Stimatori, quantili, intervalli di confidenza. Introduzione Test d'ipotesi

Note Title 23/11/2017

$x_1 \dots x_n \quad g(x,\theta) \qquad X_1 \_\_\_ X_n$

$f(x_1 \_ x_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} g(x_i, \theta)$

DISTRIBUZIONE GAUSSIANA

$$g(x \mid \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$f(x_1 \_ x_n \mid \mu, \sigma^2) \qquad \log f(x_1 \_ x_n \mid \mu, \sigma^2) =$

$$\log \prod_{i=1}^{n} g(x_i \mid \mu, \sigma^2) = \sum_{i=1}^{n} \log\left((2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\left(\frac{-(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2} \right) \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\log (2\pi)^{-1/2} + \log(\sigma^2)^{-1/2} + \frac{-(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2} \right) =$$

$\log x^\alpha = \alpha \log x$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{1}{2} \log(2\pi) - \log \sigma - \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2} \right) =$$

$$= -\frac{n}{2} \log(2\pi) - n \log \sigma - \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \mu} \log f = +\dfrac{1}{\cancel{2}\sigma^2} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \cancel{2}(x_i-\mu) = \dfrac{1}{\sigma^2}\left(n\bar{x} - n\mu \right) = \dfrac{n}{\sigma^2}(\bar{x}-\mu) \\ \dfrac{\partial}{\partial \sigma} \log f = \dfrac{-n}{\sigma} + \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x_i-\mu)^2 \right) \cdot \dfrac{1}{\cancel{2}} \cancel{2} \dfrac{1}{\sigma^3} = \\ \qquad = \dfrac{1}{\sigma^3}\left(-n\sigma^2 + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x_i-\mu)^2 \right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \nabla \log f = (0, 0) \iff \begin{cases} \mu = \bar{x} \\ \sigma^2 = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \end{cases}$$

Gli stimatori di massima verosimiglianza sono la media campionaria $\bar{X}$ per il parametro μ

$\frac{n-1}{n} S^2$ per il parametro σ^2

DISTRIBUZIONE UNIFORME SU UN INTERVALLO

$$g(x|a,b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a,b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$f(x_1 \ldots x_n|a,b) = \prod_{i=1}^{n} g(x_i|a,b) = \begin{cases} 0 & \text{se } \exists i \text{ t.c. } x_i \notin [a,b] \\ \frac{1}{(b-a)^n} & \text{se } x_i \in [a,b] \ \forall i=1 \ldots n \end{cases}$$

$a \le x_i \ \forall i \qquad b \ge x_i \ \forall i$

Cioè: $a \le \min\{x_i, i=1 \ldots n\}$

$b \ge \max\{x_i, i=1 \ldots n\}$

devo minimizzare $b-a$

Ho il massimo di f quando $b = \max\{x_i : i=1 \ldots n\}$

$a = \min\{x_i : i=1 \ldots n\}$

Ho lo stimatore

$\min\{X_1 \ldots X_n\}$ per l'estremo inferiore

e lo stimatore

$\max\{X_1 \ldots X_n\}$ per l'estremo superiore

Sia X v.a gaussiana $\mathbb{P}_X = N(\mu, \sigma^2)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx \qquad F_X'(t) = f(t) > 0$$

$\Rightarrow F_X$ è una funzione strettamente monotona crescente

$\lim_{t \to -\infty} F_X(t) = 0$, $\lim_{t \to +\infty} F_X(t) = 1$

$\forall \alpha \in (0,1) \Rightarrow \exists!\, x = x_\alpha$ t.c. $F_X(x_\alpha) = \alpha$

x_α si chiama QUANTILE di X DI LIVELLO α

Nel caso particolare $\mathbb{P}_Z = N(0,1)$ il quantile di Z di livello α si indica z_α : $\Phi(z_\alpha) = \alpha$

$\Phi(t) + \Phi(-t) = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \Phi(-z_\alpha) = 1 - \alpha$

$$z_{1-\alpha} = -z_\alpha$$

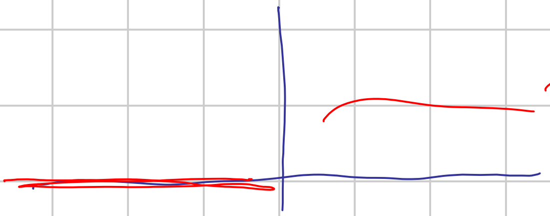
Discorso analogo per le v.a con distribuzione $t(n)$

Se T è una v.a. con $\mathbb{P}_T = t(n)$, allora F_T è strettamente crescente e $F_T(t) + F_T(-t) = 1$

$\forall \alpha \in (0,1)$ $\exists!\, t = t_{n,\alpha}$ t.c. $F_T(t_{n,\alpha}) = \alpha$

e $\quad t_{n,1-\alpha} = -t_\alpha$

Sia V, v.a con distribuzione $\chi^2_n = \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$



$x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}$ la densità

$f(x) \equiv 0 \qquad x \le 0$

$f(x) > 0 \qquad \forall x > 0$

$F_V(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx \qquad F_V'(t) = f(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$

è $\quad F_V(t) \equiv 0 \qquad t \le 0$

strettamente crescente su $(0, +\infty)$

$\forall \alpha \in (0,1) \quad \exists!\, \chi = \chi^2_{n,\alpha} > 0$ t.c. $F_V(\chi) = \alpha$

— o —

Sia $X_1 \ldots X_n$ campione statistico la cui distribuzione da un parametro θ e siano

$L_i = l_i(X_1 \ldots X_n)$ statistiche del campione

$L_s = l_s(X_1 \ldots X_n)$

Dico che l'intervallo (L_i, L_s) è un INTERVALLO DI CONFIDENZA (O DI FIDUCIA) DI LIVELLO $1-\alpha$ PER IL PARAMETRO θ se

$$\mathbb{P}(\theta \in (L_i, L_s)) \ge 1-\alpha$$

Dico che la semiretta $(L_i, +\infty)$ è un INTERVALLO DI CONFIDENZA UNILATERALE SUPERIORE DI LIVELLO $1-\alpha$

se $\quad \mathbb{P}(\theta > L_i) \ge 1-\alpha$

Dico che la semiretta $(-\infty, L_s)$ è un INTERVALLO DI CONFIDENZA UNILATERALE INFERIORE DI LIVELLO $1-\alpha$

se $\mathbb{P}(\theta < L_s) \geq 1-\alpha$

1° CASO CAMPIONE $X_1 \ldots X_n$ GAUSSIANO, LA VARIANZA È NOTA

Consideriamo Z gaussiana standard

$\mathbb{P}(|Z| < t) = 1-\alpha$

$1-\alpha = \mathbb{P}(-t < Z < t) = \mathbb{P}(Z < t) - \mathbb{P}(Z < -t) =$

$= \Phi(t) - \Phi(-t) = \Phi(t) - (1-\Phi(t))$

$= 2\Phi(t) - 1$

$1-\alpha = 2\Phi(t) - 1 \qquad 2\Phi(t) = 2-\alpha \qquad \Phi(t) = 1-\frac{\alpha}{2}$

$\Leftrightarrow \quad t = z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

So che $1-\alpha = \mathbb{P}(|Z| < z_{1-\frac{\alpha}{2}})$

$\mathbb{P}_{X_i} = N(\mu, \sigma^2) \qquad \dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ è una v.a con distribuzione $N(0,1)$

$\Rightarrow 1-\alpha = \mathbb{P}\left(\dfrac{|\overline{X}-\mu|}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = \mathbb{P}\left(|\overline{X}-\mu| < \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$

$\mathbb{P}\left(-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \mu - \overline{X} < \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) =$

$= \mathbb{P}\left(\overline{X} - \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \mu < \overline{X} + \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$

$(L_i, L_s) = \left(\overline{X} - \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \overline{X} + \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$

— o —

$1-\alpha = \mathbb{P}(Z < t) \qquad \mathbb{P}_Z = N(0,1)$

$= \Phi(t) \quad \Leftrightarrow \quad t = z_{1-\alpha}$

$1-\alpha = \mathbb{P}\left(\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{1-\alpha}\right) = \mathbb{P}\left(\overline{X}-\mu < \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}\right) =$

$$= \mathbb{P}\left(\mu > \overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}\right)$$

$(L_i, +\infty) = \left(\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}, +\infty\right)$ è un intervallo di confidenza unilaterale superiore di livello $1-\alpha$

$$1-\alpha = \mathbb{P}(Z > t) \qquad \mathbb{P}_Z = N(0,1)$$

$$= 1 - \mathbb{P}(Z \leq t) = 1 - \Phi(t) \iff \Phi(t) = \alpha$$

$$\iff t = z_\alpha = -z_{1-\alpha}$$

$$1-\alpha = \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} > -z_{1-\alpha}\right) = \mathbb{P}\left(\overline{X}-\mu > -\frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\mu < \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}\right)$$

$(-\infty, L_i) = \left(-\infty, \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}\right)$ è un intervallo di confidenza unilaterale inferiore per il valore atteso.

CAMPIONE GAUSSIANO DI VALORE ATTESO μ E VARIANZA σ^2 ENTRAMBI INCOGNITI

$X_1 \ldots X_n$ campione gaussiano con distribuzione $N(\mu, \sigma^2)$

allora

$$T = \frac{(\overline{X}-\mu)\sqrt{n}}{S} \quad \text{ha distribuzione } \mathbb{P}_T = t(n-1)$$

Cerco t t.c.

$$1-\alpha = \mathbb{P}(|T| < t) = \mathbb{P}(-t < T < t) =$$

$$= \mathbb{P}(T < t) - \mathbb{P}(T \leq -t)$$

$$= F_T(t) - F_T(-t) =$$

$$= F_T(t) - (1 - F_T(t)) =$$

$$= 2F_T(t) - 1$$

$$1-\alpha = 2F_T(t) - 1$$

$$F_T(t) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow t = t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}$$

So che $1-\alpha = \mathbb{P}\left(\left|\frac{(\overline{X}-\mu)\sqrt{n}}{S}\right| < t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right) =$

$= \mathbb{P}\left(|\overline{X}-\mu|\frac{\sqrt{n}}{S} < t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right) =$

$= \mathbb{P}\left(|\overline{X}-\mu| < \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right) =$

$= \mathbb{P}\left(-\frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \leq \mu - \overline{X} < \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right)$

$= \mathbb{P}\left(\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} < \mu < \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right)$

$\Rightarrow (L_i, L_s) = \left(\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}, \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right)$

è un intervallo di confidenza bilaterale per il parametro valore atteso, di livello $1-\alpha$

Cerco t t.c. $1-\alpha \doteq \mathbb{P}(T < t)$ $\quad \mathbb{P}_T = t(n-1)$

$= F_T(t)$

$\Leftrightarrow t = t_{n-1,1-\alpha}$

$1-\alpha = \mathbb{P}\left(\frac{(\overline{X}-\mu)\sqrt{n}}{S} \leq t_{n-1,1-\alpha}\right) =$

$= \mathbb{P}\left(\overline{X}-\mu \leq \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\alpha}\right) = \mathbb{P}\left(\mu \geq \overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\alpha}\right)$

$(L_i, +\infty) = \left(\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\alpha}\right)$ è un intervallo di confidenza unilaterale superiore di livello $1-\alpha$ per il parametro valore atteso.

— — —

Per $\mathbb{P}_T = t(n-1)$ cerco t t.c. $1-\alpha = \mathbb{P}(T > t)$

$1-\alpha = 1 - \mathbb{P}(T \leq t) = 1 - F_T(t) \Leftrightarrow F_T(t) = \alpha$

$$\Leftarrow t = t_{n-1,\alpha} = -t_{n-1,1-\alpha}$$

$$1-\alpha = \mathbb{P}\left(\frac{(\bar{X}-\mu)\sqrt{n}}{S} > -t_{n-1,1-\alpha}\right) = \mathbb{P}\left(\bar{X}-\mu > -\frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\alpha}\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\mu < \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\alpha}\right)$$

$\Rightarrow (-\infty, L_S) = \left(-\infty, \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\alpha}\right)$ è intervallo unilaterale inferiore di livello $1-\alpha$ per il parametro valore atteso

INTERVALLO DI CONFIDENZA PER IL PARAMETRO σ^2

$V = \frac{S^2(n-1)}{\sigma^2}$ ha distribuzione χ^2_{n-1}

Considero $\mathbb{P}\left(\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \le V \le \chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right) =$

$$= \mathbb{P}\left(V \le \chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right) - \mathbb{P}\left(V < \chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}\right) =$$

$$= F_V\left(\chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right) - F_V\left(\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}\right) = \left(1-\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{\alpha}{2} = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow 1-\alpha = \mathbb{P}\left(\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \le \frac{S^2(n-1)}{\sigma^2} \le \chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{1}{\chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}} \le \frac{\sigma^2}{S^2(n-1)} \le \frac{1}{\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}}\right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{S^2(n-1)}{\chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}} \le \sigma^2 \le \frac{S^2(n-1)}{\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}}\right)$$

$$\Rightarrow (L_i, L_S) = \left(\frac{S^2(n-1)}{\chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}}, \frac{S^2(n-1)}{\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}}\right)$$

è un intervallo di confidenza bilaterale di livello $1-\alpha$ per il parametro σ^2.

— ~ —

$$1-\alpha = \mathbb{P}\left(V \le \chi^2_{n-1,1-\alpha}\right) = F_V\left(\chi^2_{n-1,1-\alpha}\right)$$

$$1-\alpha = \mathbb{P}\left(\frac{S^2(n-1)}{\sigma^2} \le \chi^2_{n-1,1-\alpha}\right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{\sigma^2}{S^2(n-1)} \ge \frac{1}{\chi^2_{n-1,1-\alpha}}\right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(\sigma^2 \ge \frac{S^2(n-1)}{\chi^2_{n-1,1-\alpha}}\right)$$

$$(L_i, +\infty) = \left(\frac{S^2(n-1)}{\chi^2_{n-1,1-\alpha}}, +\infty\right)$$ è intervallo di confidenza unilaterale superiore di livello $1-\alpha$ per σ^2

$$1-\alpha = \mathbb{P}(V > t) = 1 - \mathbb{P}(V \le t) = 1 - F_V(t)$$

$$\iff F_V(t) = \alpha \iff t = \chi^2_{n-1,\alpha}$$

$$1-\alpha = \mathbb{P}\left(\frac{S^2(n-1)}{\sigma^2} > \chi^2_{n-1,\alpha}\right) = \mathbb{P}\left(\sigma^2 < \frac{S^2(n-1)}{\chi^2_{n-1,\alpha}}\right)$$

$$\left(0, \frac{S^2(n-1)}{\chi^2_{n-1,\alpha}}\right)$$ è intervallo di confidenza unilaterale inferiore di livello $1-\alpha$ per il parametro σ^2.

TEST D'IPOTESI

Sia $X_1 \_ X_n$ campione statistico

Faccio una ipotesi sulla distribuzione del campione

La chiamo IPOTESI NULLA e la indico H_0

In base ai dati raccolti $x_1 - x_n$ accetto o rifiuto l'ipotesi

1) L'ipotesi è vera e in base ai dati raccolti io la accetto
$\rightarrow$ BENE

2) l'ipotesi è vera ma in base ai dati raccolti io la rifiuto
Si dice che si commette ERRORE DI 1^a SPECIE

3) l'ipotesi è falsa ma in base ai dati raccolti io la accetto
Si dice che si commette ERRORE DI 2^a SPECIE

4) l'ipotesi è falsa e in base ai dati raccolti io la rifiuto
$\rightarrow$ BENE

ESEMPIO Ho una monetina e voglio sapere se è truccata $\Rightarrow$ Testo l'ipotesi nulla

$H_0)$ la moneta non è truccata

Poiché $\mathbb{P}_{X_i} = B(p)$ Testo $H_0)\ p = \frac{1}{2}$

$H_A) = p \neq \frac{1}{2}$

So che $p = E[X_i]$ $\bar{x}$, $E[\bar{X}] = p$

Scelgo una soglia di tolleranza $\varepsilon > 0$

Accetto $H_0)\ p = \frac{1}{2}$ se $\left|\bar{x} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$

Rifiuto $H_0)\ p = \frac{1}{2}$ se $\left|\bar{x} - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon$

$\alpha = \mathbb{P}$ di commettere errore di 1^a specie $=$

$\mathbb{P}\left(\left|\bar{X} - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right)$

$$\alpha = \mathbb{P}\left(\left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{2} \right| \geq \varepsilon \right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \geq \frac{1}{2} + \varepsilon \right) \vee \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \leq \frac{1}{2} - \varepsilon \right) \right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \geq \frac{1}{2} + \varepsilon \right) + \mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \leq \frac{1}{2} - \varepsilon \right)$$

$\mathbb{P}_{X_i} = B(p)$ e $X_1, \_\_ X_n$ indipendenti

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i$ ha distribuzione $B(n,p)$

$$\alpha = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq \frac{n}{2} + n\varepsilon \right) + \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq \frac{n}{2} - n\varepsilon \right)$$

$$= 1 - \mathbb{P}\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} X_i}_{B(n,\frac{1}{2})} < \frac{n}{2} + n\varepsilon \right) + \mathbb{P}\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} X_i}_{B(n,\frac{1}{2})} \leq \frac{n}{2} - n\varepsilon \right)$$

La probabilità α di commettere errore di 1° specie si dice LIVELLO DI SIGNIFICATIVITÀ DEL TEST.

Una volta fissato α mi chiedo quale sia la probabilità di commettere errore di 2° SPECIE: accettare H_0 quando in realtà essa è falsa.

Se H_0 è falsa, allora $p \neq \frac{1}{2}$.

$$\beta(p) = \mathbb{P}_p\left(\left| \bar{X} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon \right) = \mathbb{P}_p\left(\left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon \right) =$$

$$= \mathbb{P}_p\left(\frac{1}{2} - \varepsilon < \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i < \frac{1}{2} + \varepsilon \right)$$

$$= \mathbb{P}_p\left(\frac{n}{2} - \varepsilon n < \sum_{i=1}^{n} X_i < \frac{n}{2} + \varepsilon n \right)$$

$\beta : p \in [0,1] \longmapsto \beta(p) \in [0,1]$

La funzione $\beta(p)$ si dice CURVA OPERATIVA CARATTERISTICA

la funzione $1-\beta(p)$ si dice POTENZA DEL TEST

Testo l'ipotesi nulla "è più facile che esca croce piuttosto che esca testa".

$H_0) \quad p \leq \frac{1}{2} \qquad\qquad H_A) \quad p > \frac{1}{2}$

Accetto H_0 se $\bar{x} < \frac{1}{2} + \varepsilon$

Rifiuto H_0 se $\bar{x} \geq \frac{1}{2} + \varepsilon$

$$\alpha = \mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \geq \frac{1}{2} + \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} X_i}_{B(n,p)\,,\ p \leq \frac{1}{2}} \geq \frac{n}{2} + \varepsilon_n\right) =$$

$$= 1 - \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i < \frac{n}{2} + \varepsilon_n\right)$$

$$\leq \sup_{p \in [0,\frac{1}{2}]} 1 - \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i < \frac{n}{2} + \varepsilon_n\right) =$$

$$= 1 - \inf_{p \in [0,\frac{1}{2}]} \mathbb{P}\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} X_i < \frac{n}{2} + \varepsilon_n}\right)$$