbb{E}[X_i] = \mu \right) =$$

Se $\mathbb{E}[X_i] = \mu \Rightarrow \mathbb{P}_{X_i} = N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \mathbb{P}_{\bar{X}} = N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

$$= \mathbb{P}\left(\mu_0 - \mu - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \bar{X} - \mu < \mu_0 - \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2} \mid \mathbb{E}[X_i] = \mu \right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{\mu_0 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\mu_0 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \mid \mathbb{E}[X_i] = \mu \right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{\mu_0 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} < Z < \frac{\mu_0 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) - \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) \leftarrow$$

1° CASO $\mu > \mu_0$ 2° CASO $\mu < \mu_0$

$$\mu > \mu_0 \Rightarrow \mu_0 - \mu < 0 \quad \frac{\mu_0 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} < -z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{\alpha/2}$$

$$\Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) < \Phi\left(z_{\frac{\alpha}{2}} \right) = \frac{\alpha}{2}$$

La probabilità di commettere errore di 2° specie

$$\beta(\mu) \sim \Phi\left(\frac{\mu_0-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \qquad \mu > \mu_0$$

$\mu < \mu_0$

$$\beta(\mu) = 1 - \Phi\left(\frac{\mu-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{\mu-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{\mu-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) - \Phi\left(\frac{\mu-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$$

$$\mu < \mu_0 \Rightarrow \frac{\mu-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} < -z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{\alpha/2}$$

$$\Phi\left(\frac{\mu-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) < \Phi\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{\alpha}{2}$$

$$\beta(\mu) \sim \Phi\left(\frac{\mu-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$$

$$\beta(\mu) \sim \Phi\left(\frac{-|\mu-\mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \leq \Phi\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

TEST UNILATERALE SUPERIORE

$H_0: \mu = \mu_0$

$H_A: \mu > \mu_0$

Accetto H_0 se $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i < \mu_0 + \varepsilon$

$$\alpha = \mathbb{P}\left(\bar{X} \geq \mu_0 + \varepsilon \mid \mu = \mu_0\right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \frac{\cancel{\mu_0} + \varepsilon - \cancel{\mu_0}}{\sigma/\sqrt{n}} \,\middle|\, \mu = \mu_0\right) = \mathbb{P}\left(Z \geq \frac{\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}}\right) =$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \iff \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

$$\iff \frac{\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}} = z_{1-\alpha} \iff \varepsilon = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}$$

$$\mathcal{A} = \left\{ (x_1 \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i < \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha} + \mu_0 \right\}$$

$$\mathcal{C} = \left\{ (x_1 \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \geq \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha} + \mu_0 \right\}$$

Se $\mathbb{E}[X_i] = \mu > \mu_0$ (cioè H_0 falsa, H_A vera)

$$\beta(\mu) = \mathbb{P}(\overline{X} \in \mathcal{A} \mid \mathbb{E}[X_i] = \mu) = \mathbb{P}\left(\overline{X} < \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha} \mid \mathbb{E}[X_i] = \mu\right)$$

Se $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ $\quad \mathbb{P}_{X_i} = N(\mu, \sigma^2)$ $\quad \mathbb{P}_{\overline{X}} = N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

$$\beta(\mu) = \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \mid \mathbb{E}[X_i] = \mu \right)$$

$$= \mathbb{P}\left(Z < \frac{\mu_0 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} + z_{1-\alpha} \right) = \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} + z_{1-\alpha} \right)$$

$\mu_0 - \mu < 0$ perché è vera H_A $\quad \beta(\mu) < \Phi(z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$

TEST UNILATERALE

$H_0 : \mu \leq \mu_0$

$H_A : \mu > \mu_0$

Accetto l'ipotesi nulla H_0 se $\bar{x} \leq \mu_0 + \varepsilon$

Rifiuto H_0 se $\bar{x} > \mu_0 + \varepsilon$

$$\mathbb{P}(\overline{X} > \mu_0 + \varepsilon \mid \mathbb{E}[X_i] \leq \mu_0)$$

$$\alpha(\mu) = \mathbb{P}(\overline{X} > \mu_0 + \varepsilon \mid \mathbb{E}[X_i] = \mu \leq \mu_0) =$$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{\mu_0+\varepsilon-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \,\middle|\, \mathbb{E}[X_i]=\mu \le \mu_0 \right)$$

$$= \mathbb{P}\left(Z > \frac{\mu_0+\varepsilon-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \right) = 1 - \Phi\left(\frac{\mu_0-\mu+\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}} \right)$$

$$\mu \le \mu_0 \qquad \frac{\mu_0-\mu+\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \frac{\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}} \qquad \Phi\left(\frac{\mu_0-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \geq \Phi\left(\varepsilon/_{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

$$\forall \mu \le \mu_0 \qquad \alpha(\mu) \le 1 - \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \alpha$$

$$\Leftarrow \quad \frac{\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}} = z_{1-\alpha} \qquad \varepsilon = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}$$

TEST UNILATERALE $\qquad H_0 : \mu = \mu_0$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad H_A : \mu < \mu_0$

Accetto H_0 se $\overline{x} > \mu_0 - \varepsilon$

$$\alpha = \mathbb{P}\left(\overline{X} \le \mu_0 - \varepsilon \,\middle|\, \mu = \mu_0 \right) = \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \le \frac{\mu_0-\varepsilon-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \,\middle|\, \mu=\mu_0 \right)$$

$$= \mathbb{P}\left(Z \le \frac{-\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}} \right) = \Phi\left(\frac{-\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}} \right)$$

$$\frac{-\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}} = z_\alpha \qquad -\varepsilon = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\alpha \qquad \varepsilon = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}$$

TEST PER IL VALORE ATTESO DI CAMPIONI GAUSSIANI QUANDO σ^2 È IGNOTA

$H_0: \mu = \mu_0$

$H_A: \mu \neq \mu_0$

$X_1 \text{—} X_n$ gaussiane $N(\mu_0, \sigma^2)$

$\Rightarrow T = \dfrac{(\overline{X}-\mu_0)\sqrt{n}}{\sqrt{S^2}}$ ha distribuzione $t(n-1)$

Se H_0 è vera $\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}\left[(\overline{X}-\mu_0)\sqrt{n} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{S^2}}\right] =$

$$= \mathbb{E}[(\overline{X}-\mu_0)\sqrt{n}]\ \underbrace{\mathbb{E}\left[\frac{1}{\sqrt{S^2}}\right]}_{>0} = \mathbb{E}\left[\frac{1}{\sqrt{S^2}}\right]\sqrt{n}\left(\mathbb{E}[\overline{X}]-\mu_0\right)$$

$\mathbb{E}[T] = 0$ SSE $\mathbb{E}[\overline{X}] = \mu_0 \iff \mu = \mu_0$

$\Rightarrow$ Accetto H_0 se $t = \dfrac{(\overline{x}-\mu_0)\sqrt{n}}{\sqrt{s^2}}$ non è lontano da 0

cioè se $|t| < \varepsilon$

Accetto H_0 se $|t| < \varepsilon$

Rifiuto H_0 se $|t| \geq \varepsilon$

$\alpha = \mathbb{P}(|T| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(T \geq \varepsilon) + \mathbb{P}(T \leq -\varepsilon) =$

$= 1 - \mathbb{P}(T \leq \varepsilon) + \mathbb{P}(T \leq -\varepsilon) =$

$= 1 - F_T(\varepsilon) + F_T(-\varepsilon) = 2(1 - F_T(\varepsilon))$

$1 - F_T(\varepsilon) = \dfrac{\alpha}{2}$ $\quad F_T(\varepsilon) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$ $\quad \varepsilon = t_{n-1,\, 1-\frac{\alpha}{2}}$

Accetto H_0 se $\left|\dfrac{(\overline{x}-\mu_0)\sqrt{n}}{\sqrt{s^2}}\right| < t_{n-1,\, 1-\frac{\alpha}{2}}$

TEST UNILATERALI

$H_0: \mu = \mu_0$

$H_A: \mu > \mu_0$

Se H_0 è vera $\Rightarrow T = \frac{(\overline{X} - \mu_0)\sqrt{n}}{\sqrt{S^2}}$ ha distribuzione $t(n-1)$

Accetto H_0 se $t < \varepsilon$

Rifiuto H_0 se $t \geq \varepsilon$

$\alpha = \mathbb{P}(T \geq \varepsilon) = 1 - F_T(\varepsilon) \qquad F_T(\varepsilon) = 1 - \alpha$

$\iff \varepsilon = t_{n-1,\, 1-\alpha}$

Tesi $H_0: \mu \leq \mu_0$

$H_A: \mu > \mu_0$

Se $X_1 \dots X_n$ ha distribuzione $N(\mu, \sigma^2)$ $\mu \leq \mu_0$

$\Rightarrow T = \frac{(\overline{X} - \mu)\sqrt{n}}{\sqrt{S^2}}$ ha distribuzione $t(n-1) \Rightarrow \mathbb{E}[T] = 0$

$$0 = \mathbb{E}[T] = \mathbb{E}\left[\frac{(\overline{X} - \mu)\sqrt{n}}{\sqrt{S^2}}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{(\overline{X} - \mu_0 + \mu_0 - \mu)\sqrt{n}}{\sqrt{S^2}}\right] =$$

$$= \mathbb{E}\left[\frac{(\overline{X} - \mu_0)\sqrt{n}}{\sqrt{S^2}} + \frac{(\mu_0 - \mu)\sqrt{n}}{\sqrt{S^2}}\right] =$$

$$= \mathbb{E}\left[\frac{(\overline{X} - \mu_0)\sqrt{n}}{\sqrt{S^2}}\right] + \underbrace{(\mu_0 - \mu)}_{\geq 0}\sqrt{n}\, \underbrace{\mathbb{E}\left[\frac{1}{\sqrt{S^2}}\right]}_{>}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}\left[\frac{(\overline{X} - \mu_0)\sqrt{n}}{\sqrt{S^2}}\right] \leq 0$$

Accetto H_0 se $\frac{(\overline{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{\sqrt{S^2}} < \varepsilon$

$$\mathbb{P}\left(\frac{(\bar{X}-\mu_0)\sqrt{n}}{\sqrt{S^2}} \geq \varepsilon \;\middle|\; \mu \leq \mu_0\right)$$

Supponiamo che $\mathbb{E}[X_i] = \mu \leq \mu_0$

$$\alpha(\mu) = \mathbb{P}\left(\frac{(\bar{X}-\mu_0)\sqrt{n}}{\sqrt{S^2}} \geq \varepsilon \;\middle|\; \mathbb{E}[X_i] = \mu\right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{(\bar{X}-\mu+\mu-\mu_0)\sqrt{n}}{\sqrt{S^2}} \geq \varepsilon \;\middle|\; \mathbb{E}[X_i] = \mu\right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(T + \underbrace{\frac{(\mu-\mu_0)\sqrt{n}}{\sqrt{S^2}}}_{\leq 0} \geq \varepsilon\right) \leq \mathbb{P}(T \geq \varepsilon) = 1 - F_T(\varepsilon) = \alpha$$

$\Rightarrow$ Scelgo ε t.c. $F_T(\varepsilon) = 1-\alpha$ cioè $\varepsilon = t_{n-1, 1-\alpha}$

— o —

$H_0: \mu = \mu_0$

$H_A: \mu < \mu_0$

Accetto H_0 se $\dfrac{(\bar{x}-\mu_0)\sqrt{n}}{\sqrt{s^2}} > -\varepsilon$

$$\mathbb{P}\left(\frac{(\bar{X}-\mu_0)\sqrt{n}}{\sqrt{S^2}} \leq -\varepsilon \;\middle|\; \mu = \mu_0\right) = \mathbb{P}(T \leq -\varepsilon) = \alpha$$

sse $F_T(-\varepsilon) = \alpha \iff -\varepsilon = t_{n-1,\alpha} \iff \varepsilon = t_{n-1, 1-\alpha}$

Accetto H_0 sse $\dfrac{(\bar{x}-\mu_0)\sqrt{n}}{\sqrt{s^2}} > -t_{n-1, 1-\alpha}$

H_0 $\mu \geq \mu_0$

H_A $\mu < \mu_0$

Se $\mathbb{E}[X_i] = \mu \geq \mu_0$ $\quad T = \dfrac{(\bar{X}-\mu)\sqrt{n}}{\sqrt{S^2}}$ ha distribuzione $t(n-1)$

$$0 = \mathbb{E}[T] = \mathbb{E}\left[\frac{(\bar{X}-\mu)\sqrt{n}}{\sqrt{S^2}}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{((\bar{X}-\mu_0)+\mu_0-\mu)\sqrt{n}}{\sqrt{S^2}}\right]$$

$$= \underbrace{\mathbb{E}\left[\frac{(\bar{X}-\mu_0)\sqrt{n}}{\sqrt{S^2}}\right]}_{\geq 0} + \underbrace{(\mu_0-\mu)\sqrt{n}\,\mathbb{E}\left[\frac{1}{\sqrt{S^2}}\right]}_{\leq 0}$$

Accetto H_0 sse $\dfrac{(\bar{x}-\mu_0)\sqrt{n}}{\sqrt{s^2}} > -\varepsilon$

$$\alpha(\mu) = \mathbb{P}\left(\frac{(\bar{X}-\mu_0)\sqrt{n}}{\sqrt{S^2}} \leq -\varepsilon \,\middle|\, \mathbb{E}[X_i] = \mu \leq \mu_0\right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{(\bar{X}-\mu+\mu-\mu_0)\sqrt{n}}{\sqrt{S^2}} \leq -\varepsilon \,\middle|\, \mathbb{E}[X_i] = \mu \leq \mu_0\right)$$

$$= \mathbb{P}\Bigg(T + \underbrace{\frac{(\mu-\mu_0)\sqrt{n}}{\sqrt{S^2}}}_{\geq 0} \leq -\varepsilon\Bigg) \leq \mathbb{P}(T \leq -\varepsilon) = F_T(-\varepsilon) = \alpha$$

$$\iff -\varepsilon = t_{n-1,\alpha}$$

cioè $\varepsilon = t_{n-1,1-\alpha}$

Accetto H_0 sse $\dfrac{(\bar{x}-\mu_0)\sqrt{n}}{\sqrt{s^2}} > -t_{n-1,1-\alpha}$

TEST D' IPOTESI SULLA VARIANZA DI UN CAMPIONE GAUSSIANO

$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$

$H_A : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

$V := \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ ha distribuzione χ^2_{n-1} se e solo se $\sigma^2 = \sigma_0^2$

$\mathbb{E}[S^2] = \sigma_0^2$ sse $\sigma^2 = \sigma_0^2$

$\sigma^2 = \sigma_0^2$ sse $\mathbb{E}\left[\dfrac{S^2}{\sigma_0^2}\right] = 1$

Accetto H_0 se $1-\varepsilon_1 \leq \frac{S^2}{\sigma_0^2} \leq 1+\varepsilon_2$

$$\alpha = \mathbb{P}\left(\frac{S^2}{\sigma_0^2} > 1+\varepsilon_2 \vee \frac{S^2}{\sigma_0^2} < 1-\varepsilon_1 \,\middle|\, \sigma^2 = \sigma_0^2 \right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{S^2}{\sigma_0^2} > 1+\varepsilon_2 \,\middle|\, \sigma^2=\sigma_0^2 \right) + \mathbb{P}\left(\frac{S^2}{\sigma_0^2} < 1-\varepsilon_1 \,\middle|\, \sigma^2 = \sigma_0^2 \right)$$

$$= \mathbb{P}\left(V > (n-1)(1+\varepsilon_2) \right) + \mathbb{P}\left(V < (n-1)(1-\varepsilon_1) \right)$$

Impongo $\begin{cases} \mathbb{P}\left(V > (n-1)(1+\varepsilon_2) \right) = \frac{\alpha}{2} \\ \mathbb{P}\left(V < (n-1)(1-\varepsilon_1) \right) = \frac{\alpha}{2} \end{cases}$

$$\begin{cases} 1 - F_V\left((n-1)(1+\varepsilon_2) \right) = \frac{\alpha}{2} \\ F_V\left((n-1)(1-\varepsilon_1) \right) = \frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

$$(n-1)(1+\varepsilon_2) = \chi^2_{n-1,\, 1-\frac{\alpha}{2}}$$
$$(n-1)(1-\varepsilon_1) = \chi^2_{n-1,\, \frac{\alpha}{2}}$$

$$1+\varepsilon_2 = \frac{\chi^2_{n-1,\, 1-\frac{\alpha}{2}}}{n-1} \qquad 1-\varepsilon_1 = \frac{\chi^2_{n-1,\, \frac{\alpha}{2}}}{n-1}$$

Accetto H_0 sse $\frac{\chi^2_{n-1,\, \frac{\alpha}{2}}}{n-1} < \frac{S^2}{\sigma_0^2} < \frac{\chi^2_{n-1,\, 1-\frac{\alpha}{2}}}{n-1}$

— o —

$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$

$H_A : \sigma^2 > \sigma_0^2$

Accetto H_0 sse $\frac{S^2}{\sigma_0^2} < 1+\varepsilon$

$$\alpha = \mathbb{P}\left(\frac{S^2}{\sigma_0^2} \geq 1+\varepsilon \,\middle|\, \sigma^2 = \sigma_0^2 \right) = \mathbb{P}\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \geq (n-1)(1+\varepsilon) \,\middle|\, \sigma^2 = \sigma_0^2 \right)$$

$= \mathbb{P}(V \geq (n-1)(1+\varepsilon)) = 1 - F_V((n-1)(1+\varepsilon))$

$\Rightarrow$ Scelgo $F_V((n-1)(1+\varepsilon)) = 1-\alpha$ cioè $(n-1)(1+\varepsilon) = \chi^2_{n-1,1-\alpha}$

cioè $1+\varepsilon = \dfrac{\chi^2_{n-1,1-\alpha}}{n-1}$

Accetto H_0 se e solo se $\dfrac{S^2}{\sigma_0^2} < \dfrac{\chi^2_{n-1,1-\alpha}}{n-1}$

— o —

$H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2$

$H_A: \sigma^2 > \sigma_0^2$

Se la varianza del campione è un certo $\sigma^2 \leq \sigma_0^2$

$$\mathbb{E}\left[\frac{S^2}{\sigma_0^2}\right] = \frac{1}{\sigma_0^2}\mathbb{E}[S^2] = \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2} \leq 1$$

Accetto H_0 se e solo $\dfrac{S^2}{\sigma_0^2} \leq 1+\varepsilon$

$$\alpha(\sigma^2) = \mathbb{P}\left(\frac{S^2}{\sigma_0^2} > 1+\varepsilon \;\middle|\; Var[X_i] = \sigma^2 \leq \sigma_0^2\right) =$$

$V = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ ha distribuzione χ^2_{n-1}

$$= \mathbb{P}\left(\underbrace{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}}\frac{\sigma^2}{\sigma_0^2} > (n-1)(1+\varepsilon) \;\middle|\; Var[X_i] = \sigma^2 \leq \sigma_0^2\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(V > \underbrace{\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}}_{\geq 1}(n-1)(1+\varepsilon)\right) = 1 - F_V\left(\underbrace{\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}(n-1)(1+\varepsilon)}_{\geq (n-1)(1+\varepsilon)}\right)$$

$$\leq 1 - F_V((n-1)(1+\varepsilon)) = \alpha$$

$$F_V((n-1)(1+\varepsilon)) = 1-\alpha \qquad 1+\varepsilon = \frac{\chi^2_{n-1,1-\alpha}}{n-1}$$

Accetto H_0 $\sigma^2 \leq \sigma_0^2$ SSE $\dfrac{s^2}{\sigma_0^2} < \dfrac{\chi^2_{n-1,1-\alpha}}{n-1}$

— o —

H_0 $\sigma^2 = \sigma_0^2$

H_A $\sigma^2 < \sigma_0^2$

Accetto H_0 $\dfrac{s^2}{\sigma_0^2} > 1-\varepsilon$ Rifiuto H_0 se $\dfrac{s^2}{\sigma_0^2} \leq 1-\varepsilon$

$$\mathbb{P}\left(\frac{S^2}{\sigma_0^2} \leq 1-\varepsilon \,\middle|\, \sigma^2 = \sigma_0^2 \right) = \mathbb{P}\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \leq (n-1)(1-\varepsilon) \,\middle|\, \sigma^2 = \sigma_0^2 \right)$$

$$= \mathbb{P}\left(V \leq (n-1)(1-\varepsilon) \right) = F_V\left((n-1)(1-\varepsilon) \right) = \alpha$$

$$\Leftrightarrow \quad (n-1)(1-\varepsilon) = \chi^2_{n-1,\alpha} \qquad 1-\varepsilon = \frac{\chi^2_{n-1,\alpha}}{n-1}$$

Accetto H_0 se $\dfrac{s^2}{\sigma_0^2} > \dfrac{\chi^2_{n-1,\alpha}}{n-1}$

rifiuto H_0 se $\dfrac{s^2}{\sigma_0^2} \leq \dfrac{\chi^2_{n-1,\alpha}}{n-1}$

— o —

H_0 : $\sigma^2 \geq \sigma_0^2$

H_A : $\sigma^2 < \sigma_0^2$

In analogia al caso simmetrico accetto H_0 se $\dfrac{s^2}{\sigma_0^2} > 1-\varepsilon$

Se $Var[X_i] = \sigma^2 \geq \sigma_0^2$

$$\alpha(\sigma) = \mathbb{P}\left(\frac{S^2}{\sigma_0^2} \leq 1-\varepsilon \,\middle|\, Var[X_i] = \sigma^2 \geq \sigma_0^2 \right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \, \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2} \leq (n-1)(1-\varepsilon) \,\middle|\, Var[X_i] = \sigma^2 \geq \sigma_0^2 \right)$$

$$= \mathbb{P}\left(V \le \underbrace{\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}}_{\le 1}(n-1)(1-\varepsilon)\right) = F_V\left(\underbrace{\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}(n-1)(1-\varepsilon)}_{\le (n-1)(1-\varepsilon)}\right)$$

$$\le F_V\big((n-1)(1-\varepsilon)\big) = \alpha$$

$$\Leftrightarrow (n-1)(1-\varepsilon) = \chi^2_{n-1,\alpha} \qquad 1-\varepsilon = \frac{\chi^2_{n-1,\alpha}}{n-1}$$

Accetto H_0 se $\dfrac{S^2}{\sigma_0^2} > \dfrac{\chi^2_{n-1,\alpha}}{n-1}$

rifiuto H_0 se $\dfrac{S^2}{\sigma_0^2} \le \dfrac{\chi^2_{n-1,\alpha}}{n-1}$